

FIZIKA 2 (GYAKORLAT)

Készítette:

Dr. Szijártó Márk



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Földrajz- és Földtudományi Intézet
Geofizikai és Űrtudományi Tanszék

Budapest, 2026

TARTALOMJEGYZÉK

| | |
|---|-----------|
| Jelölésjegyzék | 4 |
| 1. Nyugvó töltések és elektrosztatikus mezőjük I..... | 8 |
| 1.1. Fogalmak | 8 |
| 1.2. Órai feladatok | 9 |
| 1.3. Gyakorló feladatok | 10 |
| 2. Nyugvó töltések és elektrosztatikus mezőjük II..... | 11 |
| 2.1. Fogalmak | 11 |
| 2.2. Órai feladatok | 11 |
| 2.3. Gyakorló feladatok | 12 |
| 3. Egyenáramok és mágneses mezőjük I..... | 13 |
| 3.1. Fogalmak | 13 |
| 3.1.1. Egyszerű áramkörök jellemzése | 13 |
| 3.1.2. Fogyasztók kapcsolása..... | 13 |
| 3.2. Gyakorló feladatok | 14 |
| 4. Egyenáramok és mágneses mezőjük II. | 16 |
| 4.1. Fogalmak | 16 |
| 4.2. Órai feladatok | 16 |
| 5. Egyenáramok és mágneses mezőjük III..... | 18 |
| 5.1. Fogalmak | 18 |
| 5.2. „Recept” a Kirchhoff-analízis menetére | 18 |
| 5.3. Órai feladatok | 19 |
| 5.4. Gyakorló feladatok | 19 |
| 6. Elektromágneses indukció, töltött részecskék mozgása EM térben..... | 21 |
| 6.1. Fogalmak | 21 |
| 6.1.1. Elektrosztatika | 21 |
| 6.1.2. Magnetosztatika | 21 |
| 6.1.3. Lorentz-erő..... | 21 |
| 6.1.4. Elektromágneses indukció | 21 |
| 6.2. Órai feladatok | 22 |
| 6.3. Gyakorló feladatok | 23 |
| 7. Váltakozó feszültség és áram I..... | 24 |
| 7.1. Fogalmak | 24 |
| 7.2. Órai feladatok | 24 |
| 7.3. Gyakorló feladatok | 25 |
| 8. Váltakozó feszültség és áram II. | 26 |
| 8.1. Fogalmak | 26 |
| 8.1.1. Összetett hálózati elemek viselkedése | 26 |
| 8.1.2. Komplex formalizmus | 27 |
| 8.2. Órai feladatok | 28 |
| 8.3. Gyakorló feladatok | 29 |

| | |
|---|-----------|
| 9. Váltakozó feszültség és áram III..... | 31 |
| 9.1. Órai feladatok | 31 |
| 9.2. Gyakorló feladatok | 32 |
| 10. Optika I..... | 33 |
| 10.1. Fogalmak | 33 |
| 10.1.1. Hullámoptika alapjai..... | 33 |
| 10.1.2. Fermat-elv | 34 |
| 10.2. Órai feladatok | 35 |
| 10.3. Gyakorló feladatok | 36 |
| 11. Optika II. | 37 |
| 11.1. Fogalmak | 37 |
| 11.1.1. Geometriai optika alapjai..... | 37 |
| 11.1.2. Mátrix optika paraxiális közelítésben | 38 |
| 11.2. Órai feladatok | 39 |
| 11.3. Gyakorló feladatok | 40 |
| 12. Megoldókulcs az órai feladatok megoldásához | 41 |
| 12.1. Nyugvó töltések és elektrosztatikus mezőjük I..... | 41 |
| 12.2. Nyugvó töltések és elektrosztatikus mezőjük II. | 41 |
| 12.3. Egyenáramok és mágneses mezőjük II. | 41 |
| 12.4. Egyenáramok és mágneses mezőjük III..... | 41 |
| 12.5. Elektromágneses indukció, töltött részecskék mozgása EM térben..... | 42 |
| 12.6. Váltakozó feszültség és áram I. | 42 |
| 12.7. Váltakozó feszültség és áram II. | 42 |
| 12.8. Váltakozó feszültség és áram III..... | 42 |
| 12.9. Optika I. | 43 |
| 12.10. Optika II..... | 43 |
| Köszönetnyilvánítás..... | 44 |
| Irodalomjegyzék | 45 |
| Hivatkozások | 46 |

A dokumentum az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar földtudományi alapszak *Fizika 2 előadás* tematikáját követi (Hudson & Nelson 1994). A jegyzet a *Fizika 2 gyakorlati* az órai és a gyakorló feladatokat tartalmazza a megoldáshoz szükséges elméleti háttér vázlatával. A dokumentum számos esetben a Halász et al. (2004) középiskolai tankönyvet javasolja áttekintésre, ami segít a háttértudás elmélyítésében. Tekintettel a gyakorlati kurzuson való kötelező jelenlétre, a jegyzet kizárólag az órai feladatok megoldókulcsát tartalmazza.

A jegyzet kutatási és oktatási célokra szabadon felhasználható. Bármilyen formában való sokszorosítása a szerző írásos engedélyéhez kötött.

JELÖLÉSJEGYZÉK

| Nyugvó töltések és elektrosztatikus mezőjük I-II. | | |
|--|--|------------------------|
| Jelölés | Megnevezés | SI mértékegység |
| A_C | Síkkondenzátor lapjának felülete | m^2 |
| C | Kondenzátor kapacitása | F |
| d | Síkkondenzátor lapjai közötti (legrövidebb) távolság | m |
| $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ | Elektromos térerősség (vektor) | $N/C=V/m$ |
| ΔE_p | Potenciális energia | J |
| ϵ_0 | Vákuum dielektromos állandója | $A \cdot s/V \cdot m$ |
| $\mathbf{F}_C(\mathbf{r})$ | Coulomb-erő | N |
| $\mathbf{F}_g(\mathbf{r})$ | Gravitációs erő | N |
| $\Phi(\mathbf{r})$ | Elektromos potenciál | $J/C=V$ |
| Q | Pontszerű test töltése | $C=A \cdot s$ |
| q | Pontszerű próbatest töltése | $C=A \cdot s$ |
| \mathbf{r} | Két töltés közötti helyvektor | m |
| R | Gömb sugara | m |
| $\rho(\mathbf{r})$ | Térbeli töltéseloszlás | C/m^3 |
| t | Idő | s |
| W_{AB} | Elektromos tér munkája A és B pontok között | J |
| Φ_0 | Integrálási állandó (itt: állandó potenciál) | V |
| Egyenáramok és mágneses mezőjük I-III. | | |
| Jelölés | Megnevezés | SI mértékegység |
| A | Elektromos vezető keresztmetszete | m^2 |
| $E=U_0$ | Elektromotoros erő = üresjáratú feszültség | V |
| I | Áramerősség | $C/s=A$ |
| I_{max} | Névleges áram | $C/s=A$ |
| j | Áramsűrűség (nagysága) | A/m^2 |
| $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ | Áramsűrűség vektor | A/m^2 |
| l | Elektromos vezető hossza | m |
| P | Elektromos teljesítmény | $J/s=W$ |
| R | Ohmikus fogyasztó elektromos ellenállás | $V/A=\Omega$ |
| ρ | Fajlagos elektromos ellenállás | Ωm |
| ρ' | Sűrűség | kg/m^3 |
| σ | Fajlagos elektromos vezetőképesség | $1/\Omega m$ |
| U_{AB} | Elektromos feszültség A és B pontok között | $J/C=V$ |

| Elektromágneses indukció, töltött részecskék mozgása EM térben | | |
|---|--|------------------------|
| Jelölés | Megnevezés | SI mértékegység |
| α | A mágneses indukció és a sebesség vektorok által bezárt szög | ° |
| $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ | Mágneses indukció (vektor) | $V \cdot s/m^2 = T$ |
| d | Úthossz | m |
| $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ | Elektromos térerősség (vektor) | $N/C = V/m$ |
| $\mathbf{F}_L(\mathbf{r})$ | Lorentz-erő | N |
| φ_E | Elektromos fluxus | $V \cdot m$ |
| φ_B | Mágneses fluxus | $V \cdot s$ |
| Φ | Fázisszög | rad |
| $\gamma(\omega, t)$ | Fázis | rad |
| $I_i(t), I_i(\gamma)$ | Indukált áram/áram pillanatnyi értéke | A |
| l, a, b | Vezető geometria paraméterei | m |
| m | Tömeg | kg |
| N | Tekercs menetszáma | - |
| q | Pontszerű próbatest elektromos töltése | $C = A \cdot s$ |
| R | Ohmikus fogyasztó elektromos ellenállás | $V/A = \Omega$ |
| t | Idő | s |
| $U_i(t), U_i(\gamma)$ | Indukált feszültség/feszültség pillanatnyi értéke | V |
| $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ | Sebesség (vektor) | m/s |
| ω | Szögsebesség/körfrekvencia | rad/s |
| Váltakozó feszültség és áram I-III. | | |
| Jelölés | Megnevezés | SI mértékegység |
| $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ | Mágneses indukció (vektor) | $V \cdot s/m^2 = T$ |
| C | Kondenzátor kapacitása | F |
| f | Frekvencia | $1/s = Hz$ |
| Φ | Fázisszög | rad |
| Φ_C | Fázisszög kapacitív ellenállású fogyasztó (kondenzátor) esetén | rad |
| Φ_L | Fázisszög induktív ellenállású fogyasztó (tekercs) esetén | rad |
| Φ_R | Fázisszög ohmikus R fogyasztó esetén | rad |
| i | Imaginárius egység | - |
| $I_i(t), I_i(\gamma)$ | Indukált áram/áram pillanatnyi értéke | A |
| \mathbf{I} | Indukált áram komplex formalizmusban | A |
| $I_C(t)$ | Kapacitív ellenállású fogyasztón (kondenzátoron) átmenő (indukált) áramerősség | A |
| $I_L(t)$ | Induktív ellenállású fogyasztón (tekercsen) átmenő (indukált) áramerősség | A |

| Jelölés | Megnevezés | SI mértékegység |
|-----------------------------|--|------------------------|
| $I_R(t)$ | Ohmikus R fogyasztón átmenő (indukált) áramerősség | A |
| I_{max} | Maximális áram (csúcérték) | A |
| L | Tekercs önindukációs együtthatója | H |
| N | Tekercs menetszáma | - |
| $U_i(t), U_i(\gamma)$ | Indukált feszültség/feszültség pillanatnyi értéke | V |
| U | Indukált feszültség komplex formalizmusban | V |
| $U_C(t)$ | Kapacitív ellenállású fogyasztón eső (indukált) feszültség | V |
| $U_L(t)$ | Induktív ellenállású fogyasztón eső (indukált) feszültség | V |
| $U_R(t)$ | Ohmikus R fogyasztón eső (indukált) feszültség | V |
| U_{eff} | Effektív feszültség | V |
| U_{max} | Maximális feszültség (csúcérték) | V |
| $P_i(t), P_i(\gamma)$ | Indukált (elektromos) teljesítmény/teljesítmény pillanatnyi értéke | J/s=W |
| P_{eff} | Effektív (elektromos) teljesítmény | J/s=W |
| P_{max} | Maximális (elektromos) teljesítmény | J/s=W |
| T | Periódusidő | s |
| X_C | Kapacitív ellenállás | Ω |
| X_L | Induktív ellenállás | Ω |
| $X_R=R$ | Ohmikus fogyasztó elektromos ellenállása | Ω |
| ω | Szögsebesség/körfrekvencia | rad/s |
| Z | Impedancia | Ω |
| Z | Komplex impedancia | Ω |
| Z_l | Látszólagos impedancia | Ω |
| Z_h | Hatásos impedancia | Ω |
| Z_m | Meddő impedancia | Ω |
| Optika I. | | |
| Jelölés | Megnevezés | SI mértékegység |
| α | Beesési szög | $^\circ$ |
| β | Törési szög | $^\circ$ |
| $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ | Mágneses indukció (vektor) | $V \cdot s/m^2=T$ |
| c_0 | Fény terjedési sebessége vákuumban | m/s |
| $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ | Elektromos indukció/eltolás (vektor) | $A \cdot s/m^2$ |
| $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ | Elektromos térerősség (vektor) | $N/C=V/m$ |
| ϵ_0 | Vákuum elektromos permittivitása | $A \cdot s/V \cdot m$ |
| ϵ_r | Anyagra jellemző relatív elektromos permittivitás | - |
| $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ | Mágneses térerősség (vektor) | A/m |

| \mathbf{k} | Hullámszám vektor | rad/m |
|-----------------------------|---|-----------------|
| μ_0 | Vákuum mágneses permeabilitása | V·s/A·m |
| μ_r | Anyagra jellemző relatív mágneses permeabilitás | - |
| $n(\mathbf{r})$ | Törésmutató | - |
| OPL | Optikai úthossz | m |
| $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ | Tetszőleges vektortér (matematikai kifejezés) | - |
| $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ | Terjedési sebesség | m/s |
| Optika II. | | |
| Jelölés | Megnevezés | SI mértékegység |
| D | Dioptria | 1/m |
| d | Távolság, lencsevastagság | m |
| f | Fókusz távolság | m |
| F | Fókuszpont | - |
| G | Geometriai középpont | |
| k | Az optikai középponttól vett képtávolság | m |
| K | Kép nagyság | m |
| \mathbf{M} | Transzformációs mátrix | - |
| t | Az optikai középponttól vett tárgytávolság | m |
| T | Tárgy nagysága | m |
| θ | A fénysugár optikai tengellyel bezárt szöge a leképezés előtt | ° |
| θ' | A fénysugár optikai tengellyel bezárt szöge a leképezés után | ° |
| r | Gömbtükör, lencse görbületi sugara | m |
| O | Optikai középpont | - |
| ot | Optikai tengely | - |
| y | A fénysugár optikai tengelytől mért függőleges távolság a leképezés előtt | m |
| y' | A fénysugár optikai tengelytől mért függőleges távolság a leképezés után | m |

1. NYUGVÓ TÖLTÉSEK ÉS ELEKTROSZTATIKUS MEZŐJÜK I.

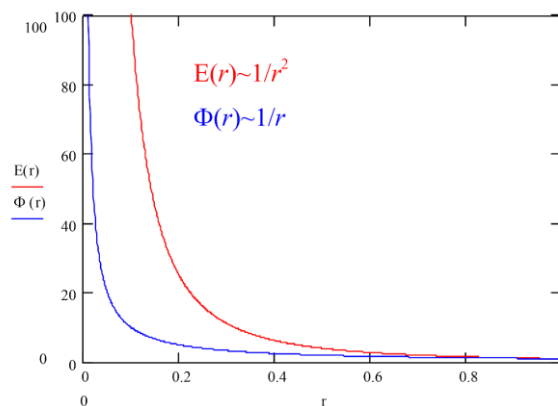
COULOMB-TÖRVÉNY ALKALMAZÁSA

A két pontszerű töltés között fellépő erőre vonatkozó számszerű összefüggést, amely formailag kísértetiesen hasonlít a Newton-féle gravitációs törvényre (Tasnádi et al. 2004), először Charles Coulomb határozta meg egy torziós mérleg segítségével 1785-ben (Budó 1991). Ezzel a kísérlettel lefedte a kvantitatív elektrosztatika alapjait, ami sok-sok évvel később elvezetett a kvantumelektrodinamikáig (Simonyi 2011). Habár a korabeli elmélet még nem használta az „elektromos térerősséget” és az „elektromos potenciált”, eme fogalmak bevezetése megkönnyíti az elektrosztatikai számításokat.

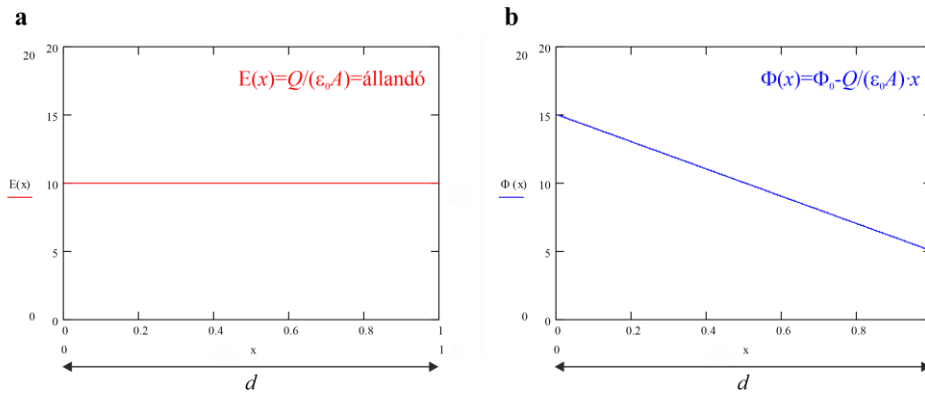
Az óra célja, hogy a hallgatók az elektrosztatika legegyszerűbb példáin keresztül ismerkedjenek meg a vektor- és skalárterek fogalmával és a közöttük lévő kapcsolatokkal. További feladat, hogy egyszerű számításokat végezzenek a lineáris algebrában használt alapvető összefüggések segítségével, valamint hasonlóságokat keressenek az elektrosztatikában és a mechanikában megismert törvényszerűségek között.

