Klasszikus algebra tanár szakosoknak

Fried Katalin, Korándi József, Török Judit

Bevezetés

Ez a könyv egy háromkötetes elektronikus jegyzet második kötete, amely a klasszikus algebrába vezeti be a tanár szakos hallgatókat, témája pedig a komplex számok, polinomok, polinomegyenletek, lineáris egyenletrendszerek – és ezekhez kapcsolódó – témakörök.

Igyekeztünk azokra az alapvető ismeretekre szorítkozni, illetve részletesen kitérni, amelyek a tanítás során (akár burkoltan is) felmerülhetnek. Továbbá igyekeztünk az egyetemi szintű ismereteket összefűzni a korábban tanultakkal, hogy megkönnyítsük az új (fajta) ismeretek feldolgozását.

Munkánkban sokan segítettek, külön köszönettel tartozunk Komjáth Péternek, a könyv korábbi verziójának lektorálásáért, illetve Hermann Péternek és Fried Ervinnek önzetlen segítségükért, amellyel nagyban segítették a munkánkat. Köszönetünk Hraskó Andrásnak, aki a javított, elektronikus kiadást nézte át, valamint Pogáts Ferencnek a lelkiismeretes lektori munkájáért.

A könyv három részre tagozódik:

Számelmélet Ez a rész az általános- és középiskolában tanult számelméleti ismereteket kívánja megalapozni, rendszerezni és kiegészíteni. Lényegében az oszthatóság fogalmától elindulva jutunk el a kongruenciákig és a számelméleti függvényekig. Utalás történik a mai modern számelméletnek – ha nem is a módszereire, de – néhány problémájára és eredményére. A feldolgozás során – tekintettel arra, hogy ez a rész kapcsolódik a legközvetlenebbül az általános iskolai anyaghoz – folyamatosan szem előtt tartottuk az iskolai alkalmazásokat, még ha nem is mindig tértünk ki rá.

„Klasszikus" algebra Ebben a részben megpróbáljuk összefoglalni azokat a (klasszikus) algebrai ismereteket, amelyek meggyőződésünk szerint az algebrai alapműveltség részét képezik, és amelyekre a hallgatóknak egyéb tanulmányaik során is szükségük lehet. Így bevezetjük a komplex számokat, szólunk polinomokról és polinomegyenletekről, valamint még számos olyan dologról, amelyek neve egy ilyen bevezetésben valószínűleg inkább ijesztőek semmint lelkesítőek lennének, így most fel sem soroljuk ezeket. A feldolgozás során folyamatosan használni kezdjük az (absztrakt) algebra kifejezéseit, de ez már igazából a következő részhez tartozik. Íme:

„Modern" algebra Manapság leginkább ezt szokás algebrának nevezni. Ebben a részben megismerked(het)ünk a mai matematika (és részben fizika, kémia stb.) egészét átható „absztrakt" gondolkodásmód alapfogalmaival, alapvető, illetve elemi tételeivel. Kiderül(het), hogy hol mindenütt fordulnak elő „algebrai" megfontolások az analízis témaköreiben, hogy miért nem geometriai, hanem algebrai probléma például a „kör négyszögesítése", de még akár az is megtudható, hogy mik azok a racionális számok.

Megjegyzés

Ez a jegyzet nem könyv. Nem kíván tehát az egykori és mai algebra és számelmélet bármiféle összefoglaló műve lenni.

Ez a jegyzet nem előadásjegyzet. Törekvéseink ellenére sem gondoljuk, hogy ez a munka teljesen helyébe tudna lépni az előadásokon való jegyzetelésnek.

Ez a jegyzet nem puska. Nem pótolja tehát a hallgató egyéni (meg?)barátkozását az anyaggal, a definíciók, tételek, bizonyítások, példák és ellenpéldák végiggondolását, újraalkotását, kiegészítését, megértését, ellenőrzését. Nem titkolt célunk annak elérése, hogy ki-ki képes legyen saját példákat találni az egyes fogalmakra vagy akár befejezni (más módon) vagy újragondolni saját kútfejéből egy-egy bizonyítást. (Az „*a dolog részletesebb megfontolását az olvasóra bízzuk*" típusú mondatok csábításának mi sem mindig tudtunk ellenállni, de azt azért jó szívvel nem tudjuk javasolni, hogy valaki egy vizsgán csupán arra hivatkozzon, hogy a szóbanforgó dolog „nyilvánvaló".) Mindenki saját felelőssége (ami egyszersmind a javát is szolgálja), hogy ezeket az állításokat ellenőrizze.

Végezetül: reméljük, hogy ez a jegyzet komoly segítséget jelent mindazoknak, akik értő módon, figyelmesen olvassák-forgatják. Amennyiben így lesz, akkor ebben nagy része van a lektoroknak és mindazon hallgatóknak, akik észrevételeikkel, megjegyzéseikkel és tanácsaikkal támogatták e jegyzet megszületését, amiért ezúton is szeretnénk mindannyiuknak köszönetet mondani.

a szerzők

I. rész

A komplex számok

1. A komplex számok bevezetése

A történelem során először a természetes számok alakultak ki, majd a törtek, a negatív egész, illetve tört számok, és időközben a számíráshoz a 0 is. Ezek mind gyakorlati fontossággal bírtak már évezredekkel ezelőtt is.

Az irracionális számok – és azok algebrájának – felfedezése azonban csak alig néhány száz éve kezdődött el.

Az ókorban is tudtak ugyan róla, hogy vannak olyan mennyiségek, amelyek aránya nem fejezhető ki két természetese szám arányaként, ám emiatt nem változtatták meg a számokról alkotott fogalmukat. Erre nem is volt szükségük. Gondoljunk csak bele, hogy bármilyen pontossággal írunk le egy valós számot tizedestört alakban, csak racionális lehet (mert véges). Esetleg tudjuk jelölni, ha egy tizedestört szakaszos végtelen, ám az is racionális. A mindennapi életben (piacon, szobafestéskor, karácsonyi ajándékok csomagolása közben) nincs szükség az irracionális számokra, csak azok (valamilyen pontossággal megadott) racionális közelítésére.

Persze például a $\sqrt{2}$ jelöléssel le tudunk írni egy irracionális számot. De ez más alak, ez csak egy szimbólum, ami mindössze annyit jelent, hogy *egy olyan szám, amelynek a négyzete* 2, az $x^2 = 2$ „egyenlet egy megoldása". Ha akkoriban, amikor csak a racionális számokat ismerték, keresték volna az $x^2 = 2$ egyenlet megoldását, nem találták volna. A racionális számok körében ennek az egyenletnek nincsen megoldása. Mi azonban ismerjük a valós számokat, és a valós számok körében meghatározhatjuk mindkét gyökét ($\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$).

A valós számoknak is vannak azonban korlátai: az $x^2 = -1$ egyenletnek ebben a számkörben sincs megoldása, mert nincs olyan valós szám, amelynek a négyzete negatív.

Ha viszont lenne egy olyan számunk, amelynek a négyzete -2, akkor – a valós számokon „ismert azonosság" alapján – az összes többi negatív valós szám négyzetgyökét ki tudnánk fejezni. A -4 négyzetgyöke például $\sqrt{-4} = \sqrt{2 \cdot (-2)}$ miatt lehetne $\sqrt{2} \cdot \sqrt{-2}$, ha szabad lenne ilyen átalakítást végezni. Megnyugtatásul: abszolúte nem szabad! (A valós számok körében olyan azonosság, hogy $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ – nézzen csak utána a kedves olvasó – nincsen!)

Technikai okokból az tűnik célszerűnek, hogy konkrétan a -1 négyzetgyökére (ami nem biztos, hogy létezik, és nem biztos, hogy egyértelmű) vezessünk be egy szimbólumot, mondjuk az i betűt. (Az, hogy nem biztos, hogy létezik, arra utal, hogy attól, hogy valamiről beszélünk, még nem biztos, hogy létezik. Beszélhetnénk a 0 reciprokáról, attól az még nem lesz. Erről ennyit.)

1.1. A komplex számok szemléletes bevezetése

Az algebra egyik célja az algebrai struktúrák vizsgálata.

Az algebrai struktúra olyan nem üres halmaz, amelyen értelmezve van egy vagy több művelet, és a műveletek adott tulajdonsággal, tulajdonságokkal rendelkeznek.

A valós számok tulajdonságaival korábban már megismerkedtünk. Foglaljuk össze, melyek ezek!

A valós számok halmazán **értelmezve van két művelet, az összeadás és a szorzás.**

Az összeadás

– **kommutatív** (felcserélhető), vagyis $\forall a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a + b = b + a$;

– **asszociatív** (társítható), vagyis $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ilyenkor a zárójelet szokás is elhagyni: $a + b + c$, bár ez teljesen indokolatlan, mert azt az érzetet kelti, mintha lenne egy háromváltozós összeadás);

– **invertálható** (megfordítható), vagyis $\forall a, b \in \mathbb{R}$ esetén az $a + x = b$ (és az $y + a = b$) „egyenleteknek” létezik x, y megoldása a valós számhalmazban.

Ezt úgy is meg lehet fogalmazni, hogy létezik az összeadás egységeleme (ez a 0), amelyre teljesül, hogy $\forall a \in \mathbb{R}$ esetén $a + 0 = 0 + a = a$, valamint minden elemnek létezik az additív (összeadás szerint) inverze: $\forall a \in \mathbb{R}$ esetén $\exists a'$, amelyre $a + a' = a' + a = 0$.

A szorzás

– **kommutatív**: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot b = b \cdot a$;

– **asszociatív** $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (ilyenkor a zárójelet itt is szokás elhagyni: $a \cdot b \cdot c$, bár ez is teljesen indokolatlan, mert azt az érzetet kelti, mintha lenne egy háromváltozós szorzás);

– van multiplikatív egységeleme: van olyan elem (ez az 1), amelyre teljesül, hogy $\forall a \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, továbbá **a nullától (az additív egységelemtől) eltekintve minden elemnek van multiplikatív inverze:** $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\exists a''$, amelyre $a \cdot a'' = a'' \cdot a = 1$

Az összeadást és a szorzást összekapcsolja a disztributivitás, mégpedig a **szorzás disztributív az összeadásra:** $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Az ilyen típusú struktúrákat (amelyek a félkövér betűkkel kiemelt tulajdonságokkal rendelkeznek) az algebrában *testnek* nevezzük.

További fontos tulajdonságai vannak a valós számoknak. Ezeket nem nehéz levezetni az előbb felsorolt tulajdonságokból, most nem bizonyítjuk be.

1. Minden valós szám 0-szorosa 0.

2. Az is teljesül, hogy két valós szám szorzata csak úgy lehet nulla, ha a szorzat valamelyik tényezője nulla.

Amikor tehát ki akarjuk bővíteni a valós számokat a $\sqrt{-1}$-gyel, akkor olyan halmazt keresünk, amely

- tartalmazza a valós számokat,
- a valós számokon értelmezett két művelet ezen a bővebb halmazon is elvégezhető legyen,
- az összeadás és a szorzás szokásos műveleti tulajdonságai továbbra is teljesüljenek a bővebb halmazon, valamint
- bármelyik valós számból tudjunk négyzetgyököt vonni, és az eredmény ebben, a bővebb halmazban legyen.

Jelöljön tehát i egy olyan dolgot, amelynek a négyzete -1. (Az i jelölés történetileg onnan ered, hogy ez egy képzeletbeli – imaginárius – szám.) Eszerint i az $x^2 = -1$ egyenletnek biztosan megoldása. (Azt persze nem tudjuk, hogy van-e más megoldása is.)

Ha i-vel a valós számokon megfogalmazottakhoz hasonló szabályok alapján számolni szeretnénk, akkor először is hozzá kell vennünk őt a valós számok halmazához. (i nem valós szám, mert a valós számok négyzete nemnegatív, márpedig i négyzete -1.)

Ez a halmaz azonban így még nem alkot testet az összeadásra és a szorzásra.

1. i valós számú többszöröse (például $t \cdot i$) csak akkor valós szám, ha a 0-szorosát vesszük. A szorzás valós számokon megismert tulajdonságai szerint ugyanis egyrészt $0 \cdot i = 0$ kell legyen, másrészt $t \cdot i = 0$ csak úgy lehet, ha t vagy i nulla (de i nem nulla, hiszen nem valós), ezért $t = 0$. Ha viszont $t \neq 0$ és $t \cdot i$ valós szám (de nem 0), például s lenne, akkor $i = \dfrac{s}{t}$ lenne, ami valós szám, tehát i is valós lenne, pedig nem az.

