A fekete lyukak matematikája

Bodré Zalán | Timo Johnny Kärkkäinen | Bethlen Gábor Református Gimnázium, Hódmezővásárhely

Célkitűzés

A Schwarzschild-metrika átalakítása Kruskal–Szekeres-koordináta-rendszerbe, ahol Penrose-diagrammok készítésével feltérképezzük egy potenciális utazó útvonalát

Probléma

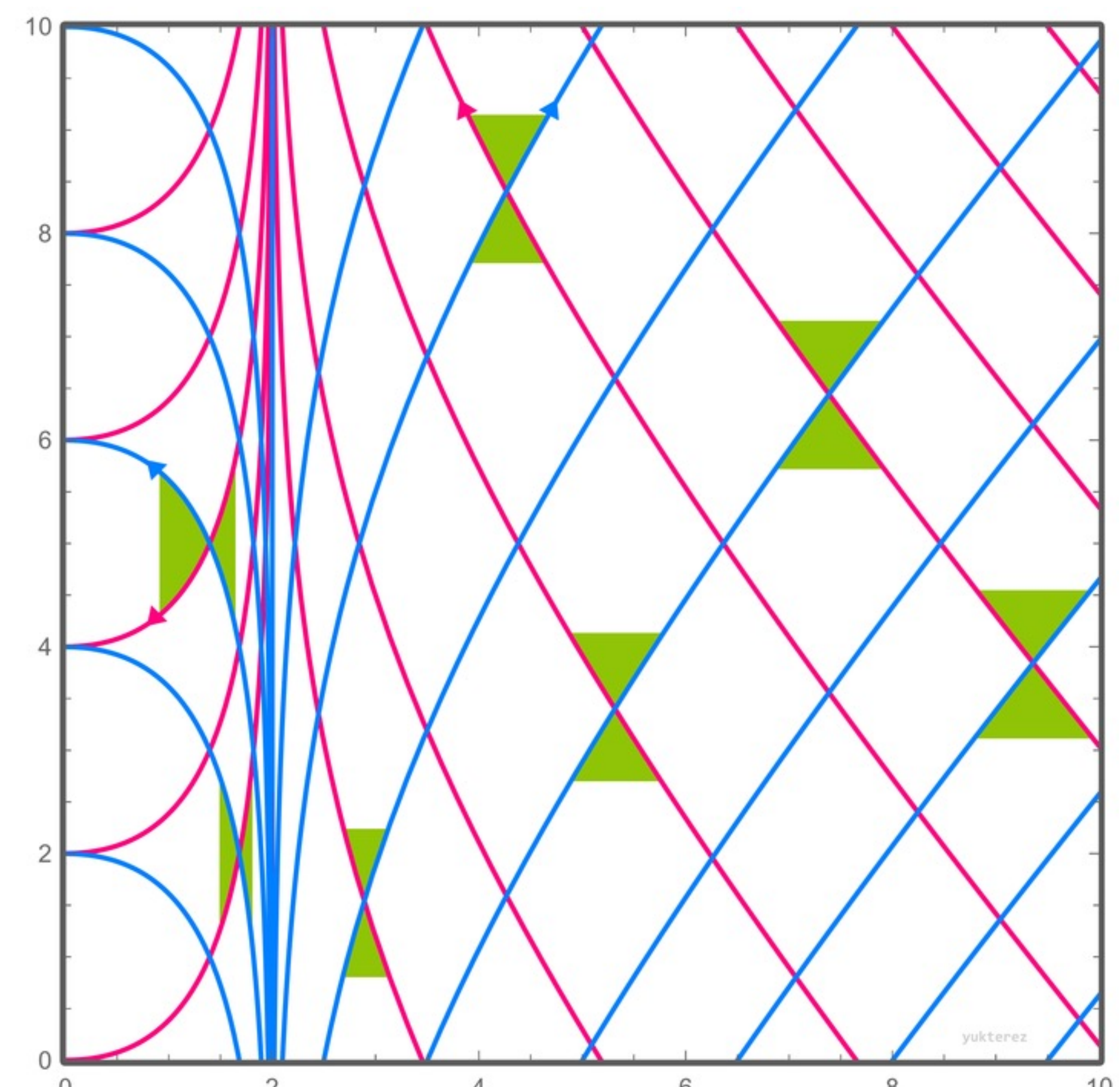
- A legegyszerűbb fekete lyukak felírására használt Schwarzschild-metrika nem működik az eseményhorizontnál, se utána, mivel 0-val való osztást vár el tőlünk a felírt egyenlet
- Ezért olyan transzformációkhoz kell forduljunk, amelyek a]-∞;∞[intervallumon tudnak ábrázolni (a tangens inverzfüggvénye például ilyen)
- Ezen kívül fizikai jelentés nélküli „fényszerű koordináták" is kellenek a megfelelő felíráshoz
- Nem mellesleg, ha nem fordulunk bizonyos egyszerűsítésekhez, akkor hiperbolikus szögfüggvényekhez jutunk, amikhez a komplex függvénytan ismeretére is szükség lenne, de szerencsére mi éltünk ezekkel az egyszerűsítésekkel
- Így már bebizonyítható, hogy a Schwarzschild-sugár csak egy koordináta-rendszerbeli szingularitás, nem egy geometriai (tehát különböző koordináta-rendszer váltásokkal ki lehet kerülni)