1.1. Fogalmak

- Coulomb-törvény, Coulomb-erő: $\mathbf{F}_C(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ N,
- Ponttöltés elektromos térerőssége (1.1. ábra): $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ $\frac{N}{C} = \frac{V}{m}$,
- Szuperpozíció elve: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$
- Folytonos töltésseloszlás: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r'^2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$,
- Elektromos tér munkája, potenciális energia: $W_{AB} = -\Delta E_p = \int_A^B \mathbf{F}_C(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ J,
- Elektromos potenciálkülönbség: $\Phi = -\frac{W_{AB}}{q} = \int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ $\frac{J}{C} = V$,
- Ponttöltés potenciálja (1.1. ábra): $\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$,
- Örvénymentes vektortér: $\text{rot}\mathbf{E} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\text{grad}\Phi_{AB}$,



1.1. ábra: Ponttöltés elektromos tere és potenciálja sugárirányú távolság függvényében. (Az ábra illusztráció; a függvény és az argumentum értéke nem mérvadó.)

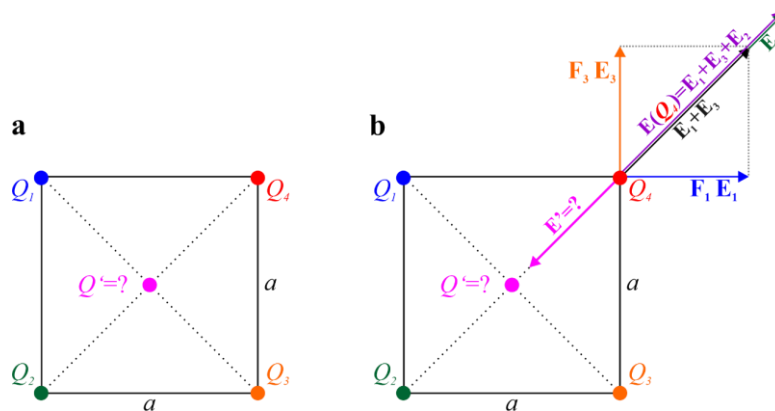


1.2. ábra: Síkkondenzátor elektromos térerőssége és potenciálja a kondenzátor lemezei között (d).
(Az ábra illusztráció; a függvény és az argumentum értéke nem mérvadó.)

- Síkkondenzátor elektromos térerőssége (1.2.a ábra): $\mathbf{E}(E_x, E_y, E_z) = \left(\frac{Q}{\epsilon_0 \cdot A_C}, 0, 0\right)$,
- Síkkondenzátor potenciálja (1.2.b ábra): $\Phi(\mathbf{x}) = -\int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \Phi_0 - \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot A_C} \cdot d$.

1.2. Órai feladatok

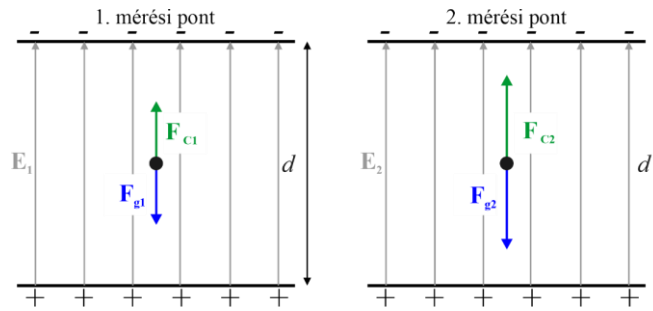
1. **feladat:** Egy a oldalhosszúságú négyzet csúcaiban Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 pontszerű töltéseket helyezünk el. Milyen nagyságú és előjelű Q' töltést kell elhelyeznünk az a oldalhosszúságú négyzet átlóinak metszéspontjába $Q_1=Q_2=Q_3=Q_4=Q$ esetén, hogy a rendszer egyensúlyban legyen? Az elektrosztatikai elrendezést és a megoldáshoz szükséges kvalitatív segítséget a 1.3. ábra szemlélteti.



1.3. ábra: (a) Az 1. feladatban bemutatott elektrosztatikai helyzet és (b) a feladat kvalitatív megoldása.

2. **feladat:** Szeretnénk meghatározni két mérési pont között a gravitációs gyorsulás nagyságának megváltozását. Rendelkezünk egy olyan gravitációs gyorsulást mérő műszerrel (graviméterrel), amelynek belsejében egy síkkondenzátor van elhelyezve. A két fegyverzet a felszínnel párhuzamos (1.4. ábra). A síkkondenzátor lapjai között egy q töltésű, m tömegű pontszerű test „lebeg”. A kondenzátor két fegyverzete közötti távolság $d=5$ cm, a test tömege $m=1$ g, töltése $q=9,81 \cdot 10^{-3}$ C. Az 1. mérési pontban a síkkondenzátor két fegyverzete között kialakuló a vertikálisan felfele mutató elektrosztatikus térerősség vektor nagysága $|\mathbf{E}_1|=1$ V/m.

- a) Mi a gravitációs gyorsulás nagysága ($|\mathbf{g}_1|$) az 1. mérési pontban?
- b) Mekkora feszültség (U_1) esik a kondenzátor két fegyverzete között?



1.4. ábra: Gravitációs gyorsulást mérő műszer egyszerűsített felépítése a belsejében kialakuló elektromos térerősséggel és a közepén elhelyezett m tömegű és q töltésű pontszerű testre ható erőkkel, két mérési pontban.

Az 1. mérési pont után a műszert áthelyezzük a 2. mérési pontba; ahol a gravitációs gyorsulás nagysága is más. Ennek hatására az addig "lebegő" pontszerű test elmozdul, majd az automatikus vezérlés megváltoztatja az elektrosztatikus térerősség vektor nagyságát, hogy a testre ható gravitációs ($|\mathbf{F}_g|$) és a Coulomb-erő ($|\mathbf{F}_c|$) nagysága egyenlő legyen. (A feladat megoldása során ettől a tranziens viselkedéstől eltekintünk; csupán a két egyensúlyi állapotot figyeljük.) A műszer kijelzőjén azt tapasztaljuk, hogy a feszültség $5 \cdot 10^{-2}$ mV-tal megnövekedett a 2. mérési pontban az 1. pontban mérthez képest.

- Mekkora a kondenzátor két fegyverzete között kialakuló elektromos tér nagysága a 2. mérési pontban?
- Mi a gravitációs gyorsulás nagysága ($|\mathbf{g}_2|$) a 2. mérési pontban? Mennyit változott az 1. pontban mérthez képest?
- Tételezzük fel, hogy a mérést a Föld nevű bolygón végezték el. Merre mozdultunk el a két mérési pont között az Egyenlítőhöz képest, ha az elmozdulás a geoidot közelítő ellipszoid szintfelületén történik?

1.3. Gyakorló feladatok

- feladat:** Létezik-e potenciálfüggvénye $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = (2xy - z, x^2 + z, y - x)$ vektorfüggvénynek? Válaszát számítással indokolja! Miért fontos ezt ellenőrizni elektrosztatikában?
- feladat:** Egy 2D oldalmetszeti, egy 2D felülnézeti és – a lehetőségeknek megfelelően – egy 3D rajzzal kell szemléltetni az $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ elektromos térerősséget és az $U(r)$ potenciált egy vákuummal kitöltött:
 - gömbkondenzátor R_1 (+) és R_2 (-) fegyverzete ($R_1 < R_2$) között;
 - egy L hosszúságú hengerkondenzátor R_1 (+) és R_2 (-) fegyverzete ($R_1 < R_2$) között;
 - mindkét esetben diagrammon illusztrálja az elektromos térerősség és a potenciál r -szerinti megváltozását a kondenzátorotok fegyverzei között!
 (Megjegyzés: A feladatban nem kell konkrét számolást elvégezni!)
- feladat:** Egy zivatarfelhő alatt a villámlást megelőző másodperben $|\mathbf{E}|=5000$ V/m nagyságú, felfelé mutató elektromos térerősség alakul ki. A felhőalap és a földfelszín között $d=1$ km távolság van. Azt tapasztaljuk, hogy egy $m=1$ mg tömegű, elektromosan feltöltött hajszál a levegőben lebeg. Mekkora hajszál a töltése?
 - Illusztrálja a helyzetet egy rajzzal!
 - Mekkora hajszál a töltése?
 - Mekkora feszültség mérhető az 1 km magasan lévő felhőalap és a földfelszín között?

2. NYUGVÓ TÖLTÉSEK ÉS ELEKTROSZTATIKUS MEZŐJÜK II.

GAUSS-OSZTROHRADSKIJ-TÉTEL ALKALMAZÁSA

Az elektrosztatikában két fő törvényszerűség van: (1) az elektromos térerősségnek egy zárt felületre vett fluxusa arányos a felületen belüli töltéseloszlással (Gauss-Osztrohradszkij-tétel) és (2) az elektromos tér örvénymentes. A két törvény alkalmazásával mindent meg lehet határozni az elektrosztatikában (Feynman et al. 1986a).

Az óra célja, hogy a hallgatók egy-egy elektrosztatikai példán keresztül tanulják meg alkalmazni a Gauss-Osztrohradszkij-tételt. Maga a matematikai tétel univerzális, így a földtudományok több területén is alkalmazható, például, segítségével a gravitációs gyorsulás és a helyzeti energia megváltozása analitikusan írható le a Föld belseje felé haladva.

2.1. Fogalmak

➤ Felületi integrál gömbi koordináta-rendszerben: $\oint_F \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{f} = ?$

○ $\oint_F d\mathbf{f} = r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \Theta d\Theta.$

➤ Térfogat integrál gömbi koordináta-rendszerben: $\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV = ?$

○ $\int_V dV = \int_0^r r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \Theta d\Theta.$

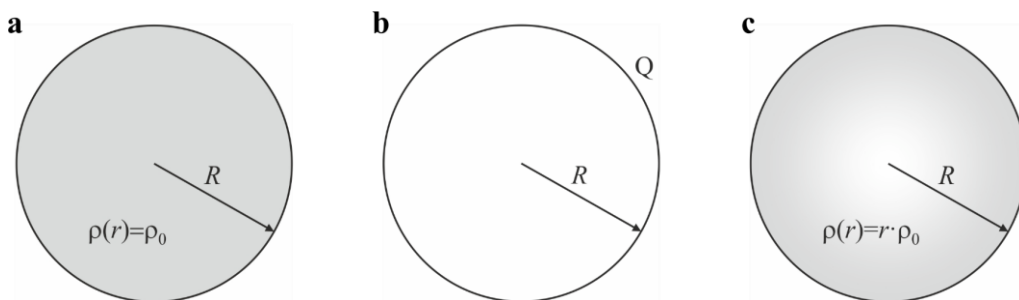
➤ Maxwell I. egyenlet (Gauss-törvény):

○ Integrális alak: $\oint_F \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{f} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV,$

○ Differenciális alak: $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$

2.2. Órai feladatok

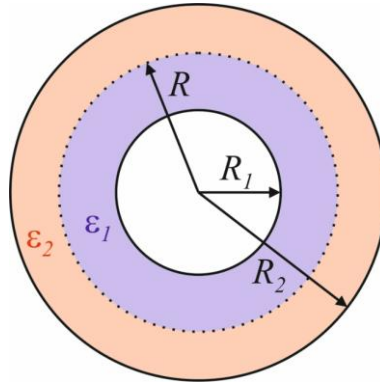
- 1. feladat:** Határozzuk meg egy R sugarú, $\rho(r)=\rho_0$ állandó töltéssűrűségű gömb elektromos terét és potenciálját! Rajzoljuk fel az eredményeket r sugár függvényében. Az elrendezést a 2.1.a ábra mutatja.
- 2. feladat:** Határozzuk meg egy belül üreges, R sugarú gömb elektromos terét és potenciálját, amelynek felületén Q egyenletesen eloszló felületi töltésmennyiség van! Rajzoljuk fel az eredményeket r sugár függvényében. Az elrendezést a 2.1.b ábra mutatja.



2.1. ábra: Az R sugarú (a) $\rho(r)=\rho_0$ állandó töltéssűrűségű gömb, (b) üreges gömb geometriája, amelynek felületén a Q töltésmennyiség egyenletesen oszlik el, (c) $\rho(r)=r \cdot \rho_0$ sugárirány szerint lineárisan változó töltéssűrűségű gömb geometriája.

2.3. Gyakorló feladatok

- 1. feladat:** Határozzuk meg egy R sugarú, $\rho(r)=\rho_0 \cdot r$ sugárirányban r -szerint változó töltéssűrűségű gömb elektromos terét és potenciálját! Rajzoljuk fel az eredményeket r sugár függvényében. Az elrendezést a 2.1.c ábra illusztrálja.
- 2. feladat:** Egy gömbkondenzátor (2.2. ábra) lemezei R_1 és R_2 sugarú fémlamezek, ahol $R_2 > R_1$. A kettő közötti térfogatot a következőképpen van kitöltve: R ($R_1 < R < R_2$) sugárig ϵ_1 , majd ϵ_2 relatív dielektromos állandójú közeg. Mekkora lesz a gömbkondenzátor kapacitása (C_e)?



2.2. ábra: Egy gömbkondenzátor felépítése.

3. EGYENÁRAMOK ÉS MÁGNESES MEZŐJÜK I.

ALAPFOGALMAK

Elektromos mező hatására a szabad töltéshordozók sokasága rendezett irányú mozgást végez, amit elektromos áramnak nevezünk. Habár a jelenség mindennapjaink részévé vált, nem feltétlenül szükséges komoly szakmai háttér a hétköznapiakban rendszeresen használt elektromos eszközök (például kávéfőző, elektromos sütő) működtetéséhez. Azonban, a földtudományok területén elkerülhetetlen az elektromágnességtan alapjainak ismerete, amit a mérőműszerek biztonságos használata is indokol. Sőt, számos esetben egyenáramú elektromos áramköri modellekre van szükség, hogy egy-egy fizikai problémát leírjunk. Erre néhány kiszemelt példa: a fűrólyuk geofizikában alkalmazott alpmérések (pl.: saját potenciál (Balázs 2013)), a fűrólyuk és valós földtani közeg elektromos kapcsolata (Szijártó et al. 2017), vagy a globális atmoszferikus áramok leírására (Rycroft et al. 2000) stb.

Az óra célja, hogy a hallgatók megismerkedjenek az egyszerű áramköri elemek tulajdonságaival és azok kapcsolási típusaival. Áttekintésre javasolt irodalom: Halász et al. (2004) 137-159.

3.1. Fogalmak

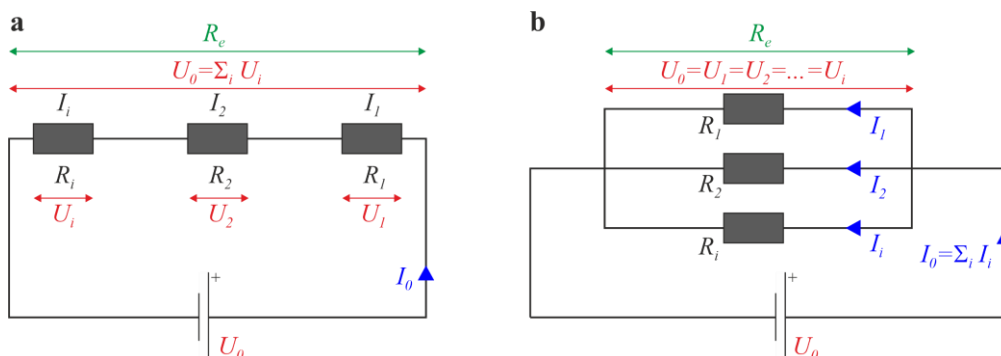
3.1.1. Egyszerű áramkörök jellemzése

- Áramerősség: $I = \frac{Q}{t}$ $\frac{C}{s} = A,$
- Áramsűrűség: $j = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta I}{\Delta A} \right) = \frac{dI}{dA},$ $\frac{A}{m^2},$
- Potenciálkülönbség \rightarrow feszültség: $\Phi \rightarrow U$ $\frac{J}{C} = V,$
- Ohm-törvénye (elektromos ellenállás): $R = \frac{U}{I}$ $\frac{V}{A} = \Omega,$
- Differenciális Ohm-törvény: $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}}{\rho},$
- Fajlagos elektromos ellenállás: $\rho = \frac{A}{l} \cdot R$ $\Omega m,$
- Elektromos munka: $W = U \cdot Q = U \cdot I \cdot t$ $J,$
- Elektromos teljesítmény: $P = \frac{W}{t} = U \cdot I$ $\frac{J}{s} = W.$

3.1.2. Fogyasztók kapcsolása

- *Elágazás nélküli (soros) kapcsolás (3.1.a ábra):*

- A fogyasztókon átfolyó áram erőssége egyenlő: $I_1 = I_2 = \dots = I_N.$



3.1. ábra: Fogyasztók kapcsolási típusai: (a) elágazás nélküli (soros), (b) párhuzamos.