Ezért ahhoz, hogy a szorzást el tudjuk végezni, a valós számokhoz hozzá kell vennünk a $t \cdot i$ alakú számokat is ($t \in \mathbb{R}$).

2. i-hez valós számot adva (például $t + i$) nem kaphatunk valós számot, ha ugyanis valós szám (például s) lenne az összeg, akkor $s - t = i$, vagyis i is valós szám lenne.

Ezért ahhoz, hogy az összeadást el tudjuk végezni, a valós számokhoz hozzá kell vennünk még a $t + i$ alakú számokat is ($t \in \mathbb{R}$).

Látni kell, hogy a $t + i$ alakú számok nem lehetnek egyenlők az ri ($r \in \mathbb{R}$) számmal, (csak a nyilvánvaló $0 + i = 1 \cdot i$ esetben), hiszen $t + i = ri$ esetén $t = (r - 1)i$ lenne, amiből $r = 1$, mert csak így lehet valós a jobb oldalon álló szám. Ha viszont $r = 1$, akkor $t = 0$, így a nyilvánvaló $i = i$ azonosságot írtuk fel.

3. A $t + i$ és az ri alakú számokat is össze kell tudnunk adni – feltéve, hogy ezeket nem írtuk még fel. Vizsgáljuk meg: $r + s \cdot i$ (r és s valós számok) pontosan akkor lehet egyenlő $t \cdot i$-vel, amikor $r + s \cdot i = t \cdot i$, vagyis ha $r = (t - s) \cdot i$, amiből $r = 0$ és $t = s$;

illetve $r + s \cdot i$ csak úgy lehet egyenlő $t + i$-vel, amikor $r + s \cdot i = t + i$, azaz $(s - 1)i = t - r$, amiből $s = 1$, így $t = r$;

ami azt jelenti, hogy a 2. és a 3. pont alatti alakú kifejezések összegeit eddig még nem mind kaptuk meg.

Ezért a valós számokhoz hozzá kell vennünk az összes $r + si$ alakú számot ($r, s \in \mathbb{R}$).

Fontos megállapítanunk, hogy a valós számokhoz hozzávett elemek közül miként lehet kettő egyenlő.

4. A $r + s \cdot i$ felírás egyértelmű, azaz különböző r, s esetén különböző elemeket kapunk. Ha ugyanis $r + s \cdot i = r' + s' \cdot i$, akkor $r - r' = (s' - s)i$, vagyis $s - s' = 0$ (tehát $s = s'$) és $r - r' = 0$ (tehát $r = r'$).

Úgy tűnik, hogy mostanra elegendő elemet vettünk hozzá a valós számhalmazhoz ahhoz, hogy a műveleteket el tudjuk végezni ebben a körben. De vajon az $r + si$ *típusú* számokat már össze tudjuk adni egymás között? Össze tudjuk szorozni? Elvégezhető-e rajtuk a kivonás, az osztás (természetesen a nullát kizárva)?

Vizsgáljuk meg!

1. $r + si + r' + s'i = (r + r') + (s + s')i$, tehát az összeg is ilyen típusú.

2. $r + si - (r' + s'i) = (r - r') + (s - s')i$, tehát a különbség is.

3. $(r + si)(r' + s'i) = rr' + ss' \cdot (-1) + (rs' + sr')i$, ami egy valós szám és egy valós szám i-szeresének összege, tehát a szorzat is ilyen típusú.

4. $\dfrac{r + si}{r' + s'i}$ kiszámításához egy – a középiskolai tanulmányainkból ismerős – trükköt alkalmazunk.

A nevezőben burkoltan egy négyzetgyökös kifejezés áll: $r'+s'i$ írható $r'+s'\sqrt{-1}$ (ez persze nem teljesen korrekt, mert még nem tudjuk, hogyan kell negatív valós számból négyzetgyököt vonni). A szokásos eljárás ilyenkor a gyöktelenítés, azaz bővítjük a törtet $r' - s'i$-vel (ami nem lehet nulla, mert az azt jelentené, hogy s' és r' is nulla, vagyis $r' + s'i$ is nulla lenne, amit kizártunk):

$$\frac{r + si}{r' + s'i} \cdot \frac{r' - s'i}{r' - s'i} = \frac{(r + si)(r' - s'i)}{(r' + s'i)(r' - s'i)} =$$
$$\frac{(rr' - ss') + i(sr' - rs')}{(r')^2 - (s'i)^2} = \frac{(rr' - ss') + i(sr' - rs')}{(r')^2 + (s')^2}$$

Ezzel az $r+si$ elemek (ahol $r, s \in \mathbb{R}$ valós számok) olyan halmazához jutottunk, amelyben benne vannak a valós számok, el tudjuk végezni rajtuk az összeadást, a kivonást, a szorzást és az osztást (nem 0 osztó esetén), és azt is feltételeztük, hogy ezen műveletek valósokon megismert tulajdonságai továbbra is fennmaradnak.

Mivel ezek a számok amolyan „összetett” vagy „komplex” számok, ezt a halmazt *komplex számoknak* nevezték el. A komplex számok halmazát $\mathbb{C}$-vel szokás jelölni.

Meglepő módon a komplex számok precíz algebrai felépítése szinte a valós számokéval egyidőben alakult ki – az „egyenletmegoldás” problémaköréhez kapcsolódva. Ennek az az egyszerű oka, hogy magának az egyenletmegoldásnak az absztrakt algebrai alapjait alig párszáz éve fogalmazták meg. Az elmélet kidolgozásának jeles képviselői közé tartozott többek között Carl Friedrich Gauss (1777–1855) német, Niels Henrik Abel (1802–1829) norvég, Évariste Galois (1811–1832) francia matematikus. (A két utóbbi rendkívül fiatalon halt meg, de elképesztően fontos mérföldköveket fektettek le munkásságuk során.)

Leonhard Euler (1707–1783) is foglalkozott algebrával, de számos zseniális gondolata ellenére voltak híres tévedései is azon egyszerű oknál fogva, hogy az ő korában a matematika számos alapfogalma még nem volt kellően tisztázva, így a komplex számok algebrája sem. Úgy tudni, hogy az (1.1) (ellentmondásos) megállapítás is tőle ered.

A valós számok korrekt matematikai tárgyalása (értsd: axiomatikus tárgyalása) az ókori görögök óta tisztázásra szorult, mert már őket is elbizonytalanította több megválaszolhatatlan kérdés, azonban csak Georg Cantor (1845–1918), illetve Richard Dedekind (1831–1916) fogalmaztak meg olyan fontos axiómákat a valós számokra, amelyek segítségével megoldottak számos, korábban kínosan zavaró problémát.

Amikor a tudósok korábban egyenleteket írtak fel (pontosabban *polinomegyenleteket* – ezekben az x szimbólum tetszőleges hatványa, illetve ezek számszorosainak összege szerepel), akkor ezeknek az igen egyszerűnek hitt egyenleteknek sem mindig sikerült megtalálni a megoldásait.

A fő algebrai feladat az volt, hogy megoldóképletet akartak adni tetszőleges polinom gyökeinek meghatározására.

1. példa: Adjunk általános megoldási módszert az $ax + b = 0$ egyenlet megoldására.

(i) Ha $a = 0$, $b = 0$: x tetszőleges szám lehet.

(ii) Ha $a = 0$, $b \neq 0$, akkor nincs olyan x érték, amely eleget tenne az egyenlet feltételeinek.

(iii) Ha $a \neq 0$, akkor az $x = -\dfrac{b}{a}$ az egyetlen megoldása az egyenletnek.

2. példa: Adjunk általános megoldási módszert az $ax^2 + b = 0$ egyenlet megoldására.

(i) Ha $a = 0$, $b = 0$, akkor tetszőleges x eleget tesz az egyenlet feltételeinek.

(ii) Ha $a = 0$, $b \neq 0$, akkor nincs ilyen x érték.

(iii) Ha $a \neq 0$, akkor az eredeti egyenlet ekvivalens az $x^2 = -\dfrac{b}{a}$ egyenlettel. (Majd a későbbiekben pontosítjuk, hogy mit jelent az egyenletek ekvivalenciája.)

Ha $-\dfrac{b}{a}$ negatív, akkor nincs olyan valós szám, amelyet x helyébe írva az eleget tenne az egyenlet feltételeinek.

Ha $b = 0$, akkor csak az $x = 0$ a megoldás.

Ha $-\dfrac{b}{a}$ pozitív, akkor létezik (két különböző) valós négyzetgyöke, amely alkalmas x szerepének betöltésére: $x = \pm\sqrt{-\dfrac{b}{a}}$.

1.1.1. Megjegyzés *A komplex számok körében persze akkor is találunk megoldást, ha* $-\dfrac{b}{a}$ *negatív, nevezetesen:* $x = \left(\pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right) \cdot i$. *Itt feltettük, hogy a négyzetgyökvonás azonosságai is öröklődnek a komplex számokra. Sajnos azonban nem öröklődnek, mert különben*

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{(-1)}\cdot\sqrt{(-1)} = (\sqrt{-1})^2 = -1 \tag{1.1}$$

lehetne. Ez viszont nem lehetséges, mert már a valós számok körében is ellentmondás.

Ha megvizsgáljuk a lépéseket, a szorzás, a hatványozás és a négyzetgyökvonás szokásos „azonosságait" alkalmaztuk. A szorzás tulajdonságait feltétlenül át akarjuk örökíteni, és azt a tulajdonságot is, hogy $(\sqrt{y})^2 = y$. *Ez azt jelenti, hogy a négyzetgyökvonás korábban megismert azonossága nem alkalmazható. Ez bizony nagyon kellemetlen, de – reméljük – megleszünk enélkül is.*

A négyzetgyökvonás fent bemutatott problémája azt mutatja, hogy jó lenne megkülönböztetnünk jelben is, hogy valósokon vagy komplexeken akarunk-e elvégezni egy négyzetgyökvonást.

Vegyük például a $\sqrt{-9i\cdot 25i}$ kifejezést, ami nyilván egyenlő $\sqrt{9\cdot 25}$-tel. Nem írhatjuk, hogy a komplex számok körében ez $\sqrt{-9i}\cdot\sqrt{25i}$-vel egyenlő. De azt sem írhatjuk, hogy $\sqrt{9}\cdot\sqrt{25}$-tel egyenlő, mert a négyzetgyökvonás ezen azonosságát (a szereplő komplex szorzótényezők miatt) a komplex számok körében nem alkalmazhatjuk. Ez kimondottan a komplex számokon elvégzett négyzetgyökvonás. Jelölésben azonban nem fogjuk megkülönböztetni a két halmazon elvégzendő négyzetgyökvonást.

Az igazsághoz persze hozzátartozik az is, hogy a valós számok körében sem igaz, hogy $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, mert például a $\sqrt{(-9)\cdot(-25)}$ bár létezik, de nem egyenlő $\sqrt{-9}\cdot\sqrt{-25}$-tel. A $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ összefüggés csak akkor teljesül, ha ab, a, b nemnegatív valós számok.

Az komplex számok körében ez az összefüggés nem teljesül, nem teljesülhet, mert a négyzetgyökvonás – mint azt majd látni fogjuk – nem egyértékű. Az „$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$" azonosság helyett azonban bebizonyítható egy ehhez nagyon hasonló összefüggés, amely a komplex számok körében fennáll: ha $a \in \mathbb{R}$ és z komplex szám (amelynek tehát létezik négyzetgyöke), akkor $\sqrt{a\cdot z} = |a|\cdot\sqrt{z}$.

1.2. A komplex számok algebrai bevezetése

Többféleképpen is be lehet vezetni a komplex számokat. (A könyv harmadik kötetében bemutatunk a valós számok egy *általános testbővítési* lehetőségét.) Most egy ahhoz nagyon hasonló, konkrét bevezetést fogunk bemutatni.

Induljunk ki a valós számokon értelmezett $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, vagyis az $\mathbb{R}^2$ Descartes-szorzat elemeiből. Ennek elemei tehát rendezett valós számpárok: $(a; b)$.

Két számpárt rendszerint csakis akkor fogunk egyenlőnek tekinteni, ha az első elemeik és a második elemeik is egyenlőek (ezt általában is így szokás).