Schwarzschild-metrika

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

- r-rel van jelölve a szingularitástól való távolság, ami 0-nál nem fog működni az r-rel való osztás miatt

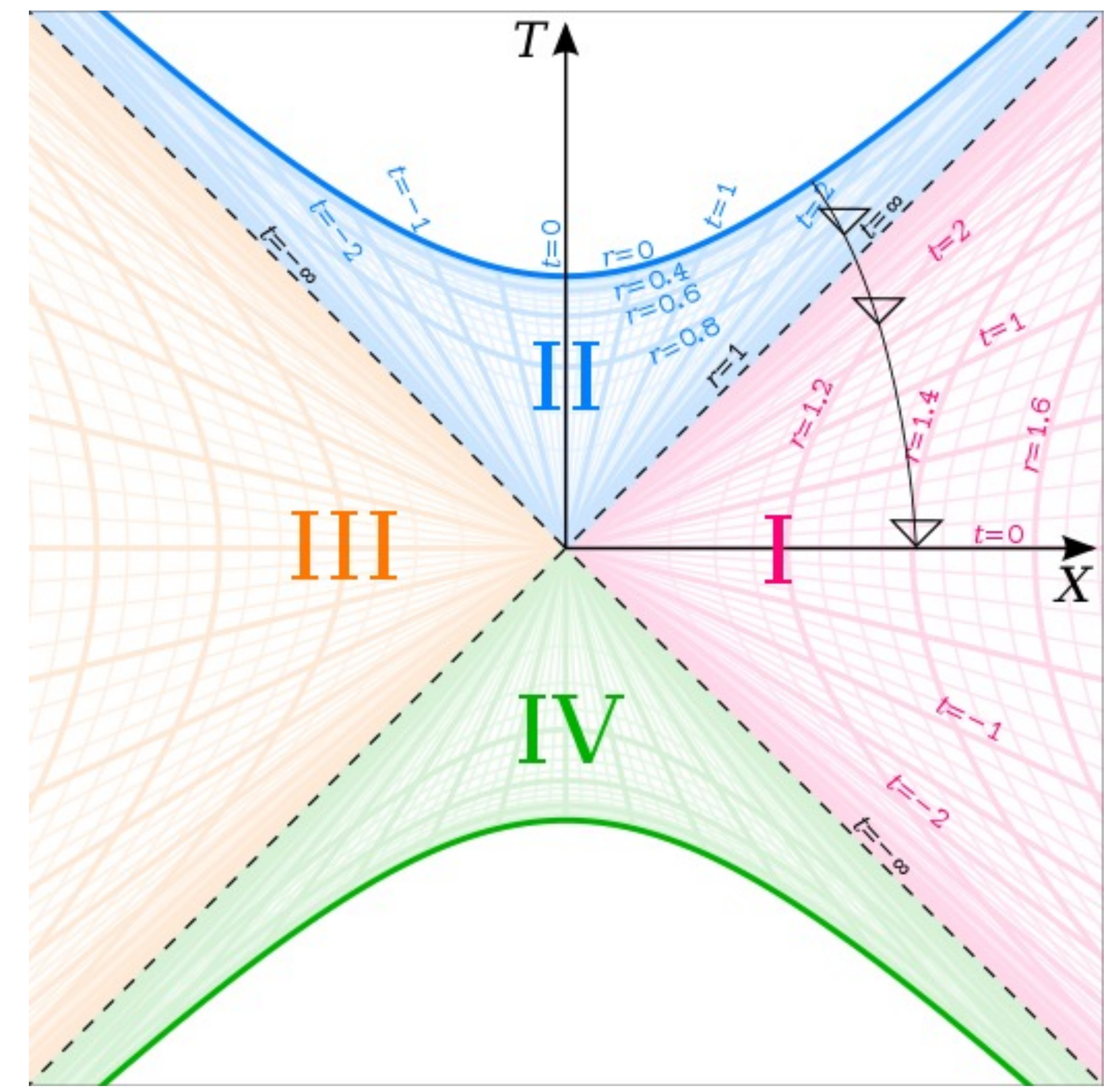
Eddington–Finkelstein koordináta rendszer