- Az áramforrás feszültsége megegyezik a fogyasztókon eső feszültségek összegével:

$$U_0 = U_1 + U_2 + \dots + U_N.$$

- Az eredő ellenállás a részellenállások összege:

$$R_e = R_1 + R_2 + \dots + R_N.$$

➤ *Párhuzamos kapcsolás (3.1.b ábra):*

- A párhuzamosan kapcsolt fogyasztók feszültsége megegyezik:

$$U_1 = U_2 = \dots = U_N.$$

- A főágban folyó áram erőssége egyenlő a mellékágak áramerősségeinek összegével:

$$I_0 = I_1 + I_2 + \dots + I_N.$$

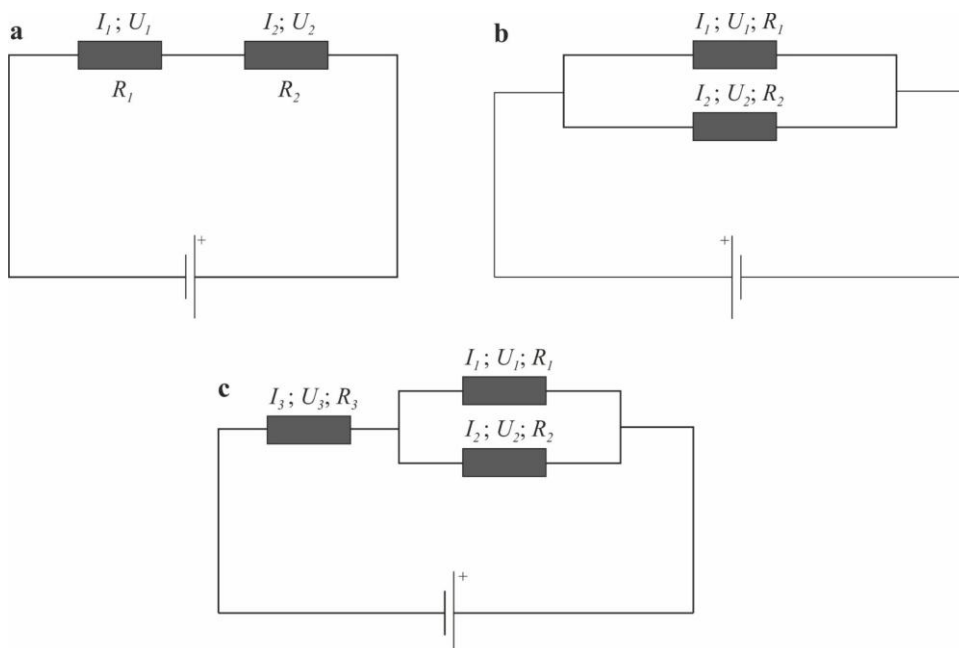
- Az eredő ellenállás reciproka a részellenállások reciprokainak összegével egyenlő:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}.$$

3.2. Gyakorló feladatok

1. **feladat:** A feladatban három – a 3.2 ábrán látható – áramkört kell jellemezni. A részfeladatok megegyeznek a részábrák sorrendjével (a–c).

- Vizsgáljuk meg a 3.2.a ábrán látható áramkört! Határozzuk meg a következő ismeretleneket: U , R_1 és az R_2 ellenállással jellemzett fogyasztók teljesítményét! Határozzuk meg az fogyasztók eredő ellenállását! Mondjunk példát a 3.2.a ábrán látható kapcsolásra! Szükséges paraméterek: $I_1=100$ mA, $U_1=1,5$ V, $U_2=3$ V. Rajzoljuk be a fogyasztókon átfolyó áram irányát!
- Vizsgáljuk meg a 3.2.b ábrán látható áramkört! Határozzuk meg a következő ismeretleneket: U_1 , R_1 és R_2 ellenállással jellemzett fogyasztó teljesítményét! Határozzuk meg az fogyasztók eredő ellenállását! Mondjunk példát a 3.2.b ábrán látható kapcsolásra! Szükséges paraméterek: $I_1=100$ mA, $I_2=50$ mA, $U_2=4,5$ V. Rajzoljuk be a fogyasztókon át- és a főágban folyó áram irányát!



3.2. ábra: Az 1. feladathoz tartozó egyszerű áramkörök kapcsolási rajzai.

- c) Vizsgáljuk meg a 3.2.c ábrán látható áramkört! Határozzuk meg a következő ismeretleneket: U_1, R_1, I_3, R_3 ! Határozza meg az fogyasztók eredő ellenállását! Mondjunk egy példát a 3.2.c ábrán látható kapcsolásra! Szükséges paraméterek: $I_1=100$ mA, $I_2=50$ mA, $U_2=4,5$ V, $U_3=1,5$ V. Rajzoljuk be a fogyasztókon át- és a főágban folyó áram irányát!
2. **feladat:** Viharos időben a villám beleszap egy $L=50$ m hosszúságú, $d=2$ cm átmérőjű, tömör henger alakú rézvezetékbe (villámhárítóba). A vezetéken $\Delta t=0,2$ s-ig 20 kA áram folyik keresztül. A réz fajlagos elektromos ellenállása $\rho_{Cu}=0,017$ $\mu\Omega$ m, sűrűsége $\rho_{Cu}'=9000$ kg/m³; fajhője $c=400$ J/(kg·K). A megadott anyagi jellemzők hőmérsékletfüggése elhanyagolható. Tegyük fel, hogy a villámhárítóban leadott teljesítmény teljes egészében a vezetékot melegíti. Hány °C-kal melegszik fel a villámhárító?

4. EGYENÁRAMOK ÉS MÁGNESES MEZŐJÜK II.

VALÓS PÉLDA – EGY HÁZTARTÁS ÁRAMKÖRÉNEK VIZSGÁLATA

A legtöbb elektromos mérőműszeren belül elágazás nélküli (soros) és párhuzamos hálózatok kombinációjának sokasága található, ami összeköti a fogyasztókat. Azonban a háztartásokban kiépített elektromos áramkörök működésének megértése kézzelfoghatóbbá teszi a problémakört.

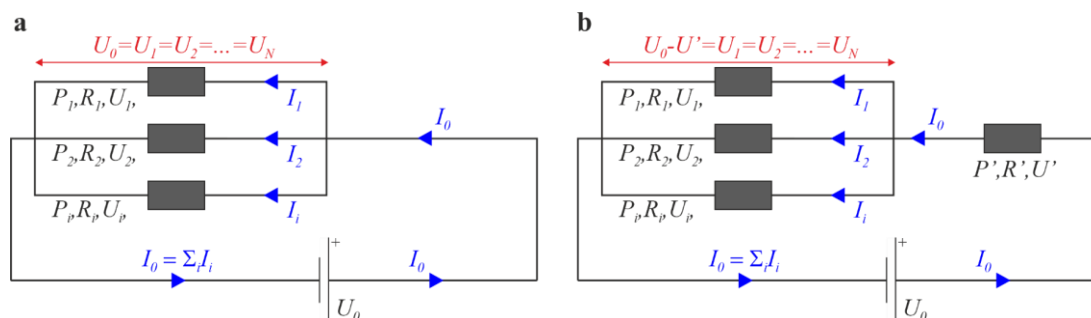
Az óra célja, hogy a hallgatók rálássanak a biztonságos lakossági áramfogyasztás hátterére (villanyóra, biztosítékok, kismegszakító működése), megértsék a teljesítmény és az elektromos fogyasztás közötti fogalmi különbséget, illetve betekintést nyerjenek az elektromos hálózatok méretezésének alapelveibe.

4.1. Fogalmak

- Elektromos munka: $W = P \cdot t$ kWh.
- Névleges áram (I_{max}):
A maximális elektromos áramra vonatkozik, amelyet a csatlakozó biztonságosan képes szállítani túlmelegedés vagy sérülés nélkül.

4.2. Órai feladatok

1. **feladat:** Mennyi a fogyasztása évente egy $P=80$ W teljesítményű hűtőszekrénynek, ha az eszköz az év minden napján üzemel? Mennyibe kerül a hűtőszekrény üzemeltetése, ha az áram ára 40 Ft/kWh?
2. **feladat:** A 4.1.a ábrán egy lakás leválasztható eleme látható (pl.: konyha). Mi történik a kiválasztott „kiskörben” folyó áram erősségével, ha a fogyasztókat egymás után kapcsoljuk be a 4.1. táblázat szerint. A vezeték ellenállását tekintjük elhanyagolhatónak. Milyen hatással van a fogyasztók egymást követő bekapcsolása a kiskör megszakítójára, amelynek névleges árama 10 A? (Megjegyzés: a feladat megoldása során egyenáramot feltételezünk!)



4.1. ábra: Egy épület egy tetszőlegesen kiválasztott fázisának egyszerűsített rajza a vezeték ellenállásának (a) elhanyagolásával, illetve annak (b) figyelembevételével.

3. **feladat:** Valójában a vezeték ellenállását nem hanyagolhatjuk el. Így a vezeték hatását egy $R'=1 \Omega$ ellenállású elágazás nélküli fogyasztóként kapcsoljuk a 2. feladatban bemutatott áramkörhöz. Az elrendezést a 4.1.b ábra mutatja. Mi történik ebben az esetben? Hogyan változtatja meg az áramkörben folyó áramerősséget, illetve a fogyasztón eső feszültségkülönbséget az előző esethez képest?

| Változó neve | <i>i.</i> fogyasztó | Fogyasztók | | | |
|-----------------------|---------------------|------------|-----|-----|----------|
| | | 1. | 2. | 3. | <i>i</i> |
| Teljesítmény | P_i [W] | 1100 | 850 | 900 | ... |
| Feszültség | U_i [V] | 230 | ? | ? | ... |
| Áramerősség | I_i [A] | ? | ? | ? | ... |
| Elektromos ellenállás | R_i [Ω] | ? | ? | ? | ... |

4.1. táblázat: Fogyasztók teljesítménye a 2. feladatban.

4. **feladat:** Hogy méretezzük a falban futó vezetékét, ha a feszültségingadozás maximum ± 1 V lehet? (Ismert paraméterek: vezeték hossza – $L=10$ m, megszakító névleges áramerőssége – $I_{max}=10$ A, rézvezeték fajlagos elektromos ellenállása – $\rho_{Cu}=0,017 \mu\Omega m$.)

5. EGYENÁRAMOK ÉS MÁGNESES MEZŐJÜK III.

KIRCHHOFF-TÖRVÉNYEK

Az Ohm-törvény érvényességét összetett áramkörökben először Gustav Kirchhoff vizsgálta. A róla elnevezett két törvény – amelyek a Maxwell-egyenletekből is származtathatók – a töltés és az energia megmaradását testesíti meg a villamosságban (Simonyi 2011). Elméletével Kirchhoff 1845-ben lefektette a hálózatelmélet alapjait, ami nélkülözhetetlen a modern elektromos hálózatok tervezéséhez és optimalizálásához. Habár eme összefüggések érvényességét eredetileg egyenáramú rendszereken bizonyította, a komplex formalizmus bevezetésével váltakozó áramú hálózatokon is alkalmazhatók. A Kirchhoff-törvények egy olyan (univerzális) matematikai modellt írnak le, ahol egy lineáris egyenletrendszer felírásával és megoldásával jutunk el az ismeretlen paraméterek meghatározásáig.

Az óra célja, hogy a hallgatók elsajátítsák egy tetszőleges egyenáramú hálózat jellemzőinek meghatározását, ahol a probléma megoldásához szükséges lineáris egyenletrendszert a Kirchhoff-törvények alkalmazásával írják fel. A hallgatók a Gauss-elimináció és a Cramer-szabály segítségével oldják meg a több ismeretlenes lineáris egyenletrendszert.

5.1. Fogalmak

- Kirchhoff I. törvénye / Huroktörvény (Budó 1991):

*Bármely független **zárt** hurokra, a hurkon belüli feszültségesések előjeles összege zérus. Független hurok: amelyek mindegyikében van olyan ágáram, amely a többi hurokban nem szerepel.*

$$\sum_i U_i = 0.$$

- Kirchhoff II. törvénye / Csomóponti törvény (Budó 1991):

*Bármely független **csomópontra**, a csomópontba be- és kifolyó áramok előjeles összege zérus. Független csomópont: amelyek mindegyikében szerepel olyan áram, amely a többiben nem szerepel. (Ha n db csomópont van egy hálózatban, akkor azok közül bármelyik $n-1$ db független.)*

$$\sum_i I_i = 0.$$

- Gauss-elimináció (Freud 2024):

Az m egyenletből álló és n ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer általános megoldása.

- Cramer-szabály (Freud 2024):

*Lineáris egyenletrendszer megoldása m egyenlet, m ismeretlen esetén (együttható mátrix determinánsa **NEM** lehet zérus).*

- Sarrus-szabály (Scharnitzky 2002):

A 3×3 -as négyzetes mátrix determinánsának meghatározásának egyik módszere.

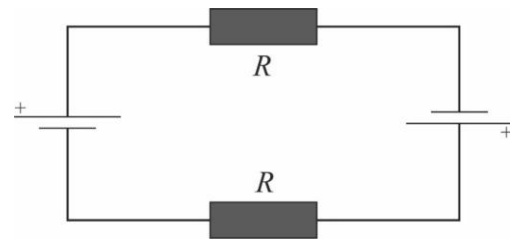
5.2. „Recept” a Kirchhoff-analízis menetére

1. Rövidzárlat, szakadás ellenőrzése.
2. Az ismeretlen irányú ágakban fel kell venni tetszőleges irányú ágáramokat, míg az ismert irányú áramoknál jelölni kell az irányokat!
3. Az ismeretlen telepeket el kell látni tetszőleges iránnyal, az ismerteknél jelöljük az irányokat.

4. Választani kell egy tetszőleges körüljárási irányt minden független hurokra.
5. Alkalmazni kell a huroktörvényt a független hurkokra, amíg ugyanannyi egyenlet lesz, mint amennyi ismeretlen.
6. Ha még mindig több az ismeretlen, mint az egyenlet, akkor a csomóponti törvényt is érdemes alkalmazni a független csomópontokra, amíg az ismeretlenek száma meg nem egyezik az egyenletek számával.
7. Az egyenletrendszer megoldhatóvá válik.
8. A kapott eredmények és azok előjelei alapján fel kell jegyezni az egyes mennyiségek értékeit és irányát is. (Ha az előjel negatív, akkor a valós áramirány az ellentettje a feltételezettnek.)

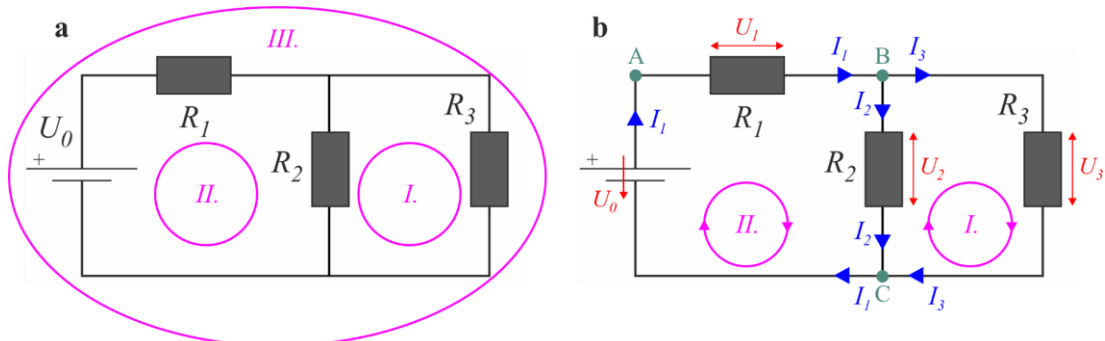
5.3. Órai feladatok

1. **feladat:** Két darab, egyenként 1,5 V-os elemet az 5.1. ábra szerinti kapcsolásban 2 db $R=5\ \Omega$ ellenállású fogyasztóra elágazás nélkül kapcsolunk. Rajzoljuk be az áramkörben folyó áram irányát! Mekkora az áramerősség? A feladatot oldjuk meg a Kirchhoff-törvények segítségével!



5.1. ábra: Az 1. feladathoz tartozó áramkör kapcsolási rajza.