1.2.1. Megjegyzés *Ez a feltétel – bár nem látszik rajta – nagyon fontos! A műveletek tulajdonságának ellenőrzésekor ugyanis elképzelhető, hogy az egyik oldalon más kifejezés adódik, mint a másikon, és el kell tudnunk dönteni, hogy a kapott eredmények egyenlők-e.*

Persze, ha sorrendben egyenlőek a számpárok tagjai, akkor nyilván egyenlő a két számpár.

Előfordulhat azonban, hogy úgy is egyenlőnek tekintünk két számpárt, hogy nem egyenlőek a tagjaik. A racionális számokat rendezett egész számpároknak tekintve ((számláló, nevező)) például a $(3; 4)$ *és a* $(6; 8)$ *számpárok egyenlők, mert* $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, *de számpárként különbözők.*

Értelmezzünk az $\mathbb{R}^2$ halmazon két műveletet – jelben $\oplus$ és $\odot$ – a következőképpen:

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \tag{1.2}$$

illetve

$$(a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2). \tag{1.3}$$

Ellenőrizzük az $\oplus$ tulajdonságait:

Kommutatív, mert

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_2 + a_1, b_2 + b_1) = (a_2, b_2) \oplus (a_1, b_1).$$

Asszociatív, mert

$$((a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2)) \oplus (a_3, b_3) =$$
$$(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \oplus (a_3, b_3) = (a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3) =$$
$$(a_1, b_1) \oplus (a_2 + a_3, b_2 + b_3) = (a_1, b_1) \oplus ((a_2, b_2) \oplus (a_3, b_3)).$$

Az $\odot$ tulajdonságai:

Kommutatív, mert

$$(a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2) =$$
$$(a_2a_1 - b_2b_1, b_2a_1 + a_2b_1) = (a_2, b_2) \odot (a_1, b_1).$$

Asszociatív, mert

$$((a_1, b_1) \odot (a_2, b_2)) \odot (a_3, b_3) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2) \odot (a_3, b_3) =$$
$$(a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3, a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3),$$

míg

$$(a_1, b_1) \odot ((a_2, b_2) \odot (a_3, b_3)) = (a_1, b_1) \odot (a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + b_2a_3) =$$
$$(a_1a_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3 - b_1b_2a_3, a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3 - b_1b_2b_3).$$

A két számpár a számpárokra vonatkozó egyenlőség szerint, valamint a valósokon érvényes műveleti azonosságok miatt ugyanaz a szám.

Az $\odot$ disztributív az $\oplus$-ra:

$$(a_1, b_1) \odot ((a_2, b_2) \oplus (a_3, b_3)) = (a_1, b_1) \odot (a_2 + a_3, b_2 + b_3) =$$
$$(a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3, a_1b_2 + a_1b_3 + b_1a_2 + b_1a_3),$$

míg

$$((a_1, b_1) \odot (a_2, b_2)) \oplus ((a_1, b_1) \odot (a_3, b_3)) =$$
$$(a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2) \oplus (a_1a_3 - b_1b_3, a_1b_3 + b_1a_3) =$$
$$(a_1a_2 - b_1b_2 + a_1a_3 - b_1b_3, a_1b_2 + b_1a_2 + a_1b_3 + b_1a_3),$$

a kettő pedig a számpárok egyenlőségére vonatkozó feltételeink, valamint a valósokon érvényes műveleti tulajdonságok miatt ugyanaz a szám.

1.2.2. Állítás *Az $(a, 0)$ alakú számok az (1.2), illetve (1.3) alatt meghatározott $\oplus$ és $\odot$ műveletekkel műveletartó módon* megfeleltethető *a valós számok testének.*

Pontosabban: az $(\{(a, 0)\}, \oplus, \odot)$ struktúra test, és izomorf a valós számok testével. Létesíthető köztük műveletartó bijekció. A műveletartás pedig azt jelenti, hogy ha két elemen elvégezzük valamelyik műveletet, akkor az eredménynek megfelelő elem ugyanaz, mint amikor a nekik megfelelő elemeken elvégezzük a másik halmaz megfelelő műveletét (1.1. ábra).

Bizonyítás. Az egy-egyértelmű megfeleltetés nyilvánvalóan adódik (természetes), hiszen tetszőleges a valós számnak egyértelműen megfeleltethetjük az $(a, 0)$ számpárt, és fordítva, az $(a, 0)$ számpárnak az a valós szám felel meg. Ellenőriznünk kell még a „műveletttartást”, vagyis

1. ha $a + b = c$, akkor vajon $(a, 0) \oplus (b, 0)$ egyenlő-e $(c, 0)$-lal: $(a, 0) \oplus (b, 0) = (a + b, 0)$, ami valóban az $a + b$-nek megfelelő $(c, 0)$ párt jelenti;

2. ha pedig $a \cdot b = c$, akkor $(a, 0) \odot (b, 0) = (ab, 0) = (c, 0)$, ami éppen a c-nek megfelelő pár. $\square$

Eszerint a valós számpárokon az $\oplus$ és az $\odot$ műveletek megfelelnek a valós számokon értelmezett összeadásnak és szorzásnak.

Természetesen a valós számpárok halmazában más elemek is vannak (nemcsak a valós számoknak megfelelők), ezeken azonban eddig sem jelentett volna problémát, ha a műveleteket $+$, illetve $\cdot$ jellel írtuk volna. (Pontosabban: csak azért kényszerültünk más jelet használni a műveletekhez, hogy megkülönböztessük a valósokon értelmezett műveletektől. Erre azonban – mint láttuk – most már nincs szükségünk.)

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy minden (a, b) számpár egyértelműen felírható $(a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$ alakban. (l. 1. feladat a 17. oldalon.)

Mindez azt jelenti, hogy minden (a, b) számpár egyértelműen felírható az a és a b valós számok, valamint a $(0, 1)$ számpár segítségével. Ha most még – a rövidség kedvéért – a $(0, 1)$ képzeletbeli (*imaginárius*) számot is egyszerűen i-vel jelöljük, akkor teljesül az alábbi:

1.2.3. Állítás *Minden $(a; b)$ számpár felírható $a + b \cdot i$ alakban. Ebben a felírásban a műveleti szabályok:*

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$
$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i;$$

$a + bi = c + di$ akkor és csak akkor, ha $a = c$, $b = d$.

Végül azt kell még ellenőriznünk, hogy minden valós számnak létezik-e négyzetgyöke.

1.2.4. Állítás *Minden valós számnak létezik négyzetgyöke a komplex számok körében.*

Bizonyítás. Ha $a \geq 0$, akkor nyilvánvalóan létezik valós négyzetgyök, mégpedig $\sqrt{(a,0)} = (\sqrt{a}, 0)$.

Láttuk már, hogy akár ha csak egyetlen negatív valós számnak van négyzetgyöke, akkor a műveleti tulajdonságok miatt mindnek van. (Itt ugyan felhasználtuk a szorzat négyzetgyökére vonatkozó $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ azonosságot, de mivel nemnegatív tényezőt emelünk ki a gyökjel alól, így ezt a valósokon ismert formájában alkalmaztuk.) $\square$

Ennél több is igaz – mint majd látni fogjuk: minden komplex számnak van négyzetgyöke.

1.3. A komplex számok négyzetgyökéről

A komplex számok struktúrája tehát ugyanúgy test, mint a valós számoké. Elvesztettük ugyan az „$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$" azonosságot (ami a valósokon sem általánosan teljesül), de nyertünk valamit:

1.3.1. Állítás *Minden komplex számnak létezik négyzetgyöke a komplex számok halmazában.*

Bizonyítás. Legyen $z = a + bi$ egy komplex szám, és konstruáljuk meg egy négyzetgyökét. (Ha van több is, akkor persze mindet.)

Keressük azt az $u+vi$ számot, amelynek a négyzete $a+bi$, vagyis $u^2-v^2+2uvi = a + bi$, azaz $u^2 - v^2 = a$ és $2uv = b$.

1. Ha $z = 0$, vagyis $a = b = 0$, akkor $u^2 = v^2$ és $uv = 0$, ezért $u = v = 0$ az egyetlen lehetséges megoldás, 0 a négyzetgyök.

2. Ha $b = 0$, akkor u vagy v nullával egyenlő. Ha $v = 0$, akkor $a = u^2 \geq 0$, ezért $\pm\sqrt{a}$ a négyzetgyök, ha $u = 0$, akkor $a = -v^2 \leq 0$, ezért $\pm\sqrt{-a}$ a négyzetgyök.

3. **Egyébként** mivel $b \neq 0$, sem u, sem v nem nulla, vagyis ekkor

$$v = \frac{b}{2u}, \quad v^2 = \frac{b^2}{4u^2}, \quad u^2 - \frac{b^2}{4u^2} = a.$$

$$4u^4 - 4au^2 - b^2 = 0$$

Megoldása (mint u^2-ben másodfokú valós együtthatós egyenlet): $u_{1,2}^2 = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$. A negatív előjelű négyzetgyökre a tört negatív (mert a négyzetgyök alatt a^2-nél nagyobb szám áll), így az nem megoldás. Vagyis $u^2 =$

$\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, amiből $u_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2}}$. Ebből a megfelelő $v_{1,2}$ is kiszámítható, hiszen úgy választottuk meg u-t és v-t, hogy $v = \dfrac{b}{2u}$.

Ekkor

$$u_1 + v_1 = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2}} + \frac{b}{2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2}}},$$

illetve

$$\begin{aligned} u_2 + v_2 &= -\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2}} + \frac{b}{-2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2}}} = \\ &= -\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2}} - \frac{b}{2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2}}}. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a kapott két gyök ($u_1 + iv_1$, illetve $u_2 + iv_2 = -u_1 - iv_2 = -(u_1 + iv_1)$) éppen egymás ellentettjei.

Az is kiderült tehát, hogy ha $z \neq 0$, akkor *két* négyzetgyök van, amelyek egymás ellentettjei. $\square$

1.3.2. Megjegyzés *A 18. oldalon található 4. feladat alapján tudjuk, hogy nem lehet egy komplex számot pozitívnak vagy negatívnak nevezni, mert nincs műveletrtartó rendezés a komplex számokon.*

Eszerint „előjelük” szerint nem tudjuk megkülönböztetni a két négyzetgyököt, hiszen nincs nekik olyan. Más módon természetesen meg tudjuk különböztetni őket.

1.4. Polinomegyenletek megoldóképletéről

Az $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ alakú kifejezést *polinomnak* nevezzük, az $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ egyenletet pedig *polinomegyenletnek*. Polinomegyenletek megoldásával a későbbiekben majd még részletesebben foglalkozunk.

Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletet másodfokú (polinom)egyenletnek nevezzük.

A másodfokú polinomegyenletet (természetesen nem ilyen néven) már az ókorban meg tudták oldani (bizonyos esetekben). A megoldóképlet napjainkban középiskolai tananyag, és semmi nehezen követhető logikai lépés nincs benne, egyszerűen levezethető. A teljes és precíz megoldóképletre mégis sokáig kellett várni, mert az algebrai háttér nem volt hozzá kidolgozva.

Most, hogy már ismerjük a komplex számokat, egy kicsit szélesebb a látókörünk, újragondolhatjuk, amit ezekről az egyenletekről tudunk.

A valós másodfokú polinomegyenletnek akkor van valós megoldása, ha az egyenlet diszkriminánsa nemnegatív. Ha a diszkrimináns nulla, akkor – a gyöktényezős alak alapján – azt mondjuk, hogy két egyenlő valós gyök van, pozitív diszkrimináns esetén pedig két különböző valós gyök van.

A komplex együtthatós másodfokú polinomegyenletek megoldóképletét a komplex számok körében pontosan ugyanúgy lehet levezetni, mint a valós számokon (minden algebrai lépés érvényes a komplex számokon is). Miután minden komplex számnak van négyzetgyöke, biztosak lehetünk benne, hogy minden másodfokú egyenlet megoldható. (Nincs olyan, amikor a „diszkriminánsból" ne tudnánk négyzetgyököt vonni.) Ez egyszersmind azt is jelenti, hogy a valós együtthatós másodfokú egyenleteknek a komplex számok körében mindig van gyöke. (Csak komplex együtthatós egyenletként kell rájuk gondolni.) Ha tehát a valós együtthatós másodfokú polinomegyenlet diszkriminánsa negatív, akkor két komplex gyöke van.