Forrás: wikipédia

- Itt $r=2\gamma M/c^2$ -nél van az eseményhorizont, viszont ez csak egy 2-dimenziós ábra, ezért nem görbül a horizont, mint a valóságban (egyébként γ; M; c=1, amik a gravitációs állandó, a fekete lyuk tömege és a fénysebesség)

Kruskal–Szekeres koordináta-rendszer



Forrás: wikipédia

I: Saját univerzumunk

II: Fekete lyuk

IV: Fehér lyuk

III: Párhuzamos univerzum

- Ha beesnénk egy fekete lyukba, akkor ezt az utat járnánk körbe

Konklúzió

- Mindez egy elméleti felvetés, mivel nincsen lehetőségünk méréseket végezni a fekete lyukakon, hiszen semmi, még a fény se tud kiszabadulni belőlük
- Az Einstein-egyenletből tudjuk ezeket a következtetéseket levonni, de az is csak egy elmélet, ami akár helytelen is lehet
- Mindenesetre készen kell álljunk különböző hipotézisekkel a jövőnk szempontjából, mivel nem holnap, de nem is holnap után, de valamikor képesek leszünk elutazni egyhez

Koordináta-rendszerek

Schwarzschild-metrika	Eddington–Finkelstein koordináta-rendszer	Kruskal–Szekeres koordináta-rendszer
Az eseményhorizontnál és utánna nem tudja leírni az objektumok mozgását	Az eseményhorizont után leírja vagy a beeső vagy a kilépő objektumok mozgását, de nem tudja a kettőt egyszerre	Az eseményhorizont után leírja a beeső és a kilépő objektumok mozgását

The Mathematics of black holes

Bodré Zalán | Timo Johnny Kärkkäinen | Bethlen Gábor Református Gimnázium, Hódmezővásárhely

Aim of the project

Re-parameterizing the Schwarzschild-metric into Kruskal-Szekeres coordinates, and draw Penrose-diagrams to map the route of potential travellers