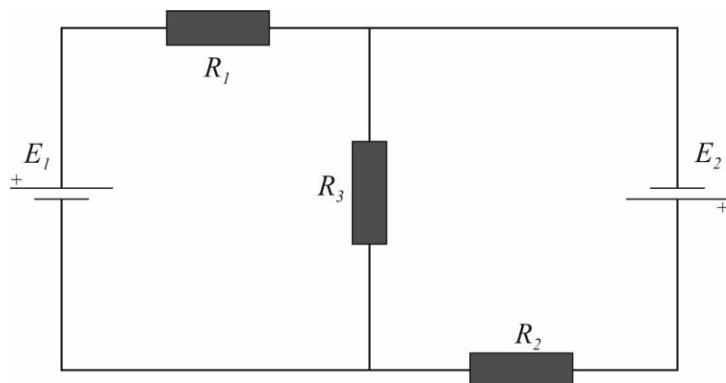
2. **feladat:** Az 5.2.a ábrán egy egyszerű hálózat látható. Határozzuk meg az R_3 ellenálláson folyó áram erősségét és irányát alkalmazva a Kirchhoff-törvényeket! Szükséges paraméterek: $U_0=10\ \text{V}$, $R_1=100\ \Omega$, $R_2=8\ \text{k}\Omega$, $R_3=4\ \text{k}\Omega$. Az 5.2.b ábra segíti a feladat megoldását!



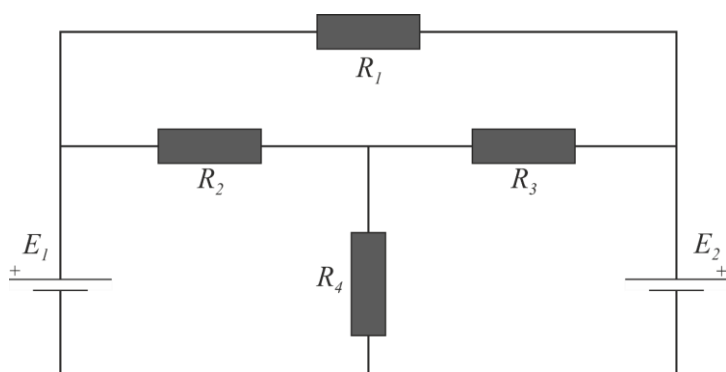
5.2. ábra: Egyszerű hálózat a Kirchhoff-törvények gyakorlásához: I, II, III. – hurkok; A, B, C – csomópontok.

5.4. Gyakorló feladatok

1. **feladat:** Az 5.3. ábrán látható összetett hálózaton az ellenállások értéke $R_1=100\ \Omega$, $R_2=150\ \Omega$, $R_3=200\ \Omega$, valamint a telepek elektromos ereje $E_1=1,5\ \text{V}$ és $E_2=2\ \text{V}$, belső ellenállásuk elhanyagolható. Határozzuk meg az R_2 ellenálláson átfolyó áram irányát és nagyságát! Mekkora teljesítménnyel fejlődik hőmennyiség az R_3 ellenálláson?
2. **feladat:** Az 5.4. ábrán látható összetett hálózaton az ellenállások értéke $R_1=80\ \Omega$, $R_2=60\ \Omega$, $R_3=50\ \Omega$, $R_4=20\ \Omega$, valamint a telepek elektromos ereje $E_1=1,2\ \text{V}$ és $E_2=2\ \text{V}$, belső ellenállásuk elhanyagolható. Határozzuk meg az R_4 ellenálláson átfolyó áram erősségét és irányát! Mekkora teljesítménnyel fejlődik hőmennyiség az R_4 ellenálláson?



5.3. ábra: Az 1. feladathoz tartozó összetett hálózat.



5.4. ábra: A 2. feladathoz tartozó összetett hálózat.

6. ELEKTROMÁGNESES INDUKCIÓ, TÖLTÖTT RÉSZECSKÉK MOZGÁSA EM TÉRBEN

NYUGALMI ÉS MOZGÁSI INDUKCIÓ,

TÖLTÖTT RÉSZECSKÉK MOZGÁSA ELEKTROMOS ÉS MÁGNESES TÉRBEN

Micheal Faraday – sok sikertelen próbálkozást követően – 1831-ben megfigyelte és leírta a kölcsönös elektromágneses indukciót a két elkülönülő áramkört tartalmazó kísérleti elrendezésében (Simonyi 2011). A jelenséget matematikai formába James Clark Maxwell öntötte hozzávetőlegesen 30 év elteltével. Ehhez Maxwell bevezette a mágneses indukció vektort, illetve megfogalmazta a Faraday-Lenz-törvényt (Maxwell II.). Azonban a mozgási indukció megértéséhez szükségünk van a klasszikus elektrodinamikát megtestesítő alapegyenletre, a Lorentz-erőre, ami egy elektromosmágneses térben \mathbf{v} sebességgel mozgó, q töltésű részecskékre ható erők eredőjét írja le (Budó 1991). Miért fontosak gyakorlati szempontból eme kísérleti megfigyelések és matematikai törvényszerűségek?

A mindennapjainkban használt elektromos eszközök működtetéséhez folyamatosan elérhető váltakozó áramú forrásra van szükség. Ezt túlnyomó többségben víz, gáz vagy gőz által meghajtott turbinák, majd a rá kötött generátorok segítségével állítják elő, amire Feynman et al. (1986b) tudományos megközelítéssel mutat be néhány elektromos ipari példát. A váltakozó áram előállításán kívül, a Lorentz-erőt olyan tudományterületek kiinduló összefüggésének tekinthetjük, ahol a töltött részecskék mozgását, illetve pályájuk paramétereit vizsgálják, például az ionoszférában (pl.: Brekke 1997), vagy a részecskegyorsítóknál (Blewett 1970).

Az óra célja, hogy a hallgatók egyszerű példákon keresztül ismerjék meg az elektromágneses indukciót, illetve a Lorentz-erő alkalmazásának fontosságát, amelyek a villamosenergia előállítása szempontjából nélkülözhetetlen törvényszerűségek. Áttekintésre javasolt irodalom: Halász et al. (2004) 160-177.

6.1. Fogalmak

6.1.1. Elektrosztatika

- Elektromos fluxus: $\varphi_E = \oint_F \mathbf{E}(\mathbf{r})d\mathbf{f}$ Vm,
- Maxwell I. egyenlet (Gauss-törvény): $\oint_F \mathbf{E}(\mathbf{r})d\mathbf{f} = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow \text{div}\mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon_0}$

6.1.2. Magnetosztatika

- Mágneses fluxus: $\varphi_B = \oint_F \mathbf{B}(\mathbf{r})d\mathbf{f}$ Vs,
- Maxwell III. egyenlet: $\oint_F \mathbf{B}(\mathbf{r})d\mathbf{f} = 0 \rightarrow \text{div}\mathbf{B} = 0.$

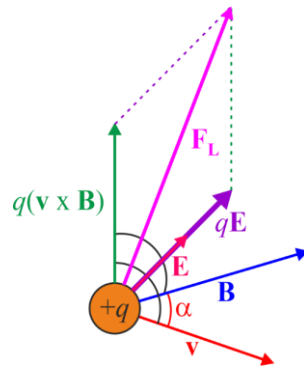
6.1.3. Lorentz-erő

$$\mathbf{F}_L(\mathbf{r}) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \quad \text{N,}$$

6.1.4. Elektromágneses indukció

- Indukált feszültség – mozgási indukció: $U_i = N \cdot |\mathbf{B}| \cdot l \cdot |\mathbf{v}|$ V.
Figyelem, az összefüggés egy speciális elrendezésre vonatkozik (ld. 2. feladat)!
- Indukált feszültség – nyugalmi indukció: $U_i = -N \frac{d\varphi_B}{dt}$ V.

Megjegyzés: a $d\varphi_B$ fluxusváltozás az N menetszámú tekercs keresztmetszetére értendő!

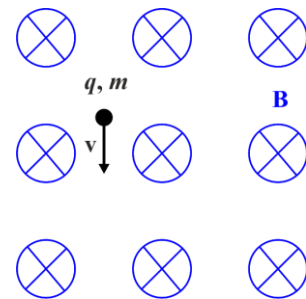


6.1. ábra: A Lorentz-erő ($\mathbf{F}_L(\mathbf{r})$), mint az m tömegű, q töltésű és $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ sebességgel haladó részecskére ható erő, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ elektromos tér és $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ mágneses indukció hatására.

➤ Nyugalmi indukció (Maxwell II. egyenlet): $\oint_l \mathbf{E}(\mathbf{r})d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_F \mathbf{B}(\mathbf{r})d\mathbf{f} \rightarrow \text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$.

6.2. Órai feladatok

1. **feladat:** A \mathbf{v} sebességgel mozgó, q elemi töltésű részecskék bekerülnek egy mágneses térbe. A mágneses teret jellemző \mathbf{B} mágneses indukcióvektor és a \mathbf{v} sebességvektor $\alpha=90^\circ$ -ot zárnak be egymással. (Az elrendezést a 6.2 ábra mutatja) Paraméterek: $q=1,67 \cdot 10^{-19}$ C, $m=1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, $|\mathbf{v}|=3 \cdot 10^8$ m/s, $|\mathbf{B}|=3 \cdot 10^{-5}$ T. (Megjegyzés, ez megegyezik a mágneses indukció abszolút értékével az Egyenlítő közelében).

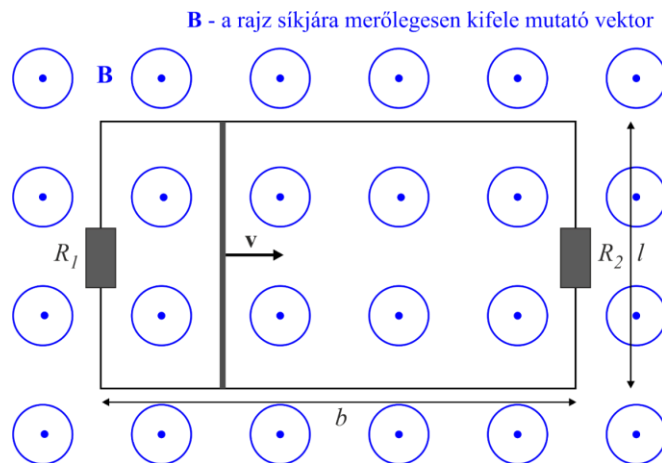


\mathbf{B} - a rajz síkjára merőlegesen befelé mutató vektor

6.2. ábra: Egyszerű elrendezés a Lorentz-erő megértéséhez (1. feladat).

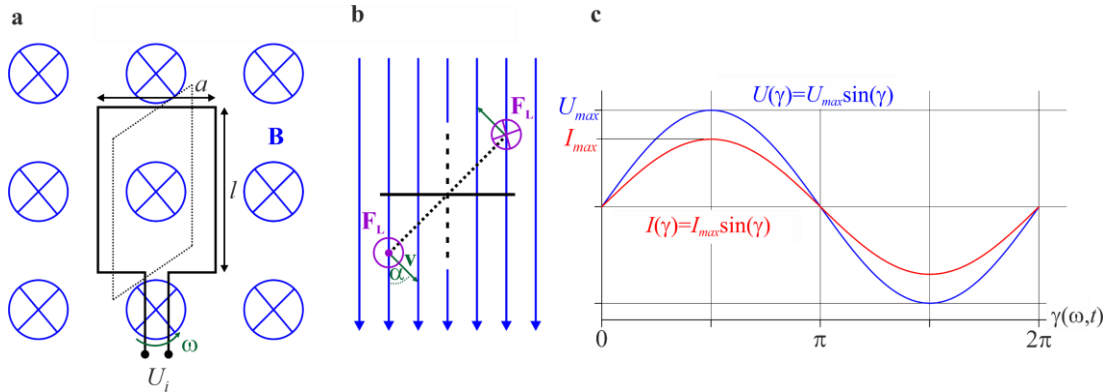
- Milyen pályán mozognak a q töltésű, m tömegű részecskék?
- Határozzuk meg a pálya és a részecskék mozgását jellemző paramétereket!

2. **feladat** A 6.3. ábrán látható téglalap alakú vezető „ l ” hosszúságú oldalainak ellenállása R_1 és R_2 , a „ b ” oldalainak ellenállása elhanyagolható. Az ellenállás nélküli oldalakat rövidre záró vezető \mathbf{v} sebességgel mozog az R_1 ellenállású vezeték szakasztól az R_2 vezeték szakasz felé. Mekkora áramerősség mérhető a mozgó vezetéken? Paraméterek: $|\mathbf{v}|=0,1$ m/s, $|\mathbf{B}|=0,1$ T, $l=10$ cm, $R_1=1 \Omega$ és $R_2=5 \Omega$.



6.3. ábra: Egyszerű elrendezés a mozgási indukció megértéséhez (2. feladat).

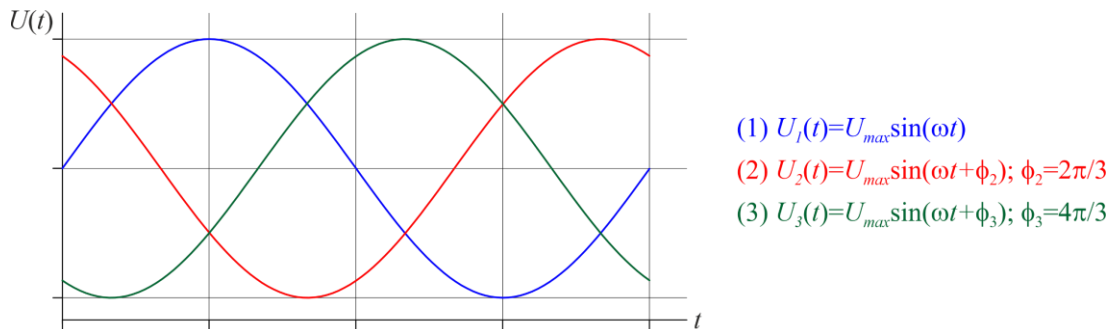
3. **feladat:** Hogyan működik egy váltakozó áramú generátor? Tegyük egy téglalap alakú drótkeretet egy \mathbf{B} homogén mágneses térbe, amelyet ω szögsebességgel forgatunk, ahogy azt a 6.4.a és b ábra illusztrálja. A vezető keretben mérjük a feszültség időbeli változását. Mit tapasztalunk (6.4.c ábra)? (Megjegyzés: $\gamma(\omega, t) = (\omega t + \phi)$ fázis, ahol ϕ a fázisszög!)



6.4. ábra: Váltakozó áramú generátor működése (a) felül- és (b) oldalnézetből, (c) a feszültség és áramerősség időbeli változása.

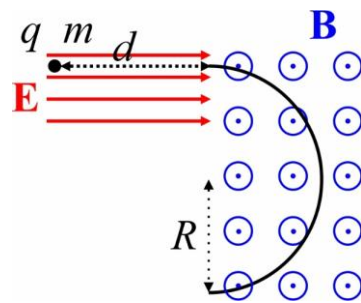
6.3. Gyakorló feladatok

1. **feladat:** Vegyük alapul az órai feladatsor 1. feladatát. Azonban most a \mathbf{v} és \mathbf{B} vektorok által bezárt szög $\alpha = 30^\circ$!
- Milyen pályán mozog a q töltésű, m tömegű részecskezen feltételek mellett?
 - Határozzuk meg a pálya és a részecske mozgását jellemző paramétereket!
2. **feladat:** Hogyan működik a háromfázisú generátor? (Segítség a 6.5. ábrán!)



6.5. ábra: A háromfázisú generátor $U(t)$ diagramja.

3. **feladat:** A kísérlet leírása a következő: q töltésű, m tömegű, kezdősebesség nélküli részecskéket \mathbf{E} elektromos térrel gyorsítunk d úton, majd egy arra merőleges \mathbf{B} mágneses térbe engedjük. (A \mathbf{B} vektor a lap síkjából kifelé mutat.) Ennek köszönhetően a töltött részecskék egy körpályán fognak tovább mozogni. Az elrendezést a 6.6. ábra mutatja! Mi a kialakuló körpályának a sugara, $R(q, m, |\mathbf{E}|, d, |\mathbf{B}|)$?



6.6. ábra: Tömegspektrométer működési elve.

7. VÁLTAKOZÓ FESZÜLTSEG ÉS ÁRAM I.

ALAPFOGALMAK

Az elektrodinamika és a mechanika alapjaira támaszkodva már le lehet írni a váltakozó feszültség előállítását, amely során egy generátorral segítségével (forgó) mechanikai munkával villamos energiát állítunk elő. A létrejövő feszültség és az áram időbeli változása, az – eddigiekben részletesen vizsgált – ohmikus ellenállástól eltérő fogyasztók kapcsolása (pl.: önindukciós tekercs, kondenzátor) egy váltakozó feszültségű áramkörbe, illetve az elektromágneses hullámterjedés vizsgálata más eszközöket kíván meg az egyenáramú hálózatokhoz képest.

Az óra célja, hogy a hallgatók megismerkedjenek a váltakozó feszültséggel jellemezhető áramkörtani elemek tulajdonságaival, illetve a hozzájuk kapcsolódó fogalmakkal. Fontos szempont, hogy a hallgatók gyakorlati példákon keresztül tudjanak kapcsolatot teremteni az egyen- és a váltakozó feszültségű hálózatok között (pl.: effektív értékek, Kirchhoff-törvények). Áttekintésre javasolt irodalom: Halász et al. (2004) 178-188.