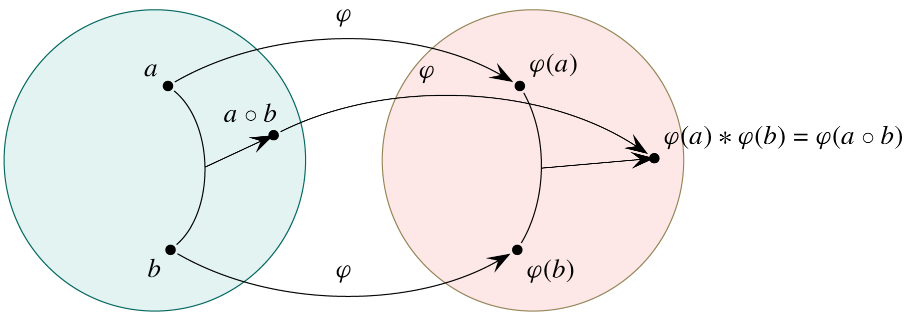
Az $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, vagyis a harmadfokú (polinom)egyenletek megoldásához viszont hosszú, verejtékes út vezetett, és új (a komplex) számokat kellett bevezetni. (Meglepő módon a másodfokú egyenletek megoldásához még nem érezték szükségesnek a negatív számból való négyzetgyökvonás lehetőségét. Emögött az rejlik, hogy az irracionális számok ugyan elképzelhetetlenek, de mégiscsak léteznek – például az egység oldalú négyzet átlójának a hossza –, olyan szám azonban „nem létezik", amelyet négyzetre emelve negatív valós számot kapunk – hacsak nem képzeletben.)

A megoldások – mint majd látni fogjuk – nem rendezhetők olyan egyszerű, zárt formulába, mint a másodfokú egyenlet gyökei.

A negyedfokú egyenletre lehet ugyan megoldóképletet (és néhány feltételt) megadni; ám az ötöd- vagy annál magasabb fokú polinomok gyökeinek képletben történő megadása már **lehetetlen!** (Ezt Niels Abel bizonyította.)

Ismereteink szerint Gerolamo Cardano (1501–1576) olasz tudós volt az első, aki – 1545-ben Arc Magna című könyvében – publikálta a harmadfokú egyenlet általános megoldóképletét. Niccolò Fontana Tartaglia (1500–1557) állította, Cardano tőle hallotta a megoldóképletet, és titoktartási ígérete ellenére publikálta. A negyedfokú egyenlet általános megoldása Cardano tanítványának, Lodovico Ferrari (1522–1565) nevéhez fűződik.

A komplex számok halmazáról először persze nem tudták, hogy „létezik” (vagyis hogy lehet olyan algebrai struktúrát készíteni, amelyben minden valós számnak van négyzetgyöke). Ennek ellenére „léteznek” a komplex számok (csak annyira, mint a természetes számok), többféle modell is adható rájuk, és két ilyen modell között *izomorfia* (1.1. ábra), algebrai azonosság áll fenn: a halmazok között létesíthető műveletettartó bijektív leképezés, vagyis az egyikben adott számokon elvégzett művelet eredményének a képe ugyanaz, mint az adott elemek képén elvégzett (másik halmazbeli) művelet eredménye. (Létezik a két halmaz között műveletettartó bijekció, úgynevezett *izomorfizmus*.)



1.1. ábra. Struktúrák közti izomorfizmus

Feladatok

1. Igazolja a komplex számok bevezetésében kimondott „minden (a, b) számpár egyértelműen felírható $(a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$ alakban” állítást!

2. Fejezze ki $\sqrt{-10}$ segítségével

   (a) $\sqrt{3}$-at,

   (b) $\sqrt{-3}$-at,

   (c) $\sqrt{1}$-et,

   (d) $\sqrt{10}$-et,

   (e) $\sqrt{0{,}1}$-et,

   (f) $\sqrt{-0{,}1}$-et

3. Végezze el a következő műveleteket!

   (a) $i + 1 + 2i - 1$

   (b) $(i + 1)(2i - 1)$

   (c) $(3i + 1)(-3i + 1)$

   (d) $(1 - i)^2$

   (e) $\dfrac{1}{i}$

4. A komplex számok körében nem lehet művelettartó rendezést definiálni. Ha ugyanis azt feltételezzük, hogy $0 < i$, akkor i ellentettje, $-i$ nyilván negatív: $-i < 0 < i$. A 0-nál nagyobb i-vel szorozva az egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy $-(-1) < 0 < -1$, vagyis $1 < 0 < -1$.

   Igazolja, hogy ha azt feltételezzük, hogy $0 > i$, akkor is ellentmondásra jutunk!

5. Határozza meg x és y értékét úgy, hogy a $(xi+3)(4i-y)$ szorzat 0 legyen!

6. Számítsa ki a következő hatványokat!

   i^3, i^4, $(2i)^2$, $(1 + i)^2$, $(1 - i)^2$, $(1 + i)^3$, $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^7$

7. A másodfokú egyenlet megoldóképlete segítségével keresse meg a következő másodfokú egyenletek megoldásait!

   (a) $x^2 - 2x + 4$

   (b) $x^2 - x + 2$

   (c) $2x^2 + x + 5$

   (d) $x^2 + x + 1 = 0$

   (e) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

   (f) $x^2 - x + 3 = 0$

2. Komplex számok algebrai és trigonometrikus alakja

Szokás a komplex számokat az ábécé végén szereplő betűkkel jelölni. Ez csupán egy konvenció, esetünkben mindössze azt a célt szolgálja, hogy feltűnően meg tudjuk különböztetni a valós számokat a komplex számoktól. (Megjegyezzük, hogy minden valós szám egyben komplex is, tehát inkább azt kellene mondanunk, hogy a valós, illetve a komplex számként kezelt számokat különböztetjük meg ezzel.) A későbbiekben nem fogunk ragaszkodni ehhez a konvencióhoz. Ha megismerjük a komplex számokon értelmezett műveletek alapvető tulajdonságait, nem teszünk többet különbséget valós és komplex szám között.

2.1. A komplex számok szemléltetése

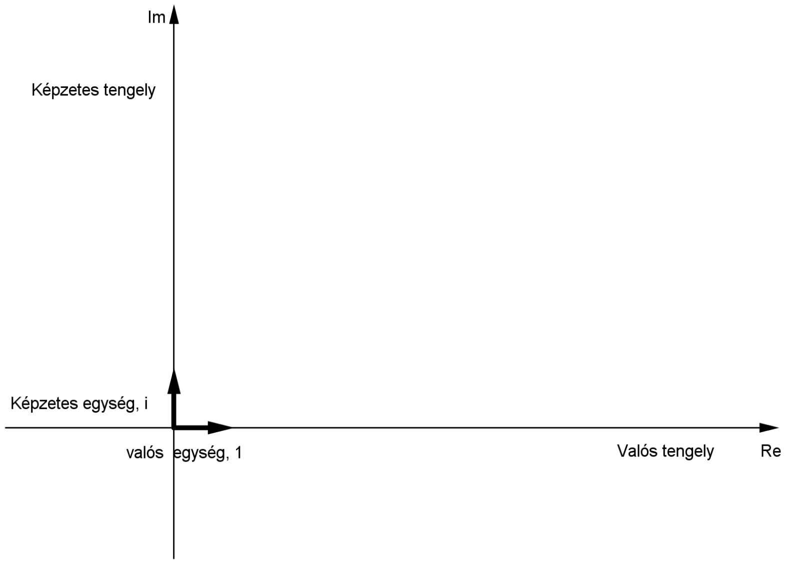
2.1.1. Definíció. *A komplex számok $a + bi$ alakját (ahol a és b valós számok)* algebrai alaknak *nevezzük. Ebben a felírásban a-t* valós résznek, *bi-t* képzetes résznek *nevezzük.*

Ha $a = 0$ és $b \neq 0$, akkor a számot tiszta képzetesnek *nevezzük. (Ha $b = 0$, akkor pedig valósnak.)*

2.1.2. Példa. *A $3 + 4i$ komplex szám valós része 3, képzetes része $4i$. $4i$ tiszta képzetes (szám).*

A komplex számokat (a valósokhoz hasonlóan) hasznos lehet ábrázolni. A valós számokat (szám)egyenesen ábrázoltuk, logikusan adódik a gondolat, hogy a két valós számmal meghatározott komplex számokat (valós számpárként) a síkban, Descartes-féle koordináta-rendszerben ábrázoljuk. Ezt *komplex koordinátasíknak* szokás nevezni. (2.1. ábra)

2.1.3. Definíció. *A koordináta-rendszer $(a; b)$ koordinátájú pontjának feleltessük meg az $a + bi$ komplex számot. Az egyik (x-nek megfelelő) tengely neve*



2.1. ábra. A komplex koordinátasík

valós tengely, *jelölése* $\Re$ *vagy Re, az egysége az* 1*, ezen szemléltetjük a komplex szám valós részét; a másik (y-nak megfelelő) tengely neve* képzetes (vagy imaginárius) tengely, *jelölése* Im *vagy Im, az egysége az* i*, ezen szemléltetjük a komplex szám képzetes részét.*

Az 1*-et* valós egységnek, *az* i*-t* képzetes egységnek *szokás nevezni.*

Később látni fogjuk, hogy az $a + bi$ komplex számot nemcsak az $(a; b)$ ponttal, hanem az oda mutató helyvektorral is lehet – és érdemes is – azonosítani.

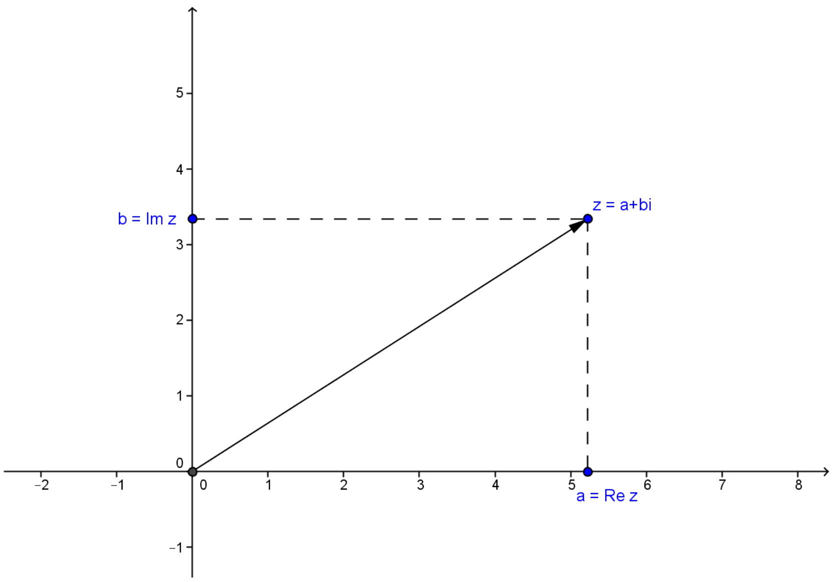
2.1.4. Definíció. *A* $z = a + bi$ *komplex számnak megfeleltetett* $(a; b)$ *pontot a szám* geometriai alakjának *nevezzük. (2.2. ábra)*

Sokszor fogjuk az $(a; b)$ pont helyett az oda mutató helyvektort szerepeltetni. A komplex számok szemléltetéséhez valójában éppen a helyvektor lesz hasznunkra.

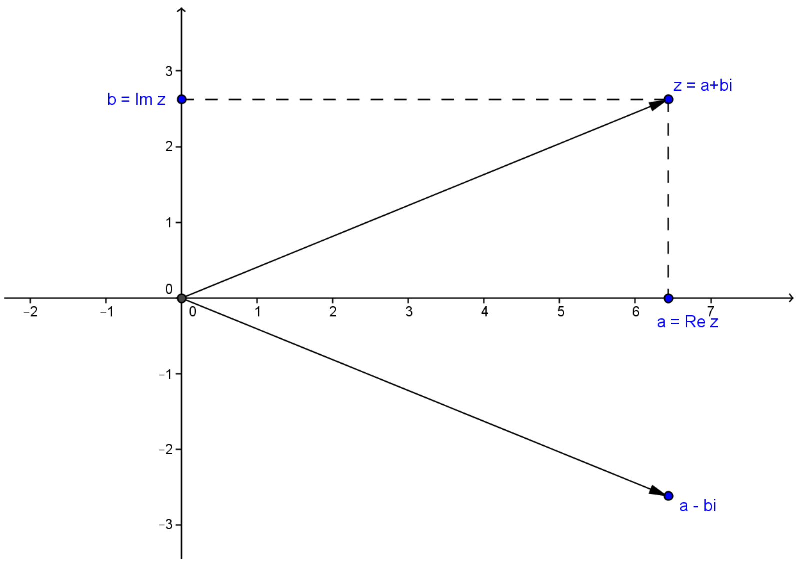
Korábban – a komplex számmal való osztáshoz – az $a + bi$ alakú számmal való osztás során gyöktelenítettünk, ehhez a törtet bővítettünk egy $a - bi$ alakú számmal.