Overview

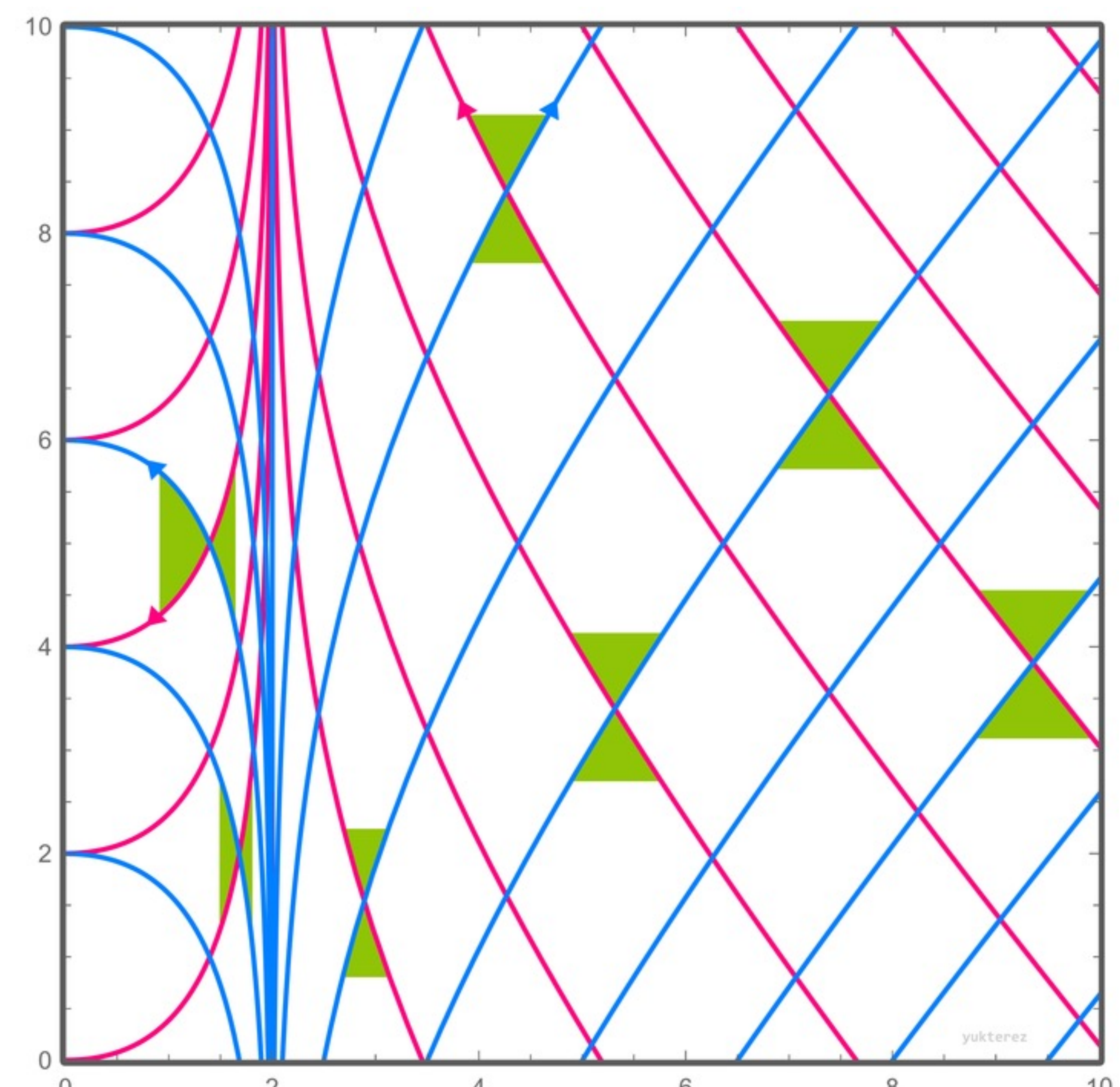
- We use the Schwarzschild-metric to describe the most simple black holes, but it doesn't work at or beyond the event horizon
- To bypass this, we have to use transformations that can represent in the]-∞;∞[interval (e.g. arcus tangent)
- Moreover, we need to use "null geodesics", that are without physical meaning
- Furthermore, if we don't use certain simplifications, we couldn't avoid to use the hyperbolic trigonometric functions, to which we should do complex analysis, but luckily, we used these reductions
- It is now provable, that the Schwarzschild-radii is only a coordinate-singularity, and not a geometric (by switching coordinate-systems it can be avoided)

Schwarzschild-metric

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

- With r we measure the distance from the singularity, and at r=0 it won't work, since it is a division by 0