7.1. Fogalmak

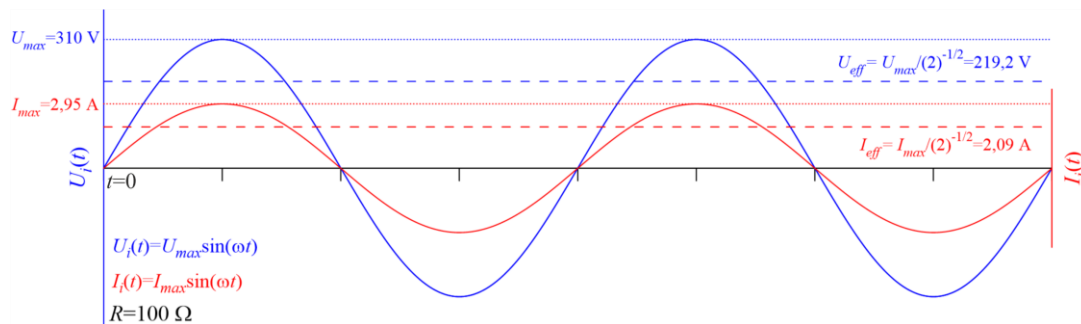
- Indukált feszültség pillanatnyi értéke: $U_i(t) = U_{max} \cdot \sin(\omega t)$ V,
 $U_{max} \left(N, \omega, \frac{a}{2}, l, |\mathbf{B}| \right)$,
- Indukált áram (ohmikus fogyasztó esetén): $I_i(t) = I_{max} \cdot \sin(\omega t) = \frac{U_{max}}{R} \cdot \sin(\omega t)$ A,
- Periódusidő: T s,
- Frekvencia: $f = \frac{1}{T}$ $\frac{1}{s} = \text{Hz}$,
- Körfrekvencia: $\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$ $\frac{1}{s} = \text{Hz}$,
- Fázis: $\gamma(t) = \omega t + \phi$ rad,
- Fázisszög: ϕ rad,
- Teljesítmény pillanatnyi értéke: $P_i(t) = U_i(t) \cdot I_i(t)$ W.
- Váltakozó feszültség (és áram) effektív értéke:

*A váltakozó feszültség effektív értéke egy olyan egyenfeszültséggel egyenlő, amelynek **hőhatása** ugyanazon ohmikus ellenállású fogyasztón, ugyanannyi idő alatt megegyezik a váltakozó feszültséggel:*

$$U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}, \quad I_{eff} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}, \quad P_{eff} = \frac{U_{max}^2}{2 \cdot R}.$$

7.2. Órai feladatok

1. **feladat:** Magyarországon a 230 V-os, 50 Hz-es hálózati feszültség csúcserkétes $U_{max} \approx 325$ V.
 - a) Mekkora az indukált feszültség pillanatnyi értéke a nullátmenettől számított $t=4$ ms időpontban?
 - b) Mekkora az indukált áram pillanatnyi értéke $t=0$ számított $t=4$ ms időpontban, ha az áramkörbe egy $R=100 \Omega$ ohmikus ellenállású fogyasztót kapcsolunk?
 - c) Számítsa ki az áramerősség csúcserékét, továbbá a feszültség és az áramerősség effektív értékét!



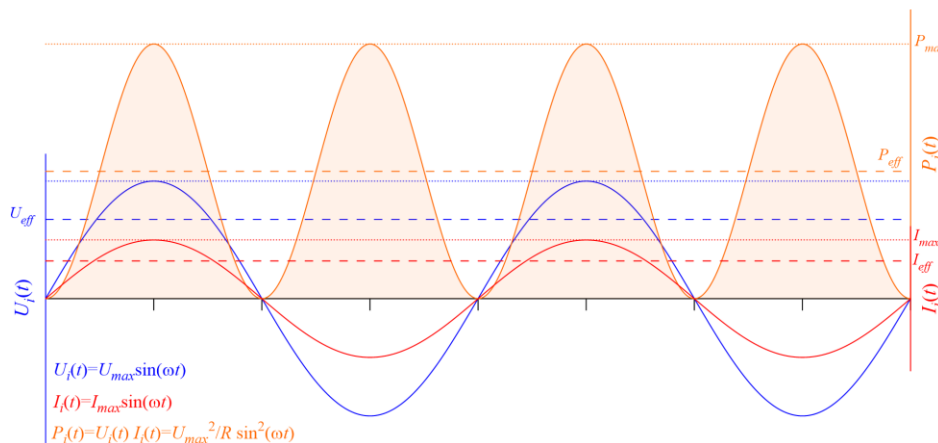
7.1. ábra: Az 1. feladat megoldása: a pillanatnyi feszültség és áramerősség a maximális és effektív értékekkel, T periódusidőre.

- d) Készítsen egy sematikus ábrát, ahol vizualizálja a következő mennyiségeket: $U_i(t)$, $I_i(t)$, U_{max} , I_{max} , U_{eff} , I_{eff} , $U_i(t=4 \text{ ms})$, T ! (A megoldást a 7.1 ábra mutatja.)

7.3. Gyakorló feladatok

1. **feladat:** A váltakozó feszültségű hálózaton egy ohmikus ellenállású fogyasztót vizsgálunk. A feszültség és az áramerősség pillanatnyi értékét a következő összefüggések adják meg t idő függvényében: $U(t) = U_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$, $I(t) = I_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$, ahol a ω körfrekvencia.

- Bizonyítsuk be a következő egyenletet: $U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$! (A megoldáshoz a 7.2. ábra ad segítséget.)
- Hazánkban a váltakozó feszültség effektív értéke 230 V, a fázis 50 Hz. Határozzuk meg a váltakozó feszültség és áramerősség maximális értékét, ha a fogyasztó ellenállása $R = 1000 \Omega$, majd számítsuk ki az áramerősség effektív értékét is!
- Készítsünk egy ábrát egy teljes $T = 0 - 4\pi$ periódusra, ahol megjelenítjük a pillanatnyi feszültséget, áramerősséget, a maximális és az effektív feszültséget!



7.2. ábra: A feszültség, az áramerősség és a teljesítmény időbeli változása ohmikus ellenállású fogyasztó esetén.

8. VÁLTAKOZÓ FESZÜLTSEG ÉS ÁRAM II.

ÖSSZETETT HÁLÓZATI ELEMEK VISELKEDÉSE, KOMPLEX FORMALIZMUS, REZGŐKÖR, ELEKTROMÁGNESES REZGÉSEK

A Maxwell-egyenletek mind a sztatikus, mind az időfüggő elektromos (és elektromágneses) jelenségeket leírják. Ha a vizsgált rendszerek lineárisnak tekinthetők (pl.: vákuumban), illetve a fizikai mennyiségek – jelen esetben a feszültség és az áramerősség – időbeli változása szinuszos vagy koszinuszos függvénnyel írható el, a matematikai leírás során érdemes komplex formalizmust alkalmazni a trigonometrikus összefüggések helyett. Kétségtelen, hogy így a matematikai eszköztár megváltozik, azonban egy áramkört elemes feszültség és az átfolyó áramerősség arányosságát továbbra is az Ohm-törvény definiálja. Az arányossági tényezőt impedanciának hívjuk, ami a továbbiakban kifejezi a feszültség és az áramerősség közötti (fázis-) időbeli eltolás mértékét is. (Komplex formalizmus alkalmazása esetén a fázistolás szorzással érthető el, és összeadáskor a fáziseltérés figyelembe vehető.)

Az „új” formalizmus bevezetésének számos előnye van: (1) a Kirchhoff-törvények váltakozó áramú áramkörben is érvényesek maradnak (Budó 1991); (2) az RLC összetett áramkört elemek (pl.: szűrők) viselkedése leírhatóvá válik (Feynman et al. 1986b); (3) az elektromágneses rezgések és a harmonikus rezgőmozgások közötti hasonlóságok azonosíthatóvá válnak (Tasnádi et al. 2004). Eme témakörök kiemelten fontosnak tekinthetők a földtudomány azon ágaiban, ahol elektromos kapcsolások segítségével megvalósítható modellszámításokkal (pl.: mélyfúrás geofizika), „egyszerűen” elektromágneses hullámterjedéssel vagy jelfeldolgozással foglalkoznak (pl.: szeizmikus hullámterjedés).

Az óra célja, hogy a hallgatók megismerkedjenek az összetett hálózati elemek viselkedésével, illetve megértsék a komplex formalizmusban alkalmazott kifejezések valós értelmét. Kiemelt fontosságú, hogy a hallgatók gyakorlati példákon keresztül találjanak analógiát a harmonikus rezgőmozgást végző mechanikai rendszerek, az RLC összetett áramkörök között, illetve az elektromágneses hullámterjedés között. Áttekintésre javasolt irodalom: Halász et al. (2004) 189-194.

8.1. Fogalmak

8.1.1. Összetett hálózati elemek viselkedése

- Ohmikus ellenállású fogyasztó esetén:
$$U_R(t) = U_{max} \cdot \sin(\omega t), \quad [V],$$
$$I_R(t) = \frac{U_{max}}{R} \cdot \sin(\omega t + \Phi_R), \quad [A],$$
$$\Phi_R = 0. \quad [\text{rad}].$$

Nincs fáziskülönbség $U_R(t)$ és $I_R(t)$ között (8.1a ábra)!

- Induktív ellenállású fogyasztó esetén:
$$I_L(t) = I_{max} \cdot \sin(\omega t),$$
$$U_L(t) = L \cdot \omega \cdot I_{max} \cdot \cos(\omega t) =$$
$$= L \cdot \omega \cdot I_{max} \cdot \sin(\omega t + \Phi_L),$$
$$\Phi_L = \frac{\pi}{2}.$$

Mi történik? A kondenzátor nem stacionárius helyzetben, időben gyűjti (vagy kibocsátja) a beérkező töltéseket. Tehát a feszültség az áram integráljával írható fel. Harmonikus függvényeknél az integrálás 90° -os fázistolást okoz (és körfrekvenciával való osztást).

A feszültség $\Phi_L = \frac{\pi}{2}$ -vel **siet** az áramhoz képest (8.1b ábra)!

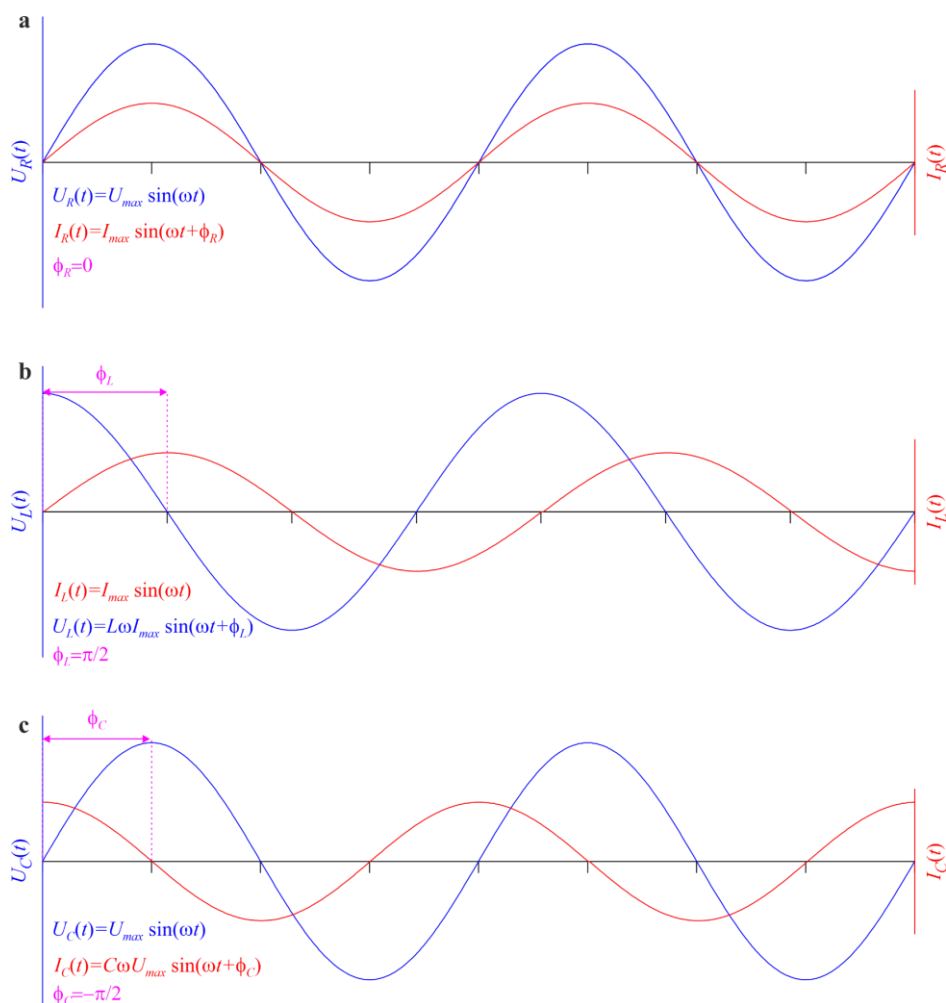
- Kapacitív ellenállású fogyasztó esetén: $U_C(t) = U_{max} \cdot \sin(\omega t)$,
 $I_C(t) = C \cdot \omega \cdot U_{max} \cdot \cos(\omega t) =$
 $= C \cdot \omega \cdot U_{max} \cdot \sin(\omega t + \Phi_C)$,
 $\Phi_C = -\frac{\pi}{2}$.

Mi történik? A tekercsen az indukció miatt kialakuló visszahatás az indukció jellege miatt deriválással származtatható, amely 90 -os fázistolást okoz (és körfrekvenciával való szorzást).

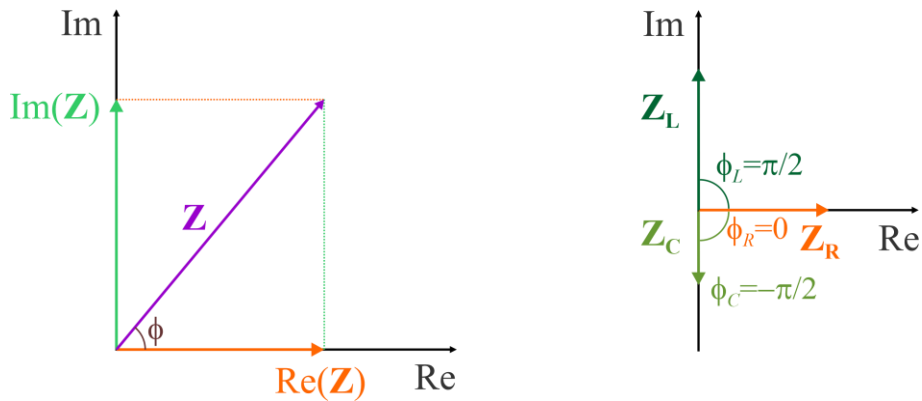
A feszültség $\Phi_C = -\frac{\pi}{2}$ -vel **késik** az áramhoz képest (8.1c ábra)!

8.1.2. Komplex formalizmus

- Impedancia: $Z = \frac{U}{I} \rightarrow \mathbf{Z} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}}$ [Ω].
- Ohmikus ellenállású fogyasztón: $Z_R = X_R \rightarrow \mathbf{Z}_R = R$,
 - Induktív ellenállású fogyasztón: $Z_L = L \cdot \omega = X_L \rightarrow \mathbf{Z}_L = i \cdot X_L$,
 - Kapacitív ellenállású fogyasztón: $Z_C = \frac{1}{C \cdot \omega} = X_C \rightarrow \mathbf{Z}_C = \frac{X_C}{i}$.



8.1. ábra: A feszültség és áramerősség időbeli változása (a) ohmikus, (b) induktív (tekercs), (c) kapacitív (kondenzátor) ellenállású fogyasztó esetén, a kialakuló fáziskülönbségekkel.



8.2. ábra: A Z impedancia számításának megjelenítése a komplex számsíkon.

➤ Komplex formalizmus ekvivalens formái (8.2 ábra):

- Valós-képzetes rész: $Z = \text{Re}(Z) + i \cdot \text{Im}(Z) = Z_h + i \cdot Z_m$,
- Hatásos impedancia: $Z_h = \text{Re}(Z)$,
- Meddő impedancia: $Z_m = \text{Im}(Z)$.

○ Trigonometrikus alak: $Z = |Z|\cos\Phi + i \cdot |Z|\sin\Phi$,

- Látszólagos impedancia: $Z_l = |Z| = \sqrt{\text{Re}(Z)^2 + \text{Im}(Z)^2} = \sqrt{Z_h^2 + Z_m^2}$,

- Fáziskülönbség: $\Phi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)}\right) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{Z_m}{Z_h}\right)$,

○ Euler-alak: $Z = |Z|e^{i\Phi}$, ahol $e^{i\Phi} = \cos\Phi + i \cdot \sin\Phi$.