2.1.5. Definíció. *A* $z = a + bi$ konjugáltja *a* $\overline{z} = a - bi$ *(z felülvonás).*

2.1.6. Állítás *A z konjugáltjának az a pont felel meg a komplex síkon, amely z-nek a valós tengelyre vonatkozó tükörképe. (2.3. ábra)*



2.2. ábra.



2.3. ábra.

2.1.7. Példa. $\overline{-1+i} = -1-i$, $\overline{3-2i} = 3+2i$, $\overline{1+i} = 1-i$.

Kiszámítható, hogy $z \cdot \overline{z}$ valós szám: a z komplex szám $a+bi$ algebrai alakjából $z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$, ami valóban valós szám, hiszen a és b is valós.

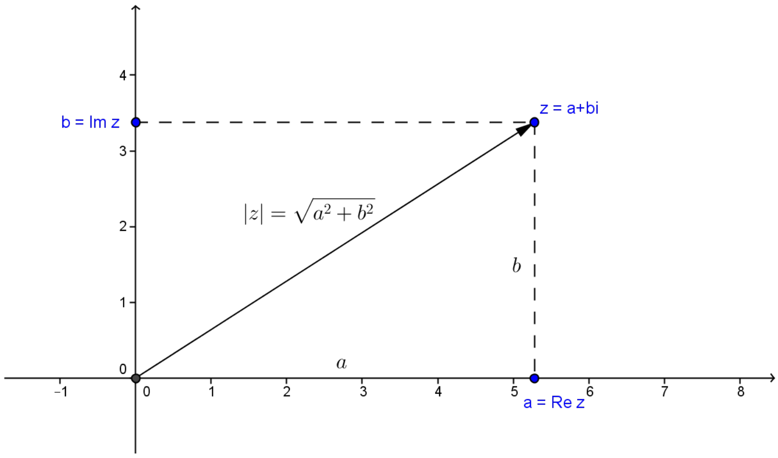
2.1.8. Állítás $\overline{\overline{z}} = z$.

Bizonyítás. Ha $z = a + bi$, akkor $\overline{z} = a - bi$, $\overline{\overline{z}} = \overline{a - bi} = a + bi$. $\square$

Ezek alapján mondhatjuk, hogy a z és a $\overline{z}$ egymás konjugáltjai.

A valós számok körében egy szám abszolút értéke a 0-tól mért távolsága. A komplex számok esetében is felírható ez a távolság, mégpedig (a koordinátarendszerben megszokott módon) a Pitagorasz-tétel felhasználásával:

2.1.9. Definíció. *A $z = a+bi$ komplex szám abszolút értéke a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (nemnegatív valós) szám. Ez a távolság csak $z = 0$ esetén 0. A z szám abszolút értékét szokás $|z|$-vel vagy egyszerűen r-rel jelölni. (2.4. ábra)*



2.4. ábra.

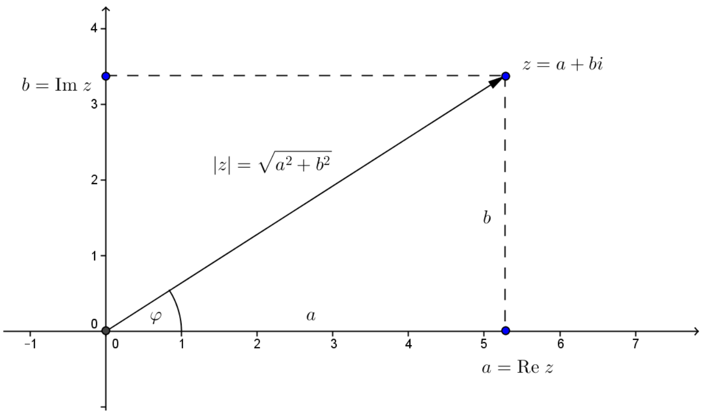
2.1.10. Megjegyzés *Vegyük észre, hogy $z \cdot \overline{z}$ éppen $|z|^2$.*

2.2. A komplex számok trigonometrikus alakja

Tovább folytatva a szemléltetés módjából adódó lehetőségek kiaknázását: ahogyan minden síkbeli pontot azonosíthatunk (az origóból abba a pontba mutató) helyvektorral, úgy a komplex számokkal is megtettük, hogy azonosítjuk a neki megfelelő pontba mutató helyvektorral.

A vektort viszont jellemezhetjük a hosszával – komplex számok esetében ez az abszolút értékük –, valamint az irányukkal, amit a vektornak a valós pozitív féltengelyhez viszonyított elfordulás szögeként fogunk értelmezni. (Mekkora szöggel kell elforgatni a pozitív valós féltengelyt ahhoz, hogy az a pontba mutató vektor félegyenesébe essen.)

Ne feledkezzünk meg róla, hogy a hosszúság *mindig* nemnegatív valós szám.



2.5. ábra.

2.2.1. Definíció. *Egy z komplex számnak megfeleltetett pontba mutató helyvektorhoz tartozó irányított forgásszöget a komplex szám* irányszögének, argumentumának *vagy* arkuszának *nevezzük, és így jelöljük:* $\mathrm{arc}(z)$. *A komplex nulla szöge megállapodás szerint tetszőleges szög lehet. Ha szükséges, akkor erről alkalmasint másként döntünk.*

Az abszolút érték és arkusz egyértelműen meghatározza a komplex számot.

Felvetődik a kérdés, hogy vajon a komplex számból is meghatározható-e egyértelműen az abszolút értéke és az arkusza.

A fenti módon definiált arkusz meghatározható az algebrai alakból (lásd 2.2.2. állítás), azonban nem egyértelmű, hiszen 2π egész számú többszörösével növelve ugyanazt a komplex számot kapjuk. Ez a tulajdonság még sok fejtörést fog okozni nekünk – amellett, hogy hasznunkra is válik majd.

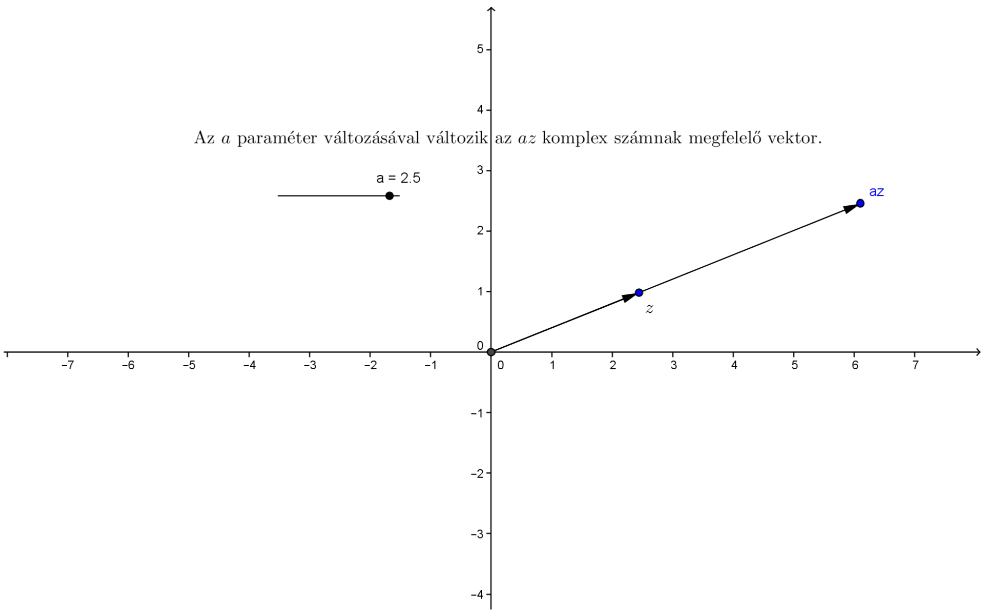
(Az abszolút érték egyértelműsége felől meg lehetünk nyugodva, az egy nemnegatív valós szám, és 0 is csak akkor lehet, ha a 0 komplex számról van szó.)

2.2.2. Állítás *Az $a + bi$ komplex szám* egyik *arkusza* $\mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{b}{a}$, *ha $b > 0$, és* $\pi + \mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{b}{a}$, *ha $b < 0$. ($b = 0$ esetén 0 az* egyik *arkusz.)*

2.2.3. Állítás *Egy z komplex szám a skalárszorosának megfelelő vektor a z-nek megfeleltetett vektor a-szorosa.*

Ezt a nyilvánvaló állítást a

www.cs.elte.hu/~kfried/algebra2/komplexskalarralszorzas.html



2.6. ábra. komplex szám valós számmal való szorzata

animáció szemlélteti. (A képernyő jobb alsó sarkában megállítható és újraindítható az animáció,a z pont helye változtatható.)

2.2.4. Állítás *Egy z komplex szám i-szeresének megfelelő vektor a z-nek megfeleltetett vektor $+90°$-os elforgatottja.*

Ezt a

www.cs.elte.hu/~kfried/algebra2/komplex_szer_i.html

animáció szemlélteti. A z helyzetével változik az iz helyzete.

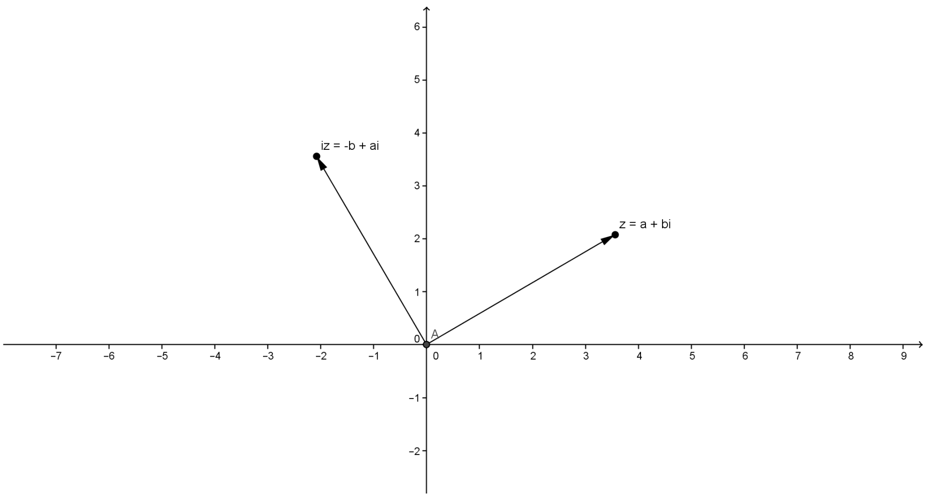
2.2.5. Definíció. *A z komplex szám $(|z|; \mathrm{arc}(z))$ alakját* polárkoordinátás *felírásának nevezzük.*

2.2.6. Definíció. *Jelölje a z komplex szám elfordulási szögét φ. Mivel a z valós része a valós tengelyre eső vetülete: $|z|\cos\varphi$, a képzetes része pedig a képzetes tengelyre eső vetülete: $|z|\sin\varphi$, az adott komplex szám felírható*

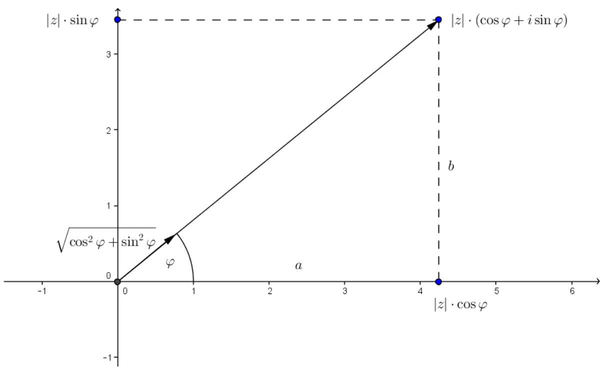
$$z = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

alakban is.

A z komplex szám $|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ felírását a szám trigonometrikus alakjának *nevezzük.*



2.7. ábra. komplex szám i-szerese



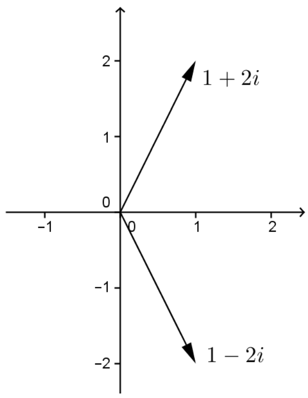
2.8. ábra.