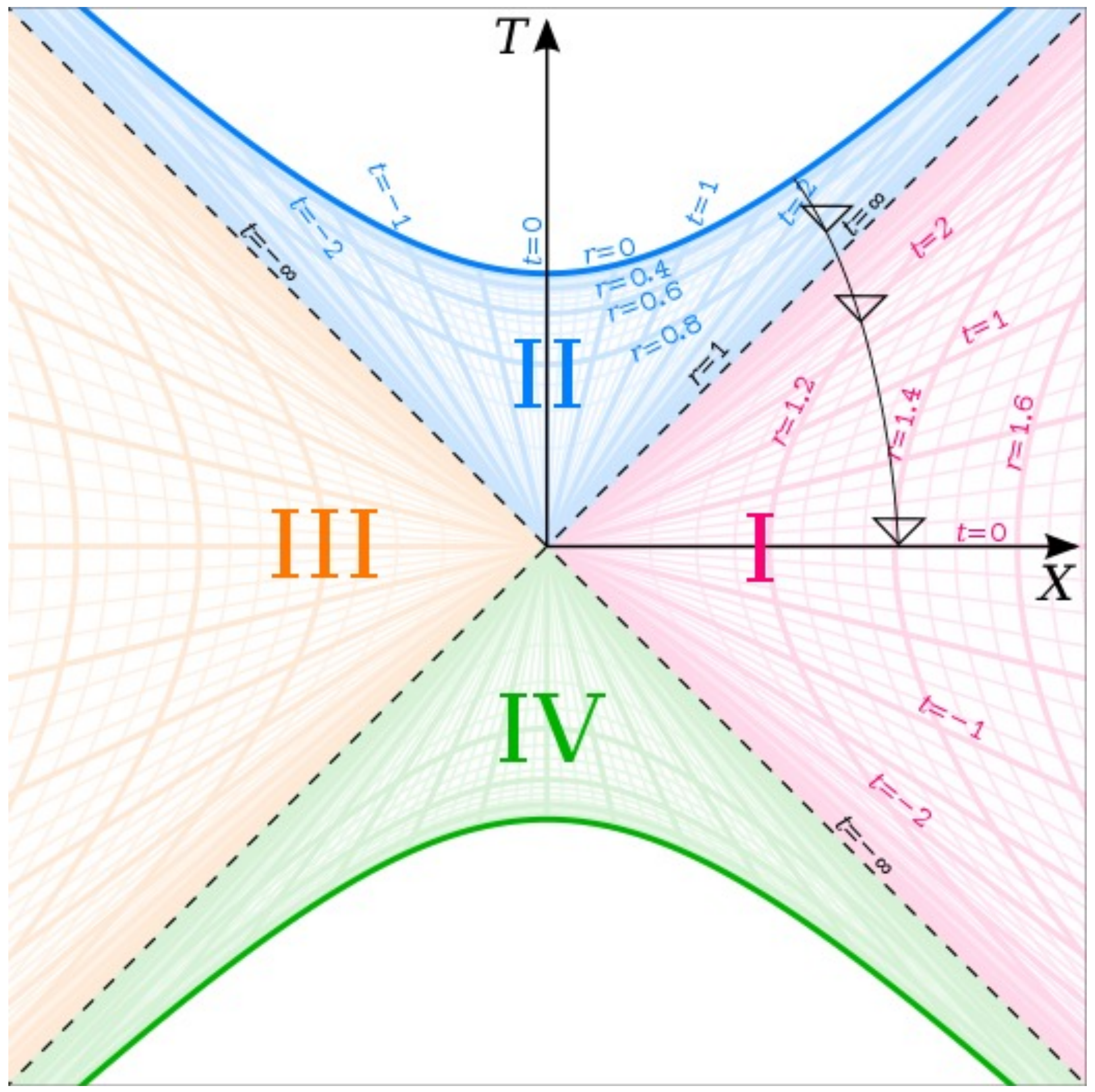
Eddington–Finkelstein coordinate-system



Source: Wikipedia

- At $r=2\gamma M/c^2$ is the event horizon, but it is only a 2D diagram, so this is why the horizon does not curve like in reality (also γ; M; c=1 which are the gravitational constant, the mass and the speed of light)

Kruskal–Szekeres coordinate-system



Source: Wikipedia

I: Our own Universe

II: Black hole

IV: White hole

III: Parallel Universe

- If we fall into a black hole, we would follow this path chronologically

Coordinate-systems

Schwarzschild-metric	Eddington–Finkelstein coordinate-system	Kruskal–Szekeres coordinate-system
It can't describe the movement of objects at or beyond the event horizon	It can only describe the movement of either the infalling or either the outgoing objects, but not both at the same time	It can describe the movement of infalling and outgoing objects at the same time

Conclusion

- All of this is only a hypothesis, because we don't have the opportunity to measure a black hole, since even light can't escape from it
- We can derive these deductions from the Einstein field-theory, but it is just a theory, there is no physical evidence for what I said
- By all means, we should always be ready with a speculation, hence we don't know what the future holds