➤ Példa a pillanatnyi feszültség komplex leírására:

○ Korábban: $U(t) = U_{max} \cdot \cos(\omega t + \Phi)$,

○ Komplex trigonometrikus alakban: $\mathbf{U} = U_{max} \cdot \cos(\omega t + \Phi) + i \cdot U_{max} \cdot \sin(\omega t + \Phi)$,

○ Euler-alakban: $\mathbf{U} = U_{max} e^{i(\omega t + \Phi)}$.

➤ Kiegészítő gondolatok:

Geofizikai mérések esetében a fázis a harmonikus gerjesztő térhez képest értendő. Például, a kőzetből érkező jelet pont a fáziskülönbség miatt lehet elkülöníteni. A tekercs és a kondenzátor válasza pedig függ a frekvenciától!

8.2. Órai feladatok

1. **feladat:** Végezzünk el egy kísérletet! Rendelkezünk egy olyan egyenáramú feszültségforrással rendelkező áramkörrel, amelyben csak egy izzó van. Az áramkörben van egy kapcsoló, amely eredetileg megszakítja az áramkört, így az izzó kezdetben nem világít. A pillanatnyi feszültséget a következő függvény írja le: $U(t) = U_{max} \cdot \sin(\omega t)$.

- a) Kössünk egy ohmikus ellenállású fogyasztót elágazás nélkül az izzó elé és zárjuk az áramkört. Hogy változik időben a feszültség és az áramerősség pillanatnyi értéke?
- b) Szakítsuk meg az áramkört és az ohmikus fogyasztót cseréljük ki egy vasmagos tekercsre, majd zárjuk az áramkört. A vasmagos tekercs önindukciós együtthatója L . Mit

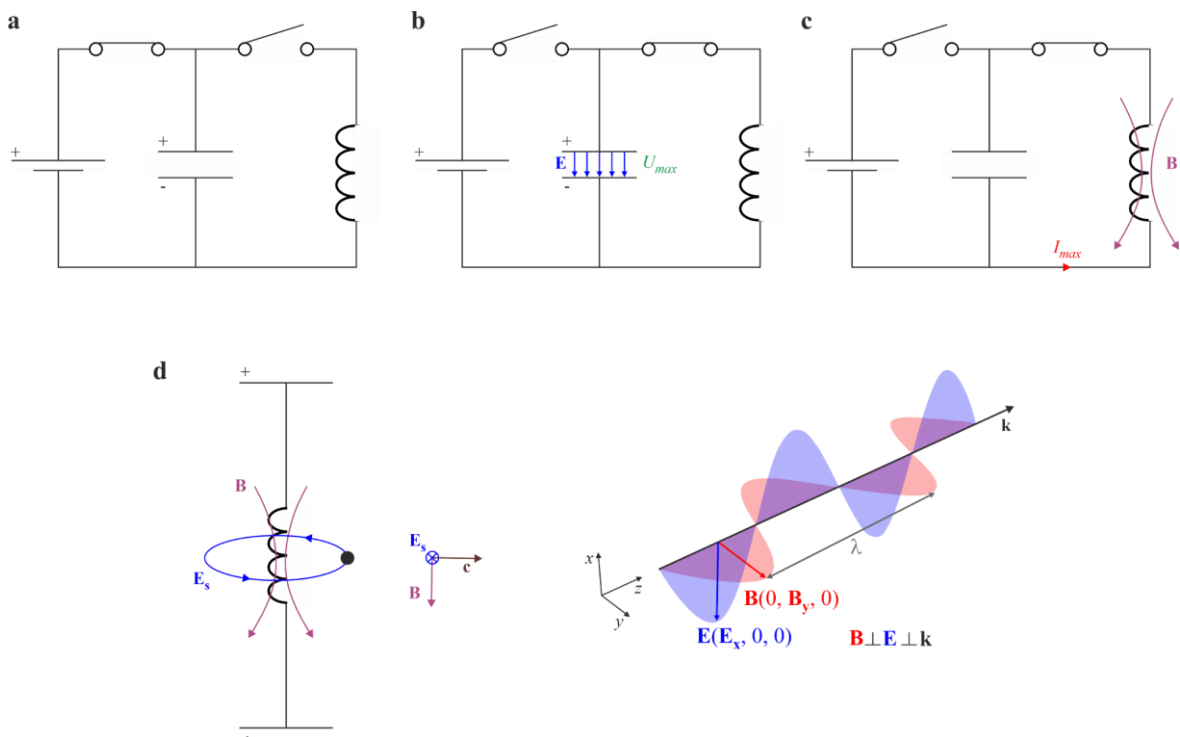
tapasztalunk? Mi változik az előző esethez képest? Válaszunkat támasszuk alá számítással!
(A megoldást a 8.1.b ábra szemlélteti.)

c) Definiáljuk az ideális tekercshez tartozó impedanciát (Z_L) és induktív ellenállást (X_L)!

2. **feladat:** Vizsgáljuk meg egy párhuzamosan csatolt LC rezgőkör működését (8.3.a-d ábra)!

a) A kísérlet első lépéseként a kondenzátort kapcsoljuk egy egyenáramú telephez és töltjük fel (8.3.a ábra), majd szakítsuk meg ezt az áramkört. A feltöltött kondenzátort párhuzamosan csatlakoztassuk egy tekercshez (8.3.b-c ábra). Mi történik? Milyen két helyzetet szemléltet a 8.3.b és 8.3.c ábra?

b) A zárt LC rezgőkörben elhelyezett kondenzátor lemezeit távolítsuk el egymástól, ahogy azt a 8.3.d ábra mutatja! Mi történik egy ilyen nyitott LC rezgőkör környezetében?



8.3. ábra: (a-c) A párhuzamosan csatolt zárt LC rezgőkör működése, (d) a nyitott LC rezgőkör és az elektromágneses hullámterjedés kapcsolata.

8.3. Gyakorló feladatok

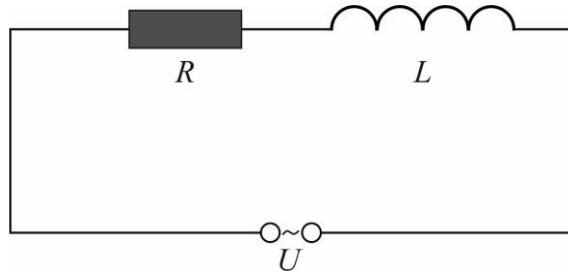
1. **feladat:** Egy C kapacitású ideális kondenzátort kössünk rá egy $U_C(t) = U_{max} \cdot \sin(\omega t)$ váltakozó feszültségforrással jellemezhető áramkörre.

- Határozzuk meg a kondenzátoron átfolyó áramerősség pillanatnyi értékét!
- Milyen a kondenzátoron mérhető eső pillanatnyi feszültség és az átfolyó áramerősség viszonya? (A megoldást a 8.1.c ábra szemlélteti.)
- Definiáljuk az ideális kondenzátorhoz tartozó impedanciát (Z_C) és induktív ellenállást (X_C)!
- Készítsünk egy ábrát egy teljes $T=0-2\pi$ periódusra. Jelenítsük meg a pillanatnyi feszültséget, áramerősséget, ezek maximális és az effektív értékét, illetve a fáziskülönbséget!

2. **feladat:** A 8.4 ábrán egy elágazás nélküli RL áramkör látható. Az R fogyasztó ohmikus ellenállása 50Ω , míg az ideális tekercs önindukciós együtthatója $L=0,5 \text{ H}$. A hálózaton 230 V -os, 50 Hz

frekvenciával időben \cos függvény szerint váltakozó feszültség van. Oldja meg a következő részfeladatokat:

- Fejezze ki az áramkör komplex (eredő) impedanciáját! Nevezze meg a határos, illetve a meddő ellenállást, mint a komplex impedancia tagjait!
- Számítsa ki az áramkört jellemző látszólagos ellenállást!
- Mekkora az áramkörben folyó áram effektív értéke; mekkora az R fogyasztón és az L



8.4. ábra: A 2. feladatban vizsgált elágazás nélküli RL összetett hálózat egyszerűsített kapcsolási rajza.

ideális tekercsen eső feszültség effektív értéke?

- Ellenőrizze le a következő – az elágazás nélküli áramköröknél alkalmazható – egyenlet érvényességét: $U_{eff} = U_{Reff} + U_{Leff}$. Mit tapasztal?
- Mekkora a feszültség és az áram közötti fáziskülönbség?

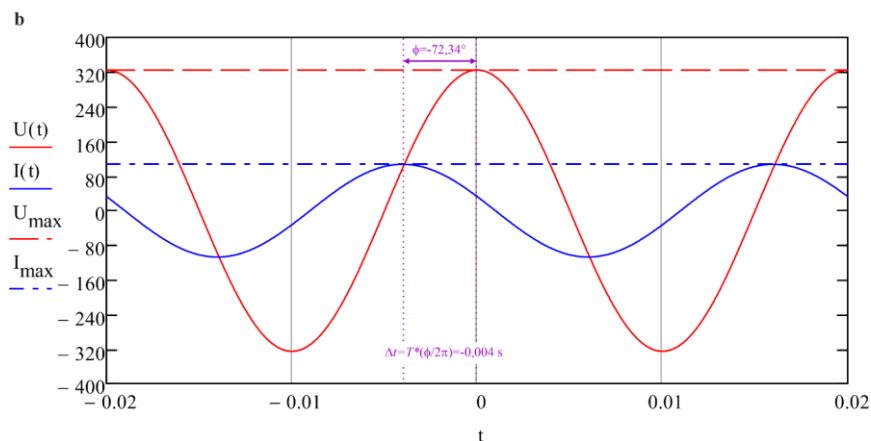
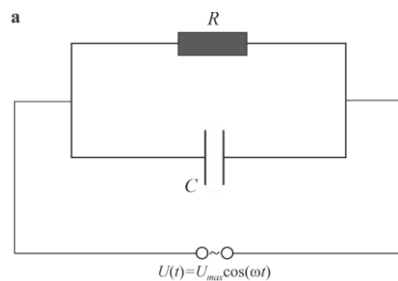
9. VÁLTAKOZÓ FESZÜLTSEG ÉS ÁRAM III.

PÁRHUZAMOS RC ÖSSZETETT HÁLÓZAT VIZSGÁLATA

Az óra célja, hogy a hallgatók megvizsgálják egy párhuzamosan csatolt RC összetett hálózat viselkedését.

9.1. Órai feladatok

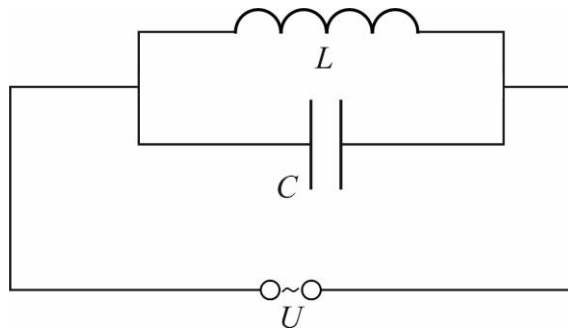
1. **feladat:** A 9.1.a ábrán látható módon, rendelkezünk egy párhuzamosan kapcsolt RC összetett hálózattal. Az ohmikus fogyasztó ellenállása $R=100\ \Omega$, a kondenzátor kapacitása $C=100\ \mu\text{F}$. A hálózaton 230 V-os 50 Hz frekvenciával, időben koszinuszosan változó feszültséget mérhetünk $U(t) \sim \cdot \cos(\omega t)$.
 - a) Határozzuk meg az áramkör eredő, komplex impedanciáját! Szeparáljuk a komplex impedancia valós (hatásos ellenállás), illetve képzetes (meddő ellenállás) részét!
 - b) Vizsgáljuk meg az áramkört! Adjuk meg "szögfüggvényes" alakban a főágban folyó áram időbeli változását, $I(t)$ -t! (Az eredményt 9.1.b ábra mutatja.)
 - c) Határozzuk meg a látszólagos impedanciát!
 - d) Mekkora a főágban folyó áram effektív értékét!
 - e) Mekkora az ohmikus ellenállású fogyasztón, valamint a kondenzátoron átfolyó áram effektív értéke?
 - f) Milyen matematikai kapcsolat van a főágban mérhető áram, illetve a mellékágakban folyó áramerősség között?
 - g) Számítsuk ki a feszültség és az áramerősség maximális értékét!
 - h) Mekkora a feszültség és az áram közötti fáziskülönbség? Értelmezzük az eredményt a 9.1.b ábra segítségével!



9.1. ábra: (a) Az 1. feladatban vizsgált párhuzamosan kapcsolt RC összetett hálózat egyszerűsített kapcsolási rajza (b) a feszültség és az áramerősség időbeli változásával és azok fáziskülönbségével.

9.2. Gyakorló feladatok

1. **feladat** A 9.2. ábrán egy párhuzamosan kapcsolt LC áramkör látható. A kondenzátor kapacitása $C=1,27 \mu\text{F}$, míg az ideális tekercs önindukciós együtthatója $L=0,1 \text{ H}$. Mind a tekercs, mind a kondenzátor sarkain $U(t) = U_{max} \cdot \cos(\omega t)$ a pillanatnyi feszültség, $U_{eff}=230 \text{ V}$, $f=1 \text{ kHz}$. Oldja meg a következő részfeladatokat.
- Vizsgáljuk meg az áramkört! Adjuk meg szögfüggvényes alakban a főágban folyó áram időbeli változását.
 - Határozzuk meg a kondenzátor pillanatnyi áramát az idő függvényében.
 - Fejezzük ki az áramkör komplex (eredő) impedanciáját.
 - Mit tapasztalunk, ha a 9.2. ábrán bemutatott áramkörben $(\omega^2 LC) \ll 1$ lenne?



9.2. ábra: Az 1. feladatban vizsgált párhuzamos LC összetett hálózategyszerűsített kapcsolási rajza.

2. **feladat** Tegyük fel, hogy a 9.2. ábrán bemutatott áramkörben a kondenzátor kapacitása változtatható.
- Határozzuk meg a főágban folyó áram pillanatnyi értékét az idő függvényében, az előző feladat paramétereit felhasználva!
 - Az áramkör főágába bekötünk egy áramerősség mérőt. Mely értékre kell beállítanunk a kondenzátor kapacitását, hogy az áramerősség mérő $I_{eff}=0 \text{ A}$ értéket jelezzon? (Megjegyzés: Az áramerősség effektív értéke akkor zérus, ha a csúcserősség, tehát $I_{max}=0 \text{ A}$.)

10. OPTIKA I.

HULLÁMOPTIKA ALAPJAI, FERMAT-ELV

Hogyan kapcsolódik az optika az elektromágneses hullámterjedéshez? Napjainkban a válasz magától értetődő, a fény hullámtermészete miatt. Hiszen, a látható fény az elektromágneses spektrum 380 nm és 750 nm hullámhosszú tartományán helyezkedik el.

Manapság valóban tényszerűnek tűnik a fény hullámszerű viselkedése, azonban ezt a „sziklaszilárd” megállapítást (is) sok-sok év munkája előzte meg, miután az 1800-as évek végén Henrich Hertz kísérletileg bizonyította az elektromágneses hullámok és a fény(hullámok) egyezőségét (Simonyi 2011). A Maxwell-egyenletrendszer segítségével mind az elektromos, mind a mágneses térre felírható a hullámegyenlet, amelynek megoldási módszerét (pl.: monokromatikus síkhullám) és a hozzátartozó peremfeltételeket maga a vizsgált probléma jelöli ki. Különösen olyan esetekben válik érdekessé a fény hullámtermészete, amikor (1) több irányból érkező hullám találkozásakor megfigyelhető jelenségeket (pl.: interferenciát) vizsgálunk, (2) a fényforrás útjába olyan tárgyat (pl.: optikai rácst) helyezünk, amelynek geometria paraméterei összemérhetők a fény hullámhosszával (következmények pl.: diffrakció, fényszóródás), vagy (3) a fény terjedését valamelyik térerőkomponens irányával szeretnénk korlátozni (pl.: polarizáció) (Feynman et al.1985).

Azonban a fény viselkedését először nem a hullámtermészet oldaláról közelítették meg. A geometriai optika (bővebben ld. 11. Optika II.) törvényeit megfogalmazva vizsgálták az optikai rendszerek (pl.: lencsék, tükrök) működését, a fénysugarak terjedését, törését, visszaverődését. A két felület határán létrejövő törést Willebord von Roijen Snellius és René Descartes kísérleteken nyugvó mechanikai háttérrel magyaráztak, amit Pierre de Fermat (sem) tartott elégségesnek (Simonyi 2011). A törési törvényt Fermat egy általánosabb megközelítéssel, a variációszámítással – pontosabban egy szélsőérték-probléma felírásával – oldotta meg 1662-ben. A Fermat-elv valójában azt az útvonalat (optikai úthosszt) definiálja, amit a fény két pont között a legrövidebb idő alatt tesz meg (Feynman et al. 1985). Szokatlannak tűnhet, ám ez a tézis köti össze a hullám- és a geometriai optikát.