Vegyük észre, hogy a $\cos\varphi + i\sin\varphi$ maga is egy komplex szám, amelynek a hossza $\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$. (Ez most valós négyzetgyök, tehát egyértelmű!) A z komplex szám trigonometrikus alakja tehát egy nemnegatív valós szám (a komplex szám abszolút értéke) és egy egység hosszúságú irányvektor szorzata.

Láttuk, hogy egy komplex szám algebrai alakjából meghatározható a trigonometrikus alak.

A trigonometrikus alakból pedig megkapható az algebrai alak: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ esetén nagyon egyszerűen $z = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi$ a szám algebrai alakja.

A komplex szám trigonometrikus alakja egyértelműen meghatározza a komplex számot, mert bár ha például α az arkusza, akkor $\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$) egy



2.9. ábra.

másik arkusz, de mivel a szögfüggvényeik megegyeznek, ugyanazt a komplex számot határozzák meg.

2.2.7. Példa. *Az* $1 + 2i$ *komplex szám*

konjugáltja: $1 - 2i$

abszolút értéke: $\sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

geometriai felírása: $(1; 2)$

forgásszöge: $\operatorname{arc\,tg} 2 + k \cdot 2\pi (\approx 63{,}435^\circ + k \cdot 360^\circ)$

trigonometrikus alakja: $\sqrt{5} \cdot \cos(\operatorname{arc\,tg} 2) + i\sqrt{5} \cdot \sin(\operatorname{arc\,tg} 2)$

Feladatok

1. Szemléltesse ponttal és helyvektorral koordináta-rendszerben a következő komplex számokat!

   $-5 + i$; $1 - 5i$; $2i + 3$; $-3 - i$

2. Adja meg a következő komplex számok trigonometrikus alakját!

   1, -1, $-\sqrt{2}$, i, $-i$, $i\sqrt{2}$, $\overline{-1 + i}$, $2 - 3i$, $\overline{2 + i}$,

3. Mi azon pontok mértani helye, amelyeknek megfelelő komplex számok abszolút értéke 1?

4. Hol helyezkednek el a komplex síkon azok a számok, amelyek abszolút értéke 3; illetve 5?

5. Hol helyezkednek el a komplex síkon azok a számok, amelyek argumentuma $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{5}$; $\frac{3\pi}{2}$?

6. Mi azon pontok mértani helye, amelyeknek megfelelő komplex számok argumentuma $\frac{\pi}{6}$?

7. Milyen közös tulajdonsággal rendelkeznek azok a komplex számok, amelyek az $1+i$ helyvektorának egyenesébe esnek?

8. Határozza meg azon z komplex számokhoz tartozó pontok mértani helyét, amelyekre teljesül, hogy

   (a) $|z| < 2$

   (b) $|z - i| \leq 1$

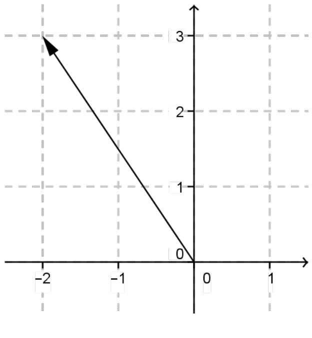
   (c) $|z - 1 - i| < 1$

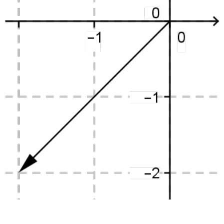
9. Írja fel egyenlőtlenséggel azon komplex számok halmazát, amelyekhez rendelt pontok a komplex sík $(2; 1)$ középpontú, 2 sugarú körének belsejében találhatók!

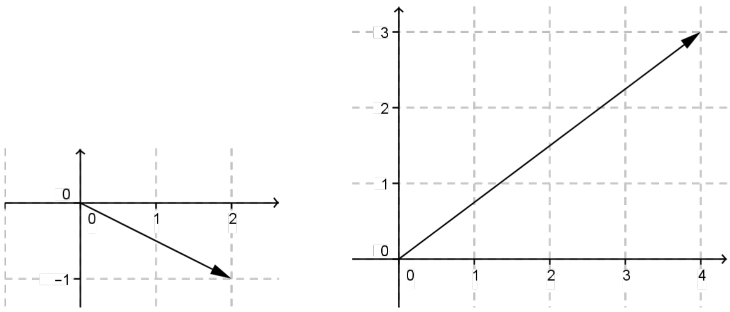
10. Hol helyezkednek el a komplex síkon azok a számok, amelyek argumentuma $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{4\pi}{3}$; $-\frac{4\pi}{3}$?

11. Szemléltesse helyvektorral a koordináta-rendszerben a következő komplex számokat!
$3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$; $5\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;
$-2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; $-5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

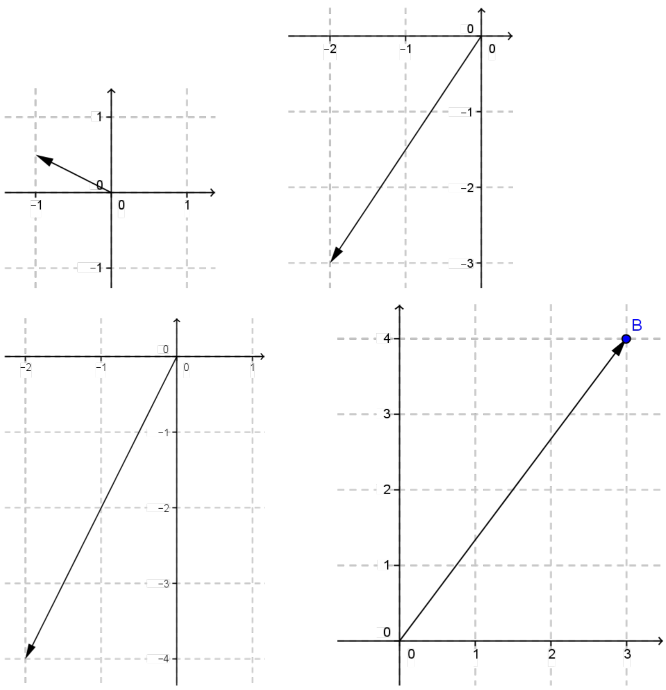
12. Adja meg az alábbi ábrákon szemléltetett komplex számok algebrai alakját! Számítsa ki az abszolút értéküket, argumentumukat, és adja meg a konjugáltjukat!







13. Adja meg a következő ábrákon szemléltetett komplex számok algebrai és trigonometrikus alakját!



14. Keresse meg azokat a kifejezéseket, amelyek ugyanazt a komplex számot adják meg!

    (a) $1-i$; $\sqrt{2}(\cos 335^\circ + i\sin 335^\circ)$; $i+1$; $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$; $-i+1$;

    (b) $2(\cos\pi + i\sin\pi)$; $-2i$; $2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$; $\overline{2i}$; $|-2|\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; $-2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; -2; $-2i$

15. Oldja meg a következő egyenleteket!

(a) $|x| - x = 1 + 2i$

(b) $|x| + x = 2 + i$

3. Alapműveletek a komplex számokon

3.1. Komplex számok összegének, szorzatának szemléltetése

A valós számokból kiindulva értelmeztünk a komplex számokon egy összeadást és egy szorzást. Vizsgáljuk meg, hogy a geometriai szemléltetés segítségével hogyan ábrázolhatjuk ezen műveletek eredményét.

A $z_1 = a_1+b_1i$ és a $z_2 = a_2+b_2i$ számok összege $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$. A z_1+z_2-be mutató helyvektor éppen a z_1 és a z_2 számoknak megfeleltetett helyvektorok összege. (Az $(a_1; b_1)$ és $(a_2; b_2)$ vektorok összege az $(a_1 + a_2; b_1 + b_2)$ vektor.)

3.1.1. Állítás *Két komplex számnak megfeleltetett vektor összege éppen a számok összegének megfeleltetett vektor.*

Ezt az 3.1 ábra szemlélteti, és a

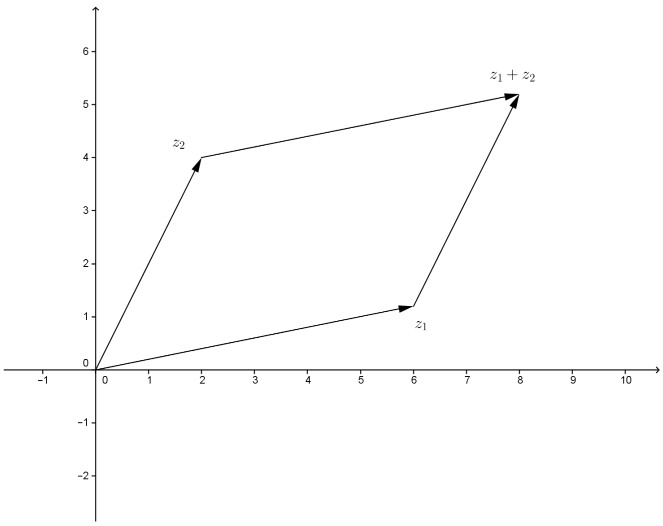
www.cs.elte.hu/~kfried/algebra2/komplex_osszeg.html

animáció mutatja a komplex számok összegének vektorösszegént való megrajzolását: A „Lejátszás” gombra kattintva elindul a szerkesztés. z_1 és z_2 helyzete megváltoztatható.

Az ellentettet is tudjuk szemléltetni, hiszen az $a + bi$ ellentettje $-a - bi$, így az ellentettnek megfelelő pont a $(-a; -b)$.

Ezért a $z_1 - z_2$ komplex számnak megfelelő helyvektor a z_1-be, illetve z_2-be mutató helyvektorok különbsége.

Az ellentett a z komplex szám (-1)-szerese, de nemcsak a (-1)-szeres, hanem tetszőleges valós számmal vett szorzata szemléltethető. Ha $a+bi$ komplex szám, c valós számok, akkor az $a + bi$ komplex számnak megfeleltetett helyvektor az



3.1. ábra. Komplex számok összege

$(a; b)$, a c-szeresének megfeleltetett helyvektor az $(ac; bc)$, ami éppen az $(a; b)$ vektor c-szerese.

3.1.2. Állítás *Eszerint egy komplex szám egy valós számszorosának megfeleltetett vektor éppen a szám adott számszorosának megfeleltetett vektor.*

Ez a két megállapítás rendkívül fontos, mert ezek alapján olyan egy-egyértelmű megfeleltetés létesíthető a komplex számok és a sík helyvektorai között, amelyek az összeadás és a valós számmal való szorzás műveletét megtartják. (Bizonyos műveleteket megtartó bijekció.)

Eszerint ha egy, a komplex számokra vonatkozó

A $z_1 = a_1 + b_1 i$ és a $z_2 = a_2 + b_2 i$ számok szorzata felírható $a_1 z_2 + b_1 z_2 i$ alakban.

Először rajzoljuk le a $z_2 = a_2 + b_2 i$-nek megfeleltetett helyvektort. A végpontjának koordinátái: (a_2, b_2). Ennek a_1-szerese a vektor a_1-szeres nyújtását eredményezi.

Most vizsgáljuk z_2-nek az i-szeresét: $-b_2 + a_2 i$. Ez a z_2 helyvektorának $+90°$-kal történő elforgatásával kapható. Ha most megszorozzuk b_1-gyel, akkor a koordináták b_1-szeresét kapjuk, vagyis a $z_2 i$-nek b_1-szeres nyújtását kapjuk.

Mivel a két kapott vektor összege a szorzat, egymás után fűzve összeadjuk őket. A $b_1 i z_2$ helyvektor végpontjához toljuk az $a_1 z_2$ vektort.

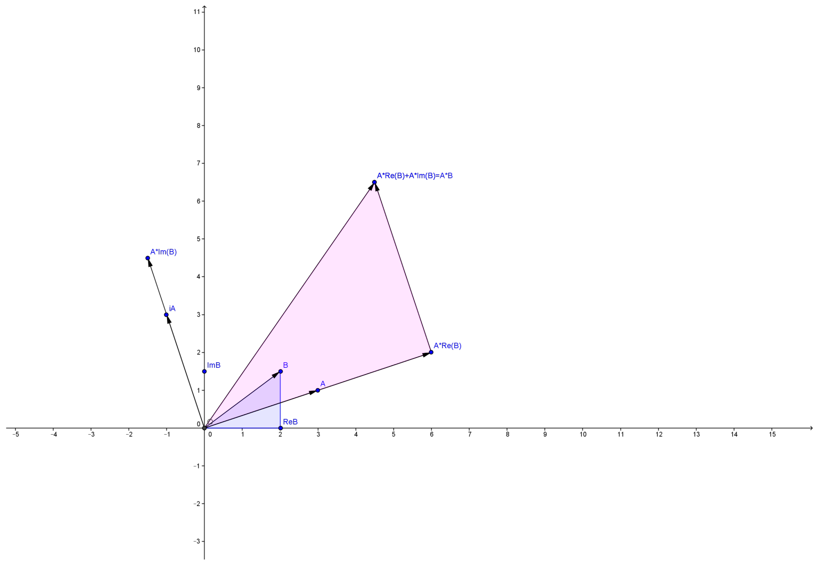
A két vektor olyan háromszöget feszít ki, amelynek a csatlakozásnál derékszög van; hasonló a z_1 és annak valós része által kifeszített háromszöghöz. A hasonlóság aránya $|z_2|$.

Eszerint a két komplex szám szorzatának megfelelő helyvektorhoz tartozó irányított forgásszög egyenlő az $\mathrm{arc}(z_2) + \mathrm{arc}(z_1)$ összeggel, a hossza pedig a $|z_2|$ hosszának $|z_1|$-szerese. A

www.cs.elte.hu/~kfried/algebra2/komplexszorzat.html

animáció mutatja a szorzat szerkesztésének lépéseit.

A képernyő alján a „Lejátszás" gombra kattintva indul el a szerkesztés. A és B (a komplex számoknak megfelelő pont) helyzete változtatható. A lejátszás lassítható, gyorsítható, megállítható és újraindítható.



3.2. ábra. komplex számok szorzata

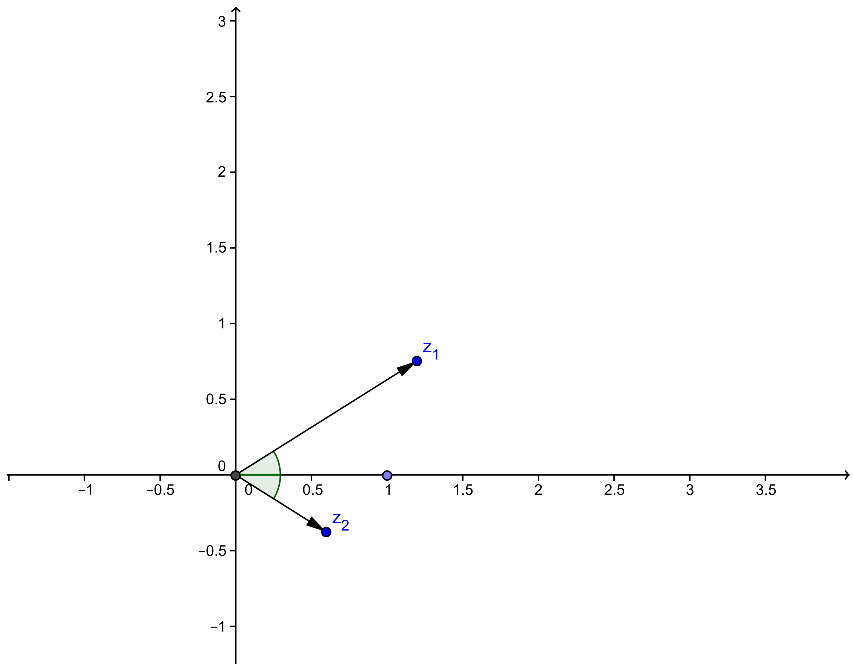
Két komplex szám szorzatának arkusza tehát a számok arkuszainak összege, hossza pedig a tényezők hosszának szorzata.

3.1.3. Következmény. *Ha egy z_1 komplex számot megszorzunk egy z_2 komplex számmal, akkor a z_1-nek $\mathrm{arc}(z_2)$-vel való elforgatottjának $|z_2|$-vel való nyújtását kapjuk eredményül.*

A 3.3 ábrán látható szerkesztést alapján a

www.cs.elte.hu/~kfried/algebra2/komplexreciprok.html

animáció mutatja a komplex szám reciprokának helyzetét a komplex síkon. (z helyzete változtatható.)



3.3. ábra. komplex szám reciproka

Ebből következtethetünk *egy komplex szám reciprokának szemléltetésére* is.

Ha a nullától különböző z-re $zw = 1$, akkor a hosszaik szorzata 1, szögeik összege 0. Ezért w hossza a z hosszának reciproka, w arkusza z arkuszának ellentettje. A w-nek megfelelő helyvektor polárkoordinátás alakja: $w = \left(\frac{1}{|z|}; -\operatorname{arc}(z)\right)$.

3.2. Műveletek a trigonometrikus alakkal

Láttuk, hogy a komplex számok összeadását, kivonását az algebrai alakkal egyszerűen el tudjuk végezni. A szorzást is, az osztás azonban már kicsit komplikáltabb, a négyzetgyökvönás pedig kész szenvedés (lehet).

Ugyanakkor azt is észrevettük, hogy a műveleteket a geometriai alakkal is el tudjuk végezni. Az osztás elvégzése is egyszerűen visszavezethető a reciprokképzésre és a szorzásra.

Vizsgáljuk meg, hogy a trigonometrikus alakkal hogyan fejezhetők ki ezeknek a műveleteknek az eredményei.

Legyen $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Az összegük: $r_1 \cos\varphi_1 + r_2 \cos\varphi_2 + i(r_1 \sin\varphi_1 + r_2 \sin\varphi_2)$ láthatóan nem trigonometrikus alak, és nem is lenne kellemes feladat felírni ennek a komplex számnak a trigonometrikus alakját.

Az ellentett jóval egyszerűbb, mert például $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ellentettje $-z = -r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, aminek trigonometrikus alakja $-z = r\big(\cos(\varphi+\pi) + i\sin(\varphi+\pi)\big)$, azonban ez sem segít abban, hogy a komplex számok különbségének trigonometrikus alakját egyszerűen fel tudjuk írni.

A szorzatuk:

$$r_1 r_2\big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\big).$$

Az ismert trigonometrikus összegüggések felhasználásával megkapjuk a szorzat trigonometrikus alakját:

$$r_1 r_2 = r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big).$$

Ez a geometriai szemléltetéssel kapott eredményt támasztja alá: a szorzat hossza a tényezők hosszának szorzata, argumentuma a tényezők argumentumának összege.

Az osztás felfogható egy szám reciprokával való szorzásként. Felírtuk egy tetszőleges $z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ($r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$) szám reciprokát algebrai alakban:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2},$$

Határozzuk meg a trigonometrikus alakját is! A z (nem nulla) komplex szám reciproka az a komplex szám, amellyel $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$-t megszorozva $1 = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$-t kapunk. A szorzásra kapott összefüggést felhasználva

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\cdot\big(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\big)$$

egy lehetséges megoldás. (Tudjuk, hogy az argumentum nem egyértelmű, ezért írtuk, hogy ez *egy* megoldás. A komplex számokon a reciprokképzés egyértelmű, így azt is tudhatjuk, hogy az összes trigonometrikus alakban megadott reciprok ugyanazt a komplex számot jelenti.)

Ebből felírható az osztás trigonometrikus alakban is:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big).$$

Ez az eredmény egyébként a trigonometrikus összefüggéseket felhasználva másképp is megkapható.

A szorzás, a reciprok és a hányados kiszámítása egyszerűbbnek tűnik, mint az algebrai alakkal.

3.2.1. Példa. *Legyen*

$$z_1 = 5(\cos 30° + i \sin 30°), \quad z_2 = \frac{2}{3}\big(\cos(-15°) + i \sin(-15°)\big).$$

Számítsuk ki a $\frac{z_1}{z_2}$ *hányadost!*

Az algebrai alakban bővítenünk kellene a törtet $\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$-tal. Ha felhasználjuk, hogy ehelyett z_2 reciprokával is szorozhatunk, akkor is $\frac{3}{2}\big(\cos(15°) + i \sin(15°)\big)$-kal kell szoroznunk z_1-et. A $\sin 15°$ és $\cos 15°$ felírható négyzetgyökök segítségével.
A z_1 és $\frac{1}{z_2}$ algebrai alakja $\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$, illetve $\frac{3}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + \frac{3}{2}\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}i$.
A szorzatuk algebrai alakban

$$\frac{15\sqrt{3}}{4}\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - \frac{15}{4}\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + \left(\frac{15\sqrt{3}}{4}\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + \frac{15}{4}\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)i,$$

ami nem tűnik elég egyszerűnek.

Ha közelítő értékekkel számolunk, az sem mond többet.

A trigonometrikus alakban tudjuk, hogy a hányados hosszúsága $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{15}{2}$, az argumentuma $\varphi(z_1) - \varphi(z_2) = 45°$. Eszerint a hányadosuk trigonometrikus alakban:

$$\frac{5}{\frac{2}{3}}(\cos 45° + \sin 45° i) = 7{,}5 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right).$$

Láttuk, hogy a szorzás menete sokkal egyszerűbb a trigonometrikus alakban, ám sem az algebrai alakból a trigonometrikust, sem a trigonometrikusból az algebrait nem egyszerű megkapni.

Sőt, még rosszabb a helyzet. Bár a trigonometrikus alakból egyértelmű az algebrai alak, és az algebrai alakból felírható *egy* trigonometrikus alak, ám az nem egyértelmű, hiszen az argumentum 2π szerint periodikus.

3.2.2. Megjegyzés *Foglaljuk össze, milyen műveleteket tudunk elvégezni az algebrai és a trigonometrikus alakkal is:*

1. Tudunk komplex számokat összeadni és szorozni.

2. A kivonás is nyilván elvégezhető, mert az nem más, mint az ellentett hozzáadása, és az $a+bi$ szám ellentettje $-a-bi$.

3. A szorzást is el tudjuk végezni az algebrai és a trigonometrikus alakkal is.

4. Láttuk, hogyan végezhetjük el az osztást az algebrai és a trigonometrikus alakkal.

3.3. Komplex számok összegének, szorzatának konjugáltja, abszolút értéke

Az előzőekben láttuk, hogy a komplex számok egy-egyértelműen megfeleltethetők a sík helyvektorainak, illetve a komplex számokon végzett műveletek a síkban szemléltethetők. Ezt a tényt a műveletek tulajdonságainak igazolásakor időnként fel fogjuk használni.

3.3.1. Állítás *Komplex számok szorzatának abszolút értéke a számok abszolút értékének szorzata:*

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|$$

Bizonyítás. Ugyan éppen ezt a tényt igazoltuk a szorzat trigonometrikus alakjának felírásakor, de az összefüggést algebrai eszközökkel is ellenőrizhetjük: $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$ esetén

$$\begin{aligned}
|z_1z_2| &= \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2} = \\
&= \sqrt{a^2c^2+b^2d^2-2abcd+a^2d^2+b^2c^2+2abcd} = \\
&= \sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2} = \\
&= \sqrt{a^2(c^2+d^2)+b^2(d^2+c^2)} = \\
&= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = |z_1||z_2|,
\end{aligned}$$

mert a^2+b^2 és c^2+d^2 nemnegatív valós számok. □

3.3.2. Állítás *Komplex számok szorzatának konjugáltja a számok konjugáltjának szorzata:*

$$\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

Bizonyítás. $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$ esetén egyrészt

$$\overline{z_1z_2} = \overline{(a+bi)(c+di)} =$$
$$\overline{(ac-bd)+i(ad+bc)} = (ac-bd)-i(ad+bc),$$

másrészt

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - i(ad + bc),$$

vagyis valóban egyenlő a két kifejezés. □

3.3.3. Megjegyzés *A konjugálás a valós tengelyre vonatkozó tükrözés, a szorzat a két helyvektorból (alkalmas szerkesztési lépésekkel) megszerkeszthető.*

Ha a szerkesztés kiinduló adatait tükrözzük, akkor a szorzás eredményeként kapott vektor is az eredeti szorzat tükörképe.

A fenti állítás éppen ezt írja le komplex számok szorzatára.

Ezt a megjegyzésünket a geometriai szemléletre alapozzuk, de a 3.1.1., 3.1.2., 2.1.6. állítások valamint a 3.1.3. következmény segítségével precíz bizonyítássá tehető.