Természetesen az elektromágneses hullámterjedés (fény) viselkedésének vizsgálatát folytatták. Olyan fényelektromos jelenségek vizsgálatával, amelyek nem magyarázhatók a fény hullámtermészetével, Einstein bevezette fotonok (elemi részecsek) fogalmát...

Az óra célja, hogy a hallgatók megismerkedjenek a Maxwell-egyenletekből levezethető hullámegyenlet formájával és annak monokromatikus síkhullám megoldásával. Továbbá, fontos cél, hogy a hallgatók egy egyszerű gyakorlati példán keresztül értsék meg a Fermat-elv jelentőségét. Áttekintésre javasolt irodalom: Halász et al. (2004) 195-201.

10.1. Fogalmak

10.1.1. Hullámoptika alapjai

➤ Maxwell egyenletek:

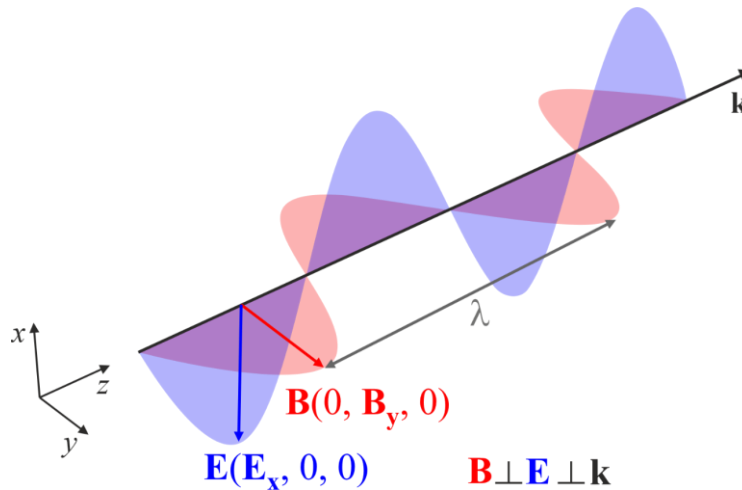
○ M2: $\text{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$, ahol $\mathbf{B} = \mu_r\mu_0\mathbf{H}$, $\mu = \mu_r\mu_0$,

○ M4: $\text{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$, ahol $\mathbf{D} = \varepsilon_r\varepsilon_0\mathbf{E}$, $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$.

➤ A levezetett homogén hullámegyenlet \mathbf{E} -re és \mathbf{H} -ra:

○ M2: $\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}$,

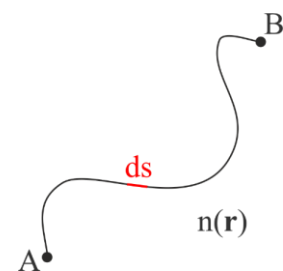
- M4: $\Delta \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}$.
- Általános homogén hullámegyenlet alakja tetszőleges „ \mathbf{u} ” térre
 - $\Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}$, ahol v a hullám terjedési sebessége
 - $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$, vákuumban $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8$ m/s
- Monokromatikus síkhullám-megoldás:
 - $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{E}_x(\mathbf{r}, t) = E_{x0} \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) \Rightarrow \mathbf{E}_x = E_{x0} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$,
 - $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ H_y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{H}_y(\mathbf{r}, t) = H_{y0} \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) \Rightarrow \mathbf{H}_y = H_{y0} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$,
 - \mathbf{E} és \mathbf{B} merőlegesek egymásra, jobb sodrású rendszert alkotva az EM-hullám terjedési iránya (\mathbf{k}) mind \mathbf{E} -re, mind \mathbf{H} -ra merőleges, ezért tranzverzális hullám (10.1 ábra).



10.1. ábra: Elektromágneses hullám terjedése.

10.1.2. Fermat-elv

- Pontatlan, de szemléletes definíció: *A „fény sugar” két pont között azon az úton halad, amelyet a legrövidebb idő alatt tud megtenni.*
- Tehát a fény sugar A és B pont között, az $n(\mathbf{r})$ törésmutatójú izotróp közegben úgy terjed, hogy az út megtétele a legrövidebb idő legyen. Ezt optika úthossznak (OPL) nevezzük, a megoldás során a függvény szélsőértékét keressük (10.2 ábra).



10.2. ábra: Optikai úthossz.

- $OPL = \int_A^B n(\mathbf{r}) ds = \int_A^B \frac{c_0}{c(\mathbf{r})} ds = c_0 \int_A^B dt = \text{szélső érték!}$
- A Fermat-elv összeköti a geometriai optikát és a hullámoptikát; alkalmazásával minden geometriai optikában használt törvény (pl.: törési törvény, visszaverődés stb.) levezethető.

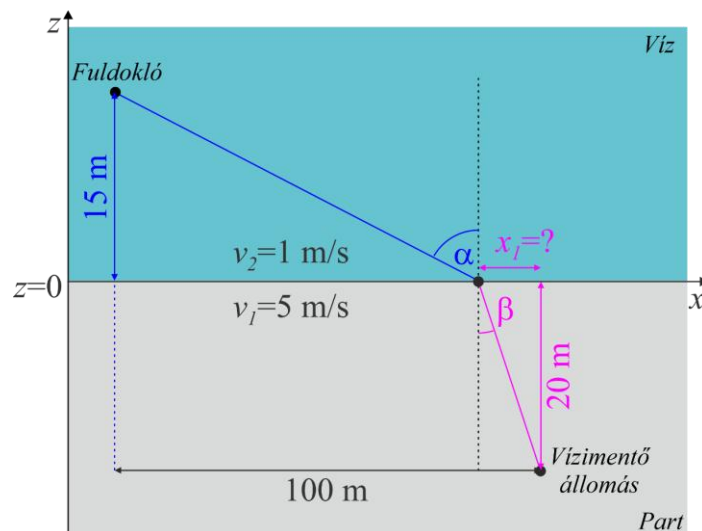
10.2. Órai feladatok

1. **feladat:** Egy $n=3/2$ törésmutatójú közegben egy elektromágneses hullám „elektromos térerősség komponense” a következő (síkhullám megoldás) függvényvel írható le:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t), \text{ ahol } \mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{k} = K \begin{pmatrix} 2x \\ ay \\ -6z \end{pmatrix}, K = 6\pi \cdot 10^5 \frac{1}{\text{m}}.$$

Válaszoljunk a következő kérdésekre!

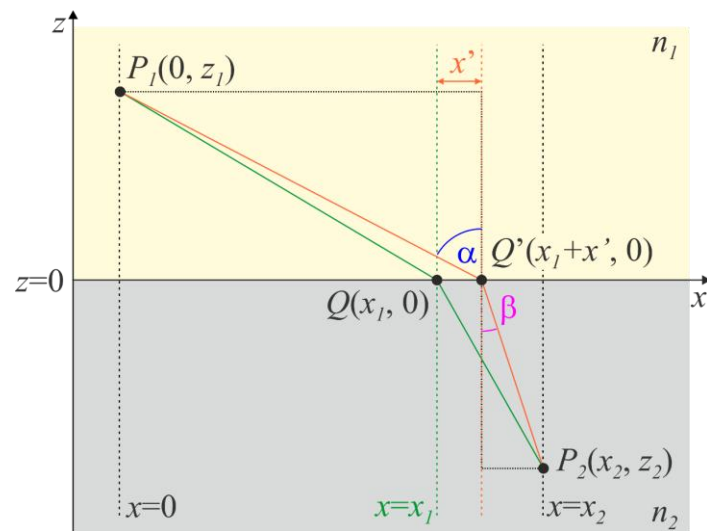
- Mekkora „a” értéke?
 - Mi a hullámszám-vektor iránya és nagysága?
 - Mi a vizsgált elektromágneses hullám hullámhossza az n törésmutatójú közegben és vákuumban?
 - Mi a \mathbf{B} mágneses indukció (vagy \mathbf{H} mágneses tér) rezgés iránya?
2. **feladat:** A Balaton parti idillt egy vízben fulladozó turista töri meg. Egy vízimentő a partról azonnal észreveszi az esetet, gyorsan magához veszik a felszerelést, és elkezd futni a szerencsétlenül járt ember felé... Milyen útvonalon kell futnia a vízimentőnek, hogy a lehető leggyorsabban tegye meg a távolságot az állomás és a fulladozó között? A helyzetet a 10.3. ábra szemlélteti. A számításhoz szükséges paraméterek: $z_1=20$ m, $z_2=15$ m, $x=100$ m, $v_1=5$ m/s (sebesség), $v_2=1$ m/s.



10.3. ábra: Fulladozó turista mentése a „legrövidebb” elérési idő alkalmazásával.

10.3. Gyakorló feladatok

- feladat:** A Fermat-elv segítségével vezesse le a Snellius-Descartes-féle törési törvényt! (Segítség a 10.4. ábrán!)



10.4. ábra: A Snellius-Descartes-féle törési törvény bizonyítása a Fermat-elv alkalmazásával.

11. OPTIKA II.

GEOMETRIAI OPTIKA, MÁTRIX OPTIKA

A geometriai optika figyelmen kívül hagyja a fény hullám vagy részecske természetét, kizárólag a fénysugár útját követi a homogén közegbeli szabad terjedés, a különböző felületeken való törés, és a visszaverődés egyszerű törvényszerűségeit kihasználva. Edmond Halley zárta azt a korszakot, amelynek végén megfogalmazták a geometriai optikai alapjait (Simonyi 2011). Így az 1700-as évek elejére kialakuló módszertant alkalmazva, szinte középiskolai szintű matematikai ismeretekkel, közelítőleg meg lehetett tervezni összetett optikai rendszereket.

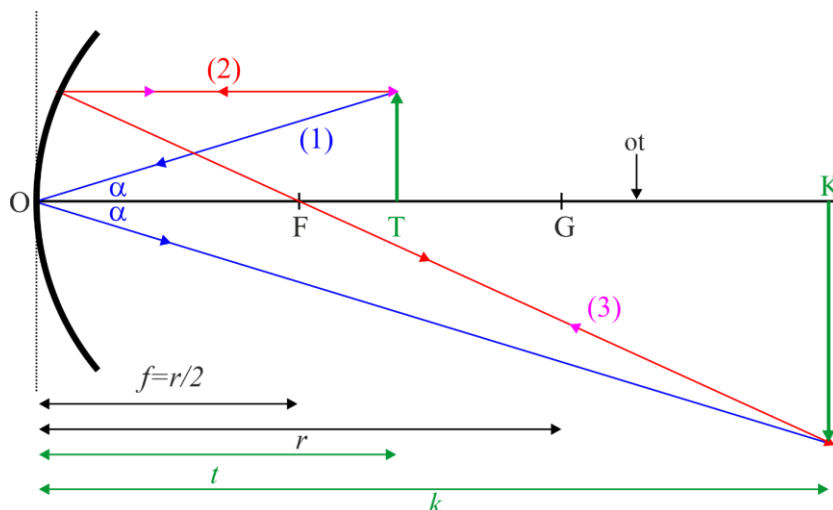
Viszont maga a nevezetes sugárátmenetek szerkesztése nagy hibával terheli a feladatok megoldását. Sőt, a módszer kis skálájú problémák (pl.: lencsehibák) vizsgálatára alkalmatlan (Feynman et al. 1985). Az előbbi kérdéskör egy matematikai formalizmus használatával kiküszöbölhető, mert speciális körülményeket előírva (paraxiális közelítés) a leképezés előtti, majd utáni távolságok és szögek között kapcsolatok lineáris transzformációkkal írhatók le. Tehát, az optikai rendszer viselkedése transzformációs mátrix(ok) segítségével is felírható. A második kérdéskör tisztázásához az „újonnan” bevezetett formalizmus és a hullámoptika együttes alkalmazása nyújt segítséget, például a Jones-féle és a Stokes-féle mátrixok definiálása (Chartier 2005).

Az óra célja, hogy a hallgatók – átismételve a geometriai optika középiskolai részeit – megismerkedjenek a mátrix optikai alapjaival. Áttekintésre javasolt irodalom: Halász et al. (2004) 202-210.

11.1. Fogalmak

11.1.1. Geometriai optika alapjai:

- A geometria optika alkalmazásának alapvető feltételezése, hogy **az optikai rendszer minden releváns mérete** (pl.: fókusz-, tárgy-, képtávolság, lencse mérete, stb.) **sokkal nagyobb, mint a fény hullámhossza!**
- A geometriai optika fénysugarak szerkesztésével adja meg az optikai leképezést, így figyelmen kívül hagyja a fény mind hullám, mind részecske természetét.
- Optikai eszközök:
 - Síktükör,
 - Gömbtükör,
 - Lencsék (lencserendszerek).
- Nevezetes sugárátmenetek homorú gömbtükör esetén (11.1. ábra):
 - 1) Az optikai középpontba érkező fénysugarak az optika tengellyel szimmetrikusan verődnek vissza (kék).
 - 2) Az optikai tengellyel párhuzamos fénysugarak az **F** fókuszpontban metszik egymást (vörös).
 - 3) A 2) pontban leírt irány fordítottja (magenta).
- Leképezésre vonatkozó törvények.
 - Távolságtörvény:
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k},$$



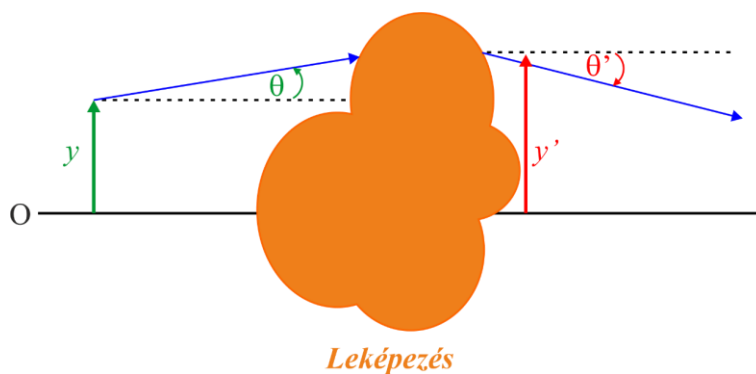
11.1. ábra: Nevezetes sugármenetek humorú gömbtükör esetén. Jelölés: „O” – optikai középpont, „ot” – optikai tengely, „G” – geometriai középpont, „F” – fókuszpont, „f” fókusz távolság, „r” – görbületi sugár, „T” – tárgy, „K” – kép, „t” – tárgy távolság, „k” – képtávolság.

- Kép-tárgy nagyság vs. távolság arányok: $\frac{K}{T} = \frac{k}{t}$,
- Gömbtükör fókuszpontja: $f = \frac{r}{2}$,
- Dioptria: $D = \frac{1}{f}$.

➤ **Probléma a módszerrel: összetett lencserendszerek leképezésének szerkesztése bonyolultabb, sőt pontatlan megoldást eredményez!**

11.1.2. Mátrix optika paraxiális közelítésben:

- Definíció(k):
 - Az optika rendszer hengersizmetrikusnak tekinthető.
 - A leképezés az optikai tengely közelében történik. Tehát maga az optikai rendszer tengelyközeli (paraxiális), ahol bármilyen mért távolság sokkal kisebb, mint a rendszerre jellemző méretei (f, t, k)! Ennek értelmében, a vizsgált fénysugarak az optikai tengellyel kis szöget zárnak be: $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$.

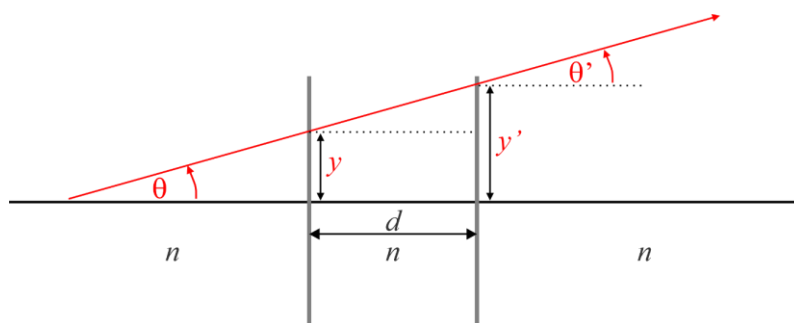


11.2. ábra: Leképezés leírása mátrix optika segítségével. Jelölés: „y” – a fénysugár optikai tengelytől mért távolsága, „θ” – a fénysugár optikai tengellyel bezárt szöge, „y'” és „θ'” – a leképezés utáni értékek. (Megjegyzés: a távolságok és a szögek előjeles mennyiségek.)

- Homogén lineáris transzformáció: $\begin{bmatrix} y' \\ n' \cdot \theta' \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} y \\ n \cdot \theta \end{bmatrix}$.
- Tetszőleges paraxiális optika rendszer „építőelemeinek mátrixai:
 - Szabad terjedés mátrixa: $\mathbf{M}_{sz} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ahol d az n törésmutatójú közegben megtett távolság,
 - Törés gömbfelületen: $\mathbf{M}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{r} & 1 \end{bmatrix}$, ahol n_1 az 1. közeg, n_2 a 2. közeg törésmutatója, r a gömbtükör görbületi sugara,
 - Visszaverődés gömbfelületen: $\mathbf{M}_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{r} & -1 \end{bmatrix}$, ahol n a közeg törésmutatója, r a gömbtükör görbületi sugara.
- Tetszőleges paraxiális optika rendszer igaz: $\det \mathbf{M} = \pm 1$.

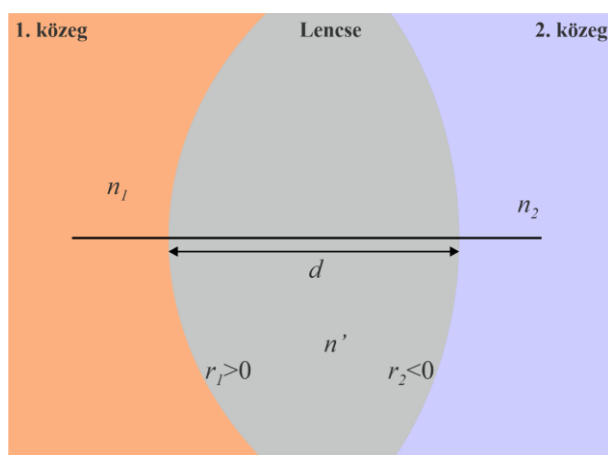
11.2. Órai feladatok

1. **feladat:** Vizsgáljuk meg a fény szabad terjedését egy d úthosszon (11.3. ábra), és írjuk le ezen egyszerű paraxiális optikai rendszer lineáris transzformációját. A közeg törésmutatója n .



11.3. ábra: A fénysugár szabad terjedése egy d hosszúságú szakaszon, egy n törésmutatójú közegben.

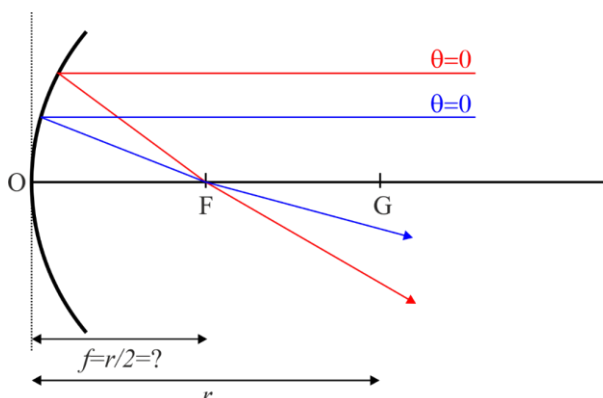
2. **feladat:** Határozzuk meg a 11.4. ábrán látható vastag lencse transzformációs mátrixát (paraxiális közelítésben). A számításhoz szükséges paraméterek: n_1 – az 1. közeg törésmutatója, n_2 – a 2. közeg törésmutatója, n' – a lencse törésmutatója, d – a lencse vastagsága, r_1 – a lencse bal, r_2 – a jobb oldalának görbületi sugara.



11.4. ábra: Egy vastag lencse általános felépítése.

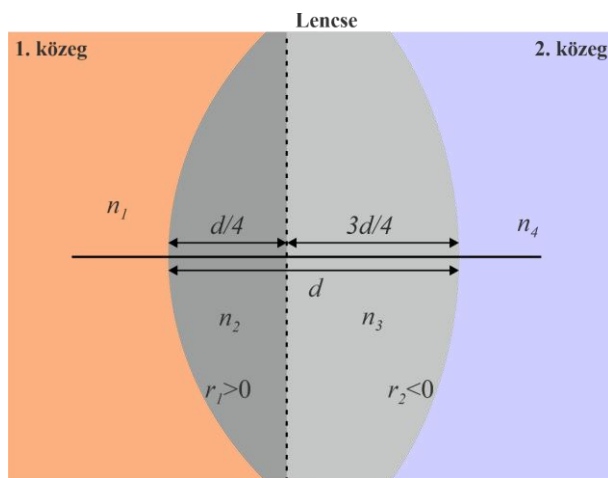
11.3. Gyakorló feladatok

1. **feladat:** Homorú gömbtükrő esetén az optika rendszer fókusz távolsága a gömbtükrő görbületi sugarának a fele. Bizonyítsa be az állítást! (Segítség ld. 11.5 ábrán.)



11.5. ábra: A fénysugarak törése homorú gömbtükrön.

2. **feladat:** Határozza meg a 11.6. ábrán látható gyűjtőlencse transzformációs mátrixát paraxiális közelítésben. Paraméterek: d a lencse teljes vastagsága az optikai tengelyben; $\frac{1}{4}d$ a baloldali r_1 sugarú, n_2 törésmutatójú lencserészlet vastagsága; $\frac{3}{4}d$ a jobboldali r_2 sugarú, n_3 törésmutatójú lencserészlet vastagsága; n_1 a lencsét körülvevő első közeg; n_4 a lencsét körülvevő második közeg törésmutatója.



11.6. ábra: A 2. feladatban ismertett összetett optikai rendszer felépítése.

12. MEGOLDÓKULCS AZ ÓRAI FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ**12.1. Nyugvó töltések és elektrosztatikus mezőjük I.**

1. $Q' = -0,96 \text{ Q}$
- 2.a $|\mathbf{g}_1| = 9,81 \text{ m/s}$
- 2.b $U_1 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ V}$
- 2.c $|\mathbf{E}_2| = 1,001 \cdot 10 \text{ V/m}$
- 2.d $|\mathbf{g}_2| = 9,82 \text{ m/s}$
- 2.e Az Egyenlítőnél, közelebbi pólus irányába történt az elmozdulás a két mérési pont között.

12.2. Nyugvó töltések és elektrosztatikus mezőjük II.

1. $\mathbf{E}_b(r) = \frac{\rho_0}{3 \cdot \epsilon_0} \mathbf{r}$
 $\mathbf{E}_k(r) = \frac{\rho_0 \cdot R^3}{3 \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$
 $|\mathbf{E}(r = R)| = \frac{\rho_0 \cdot R}{3 \cdot \epsilon_0}$
 $\Phi_b(r) = \frac{\rho_0 \cdot R^2}{2 \cdot \epsilon_0} - \frac{\rho_0}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot r^2$
 $\Phi_k(r) = \frac{\rho_0 \cdot R^2}{3 \cdot \epsilon_0} \frac{1}{r}$
 $|\Phi(r = R)| = \frac{\rho_0 \cdot R^2}{3 \cdot \epsilon_0}$
 $|\Phi(r = 0)| = \frac{\rho_0 \cdot R^2}{2 \cdot \epsilon_0}$
2. $\mathbf{E}_b(r) = 0$
 $\mathbf{E}_k(r) = \frac{Q \cdot R^3}{3 \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$
 $|\mathbf{E}(r = R)| = \frac{Q \cdot R}{3 \cdot \epsilon_0}$
 $\Phi_b(r) = \text{állandó}$
 $\Phi_k(r) = \frac{Q \cdot R^3}{3 \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$
 $|\Phi(r = R)| = \frac{Q \cdot R^2}{3 \cdot \epsilon_0}$

12.3. Egyenáramok és mágneses mezőjük II.

1. $28 \cdot 032 \text{ Ft/év}$
2. A 4.1.a ábrán látható elágazás nélküli (soros) kapcsolás minden fogyasztóján 230 V feszültség esik. A fogyasztókon átfolyó áramerősségek kiszámíthatók az elektromos teljesítményének ismeretében: $I_1 = 4,8 \text{ A}$, $I_2 = 3,7 \text{ A}$, $I_3 = 3,9 \text{ A}$. Ezek összege több, mint a névleges áram (10 A), így az áramkör „automatikusan” megszakad.
3. A 4.1.b ábrán a vezeték egy elágazás nélküli fogyasztóként jelenik meg, ami növeli az áramkörben folyó áram nagyságát ($\Delta I = 0,245 \text{ A}$). A vezetéken 12,645 V feszültség esik, ami miatt lecsökken a kapcsolás párhuzamos ágában eső feszültség 217,35 V-ra. Ráadásul a vezeték felmelegszik ($P' = 160 \text{ W}$).
4. A méretezett vezeték sugara: 0,74 mm.

12.4. Egyenáramok és mágneses mezőjük III.

1. $I = 0,3 \text{ A}$
2. $I_3 = \frac{1}{415} \text{ A} \approx 2,41 \text{ mA}$

12.5. Elektromágneses indukció, töltött részecskék mozgása EM térben

- 1.a körpálya
 1.b $R = 100 \text{ km}$
 2 $I = 12 \text{ mA}$
 3. A megoldást a 6.4 ábra szemlélteti. Az ω szögsebességű forgatás hatására a vezető keret \mathbf{v} kerületi sebességgel mozog a lefele mutató \mathbf{B} mágneses térben. Ennek következtében: (1) a keret hosszabb oldalával párhuzamosan Lorentz-erő ébred, ami indukált feszültséget okoz az áramkörben (U_i), (2) a kerületi sebesség és a mágneses tér bezárt szöge időben változik ($\alpha(t)$).

$$U_i = U_{max} \cdot \sin(\alpha(t)) \rightarrow U_{max} \cdot \sin(\gamma(\omega, t))$$

12.6. Váltakozó feszültség és áram I.

- 1.a $U_i(t = 4 \text{ ms}) = 294,8 \text{ V}$
 1.b $I_i(t = 4 \text{ ms}) = 2,95 \text{ A}$
 1.c $I_{max} = 3,1 \text{ A}$; $U_{eff} \approx 230 \text{ V}$; $I_{eff} \approx 2,2 \text{ A}$
 1.d A megoldást a 7.1 ábra szemlélteti.

12.7. Váltakozó feszültség és áram II.

- 1.a A kísérlet eredményeként azt tapasztaljuk, hogy az izzó egyszerre világítani kezd az áramkör zárását követően. A váltakozó feszültség és áramerősség pillanatnyi értéke között nincs fázistolás, $\Phi_R = 0$. A jelenséget a 8.1.a ábra illusztrálja.
 1.b A kísérlet eredményeként azt tapasztaljuk, hogy az izzó az áramkör zárását követően „késve” kezd el világítani. Ez a jelenség a vasmagos tekercs önindukációjának köszönhető, ami a Lenz-törvénynek köszönhetően akadályozza az indukáló folyamatot. A feszültség pillanatnyi értéke $\Phi_L = \frac{\pi}{2}$ -vel siet az áramhoz képest; vagy az áram pillanatnyi értéke $\Phi_L = \frac{\pi}{2}$ -vel késik a feszültséghez képest (8.1.b ábra).
 1.c $Z_L = L \cdot \omega = X_L$
 2.a A feltöltött kondenzátor kezdetben U_{max} feszültséggel jellemezhető (8.3.b ábra). Az áram $\frac{\pi}{2}$ fázissal késik a feszültséghez képest, így az áramerősség a kondenzátor kisülésének pillanatában lesz maximális az áramkörben (8.3.c ábra). Az áramerősség a tekercs önindukciója miatt csak fokozatosan csökken, majd megszűnik a \mathbf{B} mágneses tér. Eközben a Lenz-törvény miatt a kondenzátor ellentétes polaritással töltődik fel. Tehát, a feltöltött kondenzátor elektromos mezőjének energiája átalakul a tekercs mágneses mezőjének energiájává, és így tovább... Ez a periodikus változás kísértetiesen hasonlít egy rugóhoz kötött test harmonikus rezgőmozgásához, ahol a rugó rugalmas energiája alakul át a test mozgási energiájává. A megoldás valójában csillapított harmonikus rezgőmozgás.
 2.b A megoldást a 8.3.d ábra szemlélteti. Próbáljuk megmagyarázni a jelenséget.

12.8. Váltakozó feszültség és áram III.

- 1.a $Z_e = \frac{1}{R} - i \frac{\omega \cdot C}{R^2 + \omega^2 C^2}$, $Z_h = \frac{1}{R}$, $Z_m = -\frac{\omega \cdot C}{R^2 + \omega^2 C^2}$
 1.b $I(t) = U_{max} \left[\frac{1}{R} \cos(\omega \cdot t) - C \sin(\omega \cdot t) \right]$
 1.c $Z_e = 30,3 \Omega$
 1.d $I_{eff} = 7,6 \text{ A}$
 1.e $I_{Reff} = 2,3 \text{ A}$, $I_{Ceff} = 7,23 \text{ A}$

1.f $I_{eff} = \sqrt{I_{Reff}^2 + I_{Ceff}^2}$

1.g $U_{max} = 325 \text{ V}, I_{max} = 10,75 \text{ A}$

1.h $\phi = -72,34^\circ$

12.9. Optika I.

1.a $a = -3$

1.b $\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}, |\mathbf{k}| = 42\pi \cdot 10^5 \text{ 1/m}$

1.c $f = 420 \text{ THz}$

1.d $\lambda_n = 476 \text{ nm}, \lambda_0 = 714 \text{ nm}$

1.e **B** iránya: $\begin{pmatrix} 15 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. A vízimentőnek hozzávetőlegesen 97 m-t kell futnia a parton x -irányban.

12.10. Optika II.

1. A feladat megoldása a szabad terjedés mátrixa: $\mathbf{M}_{sz} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{d}{n'} \cdot \frac{n_1 - n'}{r_1} & \frac{d}{n'} \\ \frac{n' - n_2}{r_2} \cdot \left(1 + \frac{d}{n'} \cdot \frac{n_1 - n'}{r_1} \right) + \frac{n_1 - n'}{r_1} & \frac{d}{n'} \cdot \frac{n' - n_2}{2} + 1 \end{bmatrix}$$

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönet illeti Molnár Bencét, Szűcs József Gábort, illetve Petneházy Adélt, akik a jegyzet formai áttekintését végezték. Ezenkívül, hálával tartozom Balázs Lászlónak a dokumentum szakmai lektorálásáért.

A jegyzet a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj támogatásával készült.

IRODALOMJEGYZÉK

- Balázs, L. (2013) Mélyfűrési geofizika – egyetemi jegyzet. Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest, pp. 147. [ISBN: 9789632843834](#) (Utolsó letöltés 2025.11.27.)
- Bekker, A. (1997) Physics of the Upper Polar Atmosphere. Springer Berlin, Heidelberg, pp. 386. ISBN: 978-3-642-27400-8
- Budó, Á. (1991) Kísérleti fizika II. kötet (Elektromosság- és mágnességtan). Tankönyvkiadó, Budapest, pp. 395. ISBN: 9631832767
- Chartier, G. (2005) Introduction to Optics. Springer New York, NY, p.p. 598. <https://doi.org/10.1007/b106780>
- Feynman, R.P., Leighton, R.B., Sands, M. (1985) Mai fizika 3. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, pp. 177. ISBN: 963105644X
- Feynman, R.P., Leighton, R.B., Sands, M. (1986a) Mai fizika 5. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, pp. 216. ISBN: 963106445X
- Feynman, R.P., Leighton, R.B., Sands, M. (1986b) Mai fizika 6. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, pp. 250. ISBN: 963106445X
- Freud, R. (2024) Lineáris algebra – egyetemi jegyzet. Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest, pp. 568. [ISBN: 9634630804](#) (Utolsó letöltés 2025.11.28.)
- Halász, T., Jurisits, J., Szűcs, J. (2004). Fizika 11-12. (Közép- és emelt szintű érettségire készülőknek). Mozaik Kiadó, Szeged, pp. 287. ISBN: 9789639674664
- Hudson, A., Nelson, R. (1994) Útban a modern fizikához. LSI Oktatóközpont, Budapest, pp. 1151. [ISBN: 9635771975](#) (Utolsó letöltés 2025.11.28.)
- Scharnitzky, V. (2002) Matrikszámítás. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, pp. 339. ISBN: 9631630609
- Simonyi, K. (2011) A fizika kultúrtörténete a kezdetektől a huszadik század végéig. Akadémia Kiadó, Budapest, pp. 616. ISBN: 9789630591171
- Tasnádi, P., Skrapits, L., Bérces, Gy. (2004) Általános fizika I.1. kötet (Mechanika I.). Dialóg Campus Kiadó, Budapest-Pécs, pp. 486. ISBN: 9639310239

HIVATKOZÁSOK

- Blewett, J.P. (1970) Recent Advances in Particle Accelerators. *Advances in Electronics and Electron Physics* 29, pp. 233-256. [https://doi.org/10.1016/S0065-2539\(08\)61092-6](https://doi.org/10.1016/S0065-2539(08)61092-6)
- Rycroft, M.J., Israelsson, S., Price, C. (2000) The global atmospheric electric circuit, solar activity and climate change. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics* 62, pp. 1563-1576. [https://doi.org/10.1016/S1364-6826\(00\)00112-7](https://doi.org/10.1016/S1364-6826(00)00112-7)
- Szijártó, M., Balázs, L., Drahos, D., Galsa, A. (2017) Numerical sensitivity test of three-electrode laterolog borehole tool. *Acta Geophysica* 65, 701-712. <https://doi.org/10.1007/s11600-017-0063-4>