3.3.4. Állítás *Komplex számok összegének konjugáltja a számok konjugáltjának összege:*

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Bizonyítás. $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ esetén

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + c) + i(b + d)} = (a + c) - i(b + d) = a - ib + c - di = \overline{z_1} + \overline{z_2} \;\square$$

3.3.5. Megjegyzés *A konjugálás a valós tengelyre vonatkozó tükrözés, az összeadás a komplex számoknak megfelelő helyvektorok által kifeszített paralelogramma átlóvektora.*

Ha a paralelogrammát tükrözzük, akkor az átlója a tükörkép paralelogramma átlója lesz.

A fenti állítás éppen ezt írja le komplex számok összegére.

Ez a megjegyzés is a geometriai szemléleten alapul, de a 3.1.1., 3.1.2., 2.1.6. állítások valamint a 3.1.3. következmény segítségével precíz bizonyítássá tehető.

Azt remélnénk, hogy a komplex számok összegének abszolút értékére is tudunk ilyen egyenlőséget felírni. Sajnos azonban ez nem igaz, hiszen már a valós számok körében sem teljesül, például $8 = |5| + |-3| \neq |5 - 3| = 2$.

Ehelyett a vektorok köréből ismert háromszög-egyenlőtlenségek teljesülnek:

3.3.6. Állítás *Tetszőleges* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *vektorokra*

1. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$

2. $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \geq \big||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|\big|$

Egyenlőség csak abban az esetben lehet, ha a vektorok iránya megegyezik.

3.3.7. Állítás *Tetszőleges* a, b *valós számokra*

1. $|a + b| \leq |a| + |b|$

2. $|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$

Egyenlőség csak abban az esetben állhat fenn, ha a*,* b *és* $a-b$ *előjele megegyezik.*

Ezek az összefüggések a komplex számokra azok vektor-szerű tulajdonsága okán egyszerűen igazolhatók.

Ha $a, b \in \mathbb{C}$, és nem egyenlő az argumentumok, akkor az $a+b$ és $a-b$ számoknak megfelelő vektor ugyanis az a és a b számoknak megfeltetett vektorok által kifeszített paralleogramma két átlója, ezek pedig rövidebbek, mint a két oldal együttes hossza.

Vizsgáljuk meg, hogy mit jelent az, hogy két komplex számnak megfelelő helyvektor egyenlő irányú és állású.

Vektorok esetében ez azt jelenti, hogy ugyanabba az egyenesbe, sőt, a közös pontból induló ugyanazon félegyenesbe esnek.

Komplex számokra pedig azt jelenti, hogy megegyezik az argumentumuk (2π periódus erejéig).

3.3.8. Állítás *A* z_1*,* z_2 *komplex számok esetén*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \tag{3.1}$$

$$|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|, \tag{3.2}$$

és csak $z_2 = \lambda z_1$ *(*$\lambda > 0$ *valós szám) esetén áll fenn egyenlőség.*

Az állítás a vektorokra ismert összefüggésekből következik, de algebrai úton is bizonyítható.

Bizonyítás. Legyen $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$. Ekkor a (3.1) egyenlet átírható:

$$\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}.$$

Mivel minden négyzetgyökjel alatt nemnegatív kifejezések találhatók, a négyzetre emelés ebben az esetben ekvivalens átalakítás:

$$a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 + b_1^2 + b_2^2 + 2b_1b_2 \le a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + 2\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}.$$

Itt a mindkét oldalon szereplő kifejezéseket kivonva, a többit 2-vel osztva és a négyzetgyökjel alatt elvégezve a beszorzást:

$$a_1a_2 + b_1b_2 \le \sqrt{a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2}.$$

Ha a bal oldalon negatív szám áll, akkor nyilvánvaló az egyenlőtlenség, ha viszont nemnegatív szám áll ott, akkor a négyzetre emelés ismét ekvivalens átalakítás:

$$a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 \le a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2,$$

ahonnan

$$2a_1a_2b_1b_2 \le a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2,$$

a bizonyítandó. Átrendezve a

$$0 \le a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2 = (a_1b_2 + a_2b_1)^2$$

nyilvánvaló egyenlőtlenséget kapjuk.

A (3.2) egyenlőtlenség bizonyításához tegyük fel először, hogy $|z_1| \ge |z_2| = |-z_2|$. Ekkor persze $\big||z_1| - |z_2|\big| = |z_1| - |z_2|$. Írjuk fel $z_1 + z_2$ és $-z_2$ számokra a (3.1) egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 + (-z_2)| &\le |z_1 + z_2| + |-z_2|, \\ |z_1| &\le |z_1 + z_2| + |z_2|, \\ |z_1| - |z_2| &\le |z_1 + z_2|, \\ \big||z_1| - |z_2|\big| &\le |z_1 + z_2|, \end{aligned}$$

azaz (3.2) adódik.

Ha $|z_1| \le |z_2|$, akkor $z_2 + z_1$ és $-z_1$ vektorokra felírva (3.1)-et hasonlóan adódik az állítás. □

3.3.9. Megjegyzés *A fentiek alapján elmondhatjuk, hogy a komplex sík egyes transzformációit a komplex számokon elvégzett műveletekkel is meg lehet adni. A sík origó körüli elforgatása egy egység hosszúságú komplex számmal való szorzással valósítható meg, a valós tengelyre vonatkozó tükrözés a konjugálással, az origó középpontú nyújtás egy valós számmal való szorzással, míg az eltolás a komplex összeadással adható meg. Nem ennyire nyilvánvaló, de belátható, hogy az origó középpontú, 1 sugarú körre vonatkozó inverzió és a valós tengelyre vonatkozó tükrözés leképezéseknek a szorzata éppen a komplex reciprok.*

Feladatok

1. Igazolja, hogy $\overline{z_1 + z_2 z_3} = \overline{z_1} + \overline{z_2 z_3}$
2. Igaz-e, hogy $|z_1 + z_2 z_3| = |z_1| + |z_2 z_3|$?
3. Igazolja, hogy bármely z komplex számra $z\overline{z}$ valós!
4. Igazolja, hogy bármely z komplex számra $z + \overline{z}$ valós!
5. Keresse meg, hogy adott $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ számokhoz mely w számok esetén lesz $z\overline{w}$ valós!
6. Keresse meg, hogy adott $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ számokhoz mely w számok esetén lesz $z + \overline{w}$ valós!
7. Keresse meg, hogy adott $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ számokhoz mely w számok esetén lesz $z\overline{w}$ és $z + \overline{w}$ is valós!
8. Igazolja (komplex számok segítségével) a trigonometrikus összegképleteket:

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

9. Határozza meg a és b értékét, ha $a + bi = b - ai$!
10. Milyen valós x és y értékekre teljesül, hogy $ax + bi + a + byi = bx + 2ayi$?
11. Számítsa ki a következő műveletek eredményét! Adja meg ezek trigonometrikus és algebrai alakját is!

    (a) $(1 + i)(1 - i)$

    (b) $\dfrac{2 + 4i}{i - 3}$

    (c) $3(\cos 15° + i \sin 15°) \cdot (5 + 2i)$

    (d) $\dfrac{-2 + 2i}{\cos 45° - i \sin 45°}$

    (e) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i + \cos\dfrac{2\pi}{3} + i \sin\dfrac{2\pi}{3}$

4. Hatványozás, gyökvonás a komplex számok körében

4.1. Hatványozás

Láttuk, hogy miként lehet két komplex szám szorzatát kiszámítani az algebrai alakjukból, illetve szemléltetni azt helyvektorokkal. Most vizsgáljuk meg a hatványozást.

Számítsuk ki például a $1+\sqrt{3}i$ komplex szám négyzetét.

Algebrai alakban:

$$(1+\sqrt{3}i)^2 = 1-3+2\sqrt{3}i = -2+2\sqrt{3}i.$$

Mivel $1+\sqrt{3}i$ hossza $\sqrt{1+3} = 2$, arkusza $\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$, az adott szám trigonometrikus alakja:

$$1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Komplex számok szemléltetésekor megállapítottuk, hogy a szorzat hossza a tényezők hosszának szorzata, szöge a szögeik összege.

Eszerint a négyzetének hossza 4, arkusza $\frac{2\pi}{3}$. A négyzete pedig:

$$4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ebből is megkaptuk az algebrai alakot, és – természetesen – ugyanazt, mint korábban.

A komplex számok szorzására vonatkozó (a trigonometrikus alakhoz felírt) összefüggések szerint

$$z^3 = r^3\big(\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)\big).$$

Sőt, általában is igaz, hogy $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$z^n = r^n\big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big).$$

Ebből az algebrai alak is megkapható:

$$z^n = r^n\cos(n\varphi) + ir^n\sin(n\varphi).$$

Ez közvetlenül az algebrai alak hatányozásából nem jött volna ki.

A hatványozás összefüggéseit már a valós számoknál is a szorzásból vezettük le. Ezért a hatványozáskor a kitevőnek legalább kettőnek kellett lennie.

Ezért az első és a nulladik hatványt csak megállapodás alapján határoztuk meg – annak érdekében, hogy érvényben maradjon a hatványozás $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$ azonossága ($n, k \in \mathbb{N}$, $n, k \geq 2$, $a \in \mathbb{R}$).

Ezt a szándékot *permanencia-elvnek* nevezzük (permanencia = megmaradás).

Megállapodás. A komplex számok körében is megállapodunk, hogy $z^1 = z$ és $z^0 = 1$ (ha $z \neq 0$).

4.1.1. Definíció. [1] *A $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ($z \neq 0$, $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$) komplex szám n-edik hatványának ($n \geq 0$ egész szám)*

$$z^n = r^n\big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big)$$

alakját Moivre-formulának *nevezzük.*

4.1.2. Példa. *Határozzuk meg a $z = 5(\cos 30° + i\sin 30°)$ komplex szám (-1)-edik hatványát!*

A hatványozásra vonatkozó azonosságot nem alkalmazhatjuk negatív egész számra (például -1-re), de ha ettől függetlenül z-re alkalmazzuk a hatványozás 4.1.1. Definícióban adott szabályát (helytelenül) $n = -1$-re, akkor $\frac{1}{|z|}\big(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\big)$, éppen $\frac{1}{z}$-t kapjuk. Eszerint (ha azt akarjuk, hogy a permanencia-elvnek megfelelően a hatványozás ismert azonosságai továbbra is teljesüljenek) z^{-1}-et a komplex számok körében is $\frac{1}{z}$-nek kell értelmeznünk.

Ezért a permanencia-elv alapján kiterjesztjük a Moivre-formula érvényességi körét negatív egész kitevőkre is.

[1] Abraham de Moivre (1667–1754) francia matematikus

4.1.3. Definíció. *A $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ $(r \in \mathbb{R},\ r > 0)$ komplex szám t-edik hatványa (t tetszőleges egész szám)* megállapodás szerint

$$z^t = r^t\big(\cos(t\varphi) + i\sin(t\varphi)\big).$$

(Egyébként $z = 0$ minden nem nulla hatványa 0.)

Az imént elmondottak alapján megkereshetjük $\sqrt{z}$ trigonometrikus alakját is. (Az algebrai alakot már korábban megkerestük, 1.3.1. állítás.)

4.2. Komplex számok gyökei

Keressük meg a $z = 5(\cos 30° + i\sin 30°)$ *négyzetgyökét,* azaz keressük meg az összes olyan komplex számot, amelyek négyzete z.

Tudjuk, hogy a szorzat hossza a tényezők hosszának szorzata, a szorzat argumentuma az argumentumok összege.

Eszerint egy szám négyzetének hossza a szám hosszának négyzete, a négyzet argumentuma a szám argumentumának kétszerese.

Vagyis olyan w komplex számot keresünk, amelyre $|w|^2 = |z|$, tehát $|w| = \sqrt{5}$, illetve $2\arg(w) = \arg(z)$, amiből $\arg(w) = 15°$.

Mivel azonban az argumentum nem egyértelmű, meg kell vizsgálnunk a többi lehetséges argumentumot is. A $30°$ fele $15°$, a $390°$ fele $195°$, a $750°$ fele $375°$, ami a $15°$-nak felel meg, a $1110°$ fele $555°$, ami pedig a $195°$-nak felel meg.

z argumentuma $30° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$. Ennek a fele $15° + k \cdot 180°$, vagyis $180°$ (π) szerint periodikus, így minden második ugyanazt a komplex számot jelenti.

A kapott szögeket viszont moduló $360°$ (2π) tekinthetjük. Eszerint két arkusz felel meg: $15°$ és $195°$. Ez a két argumentum pedig különböző.

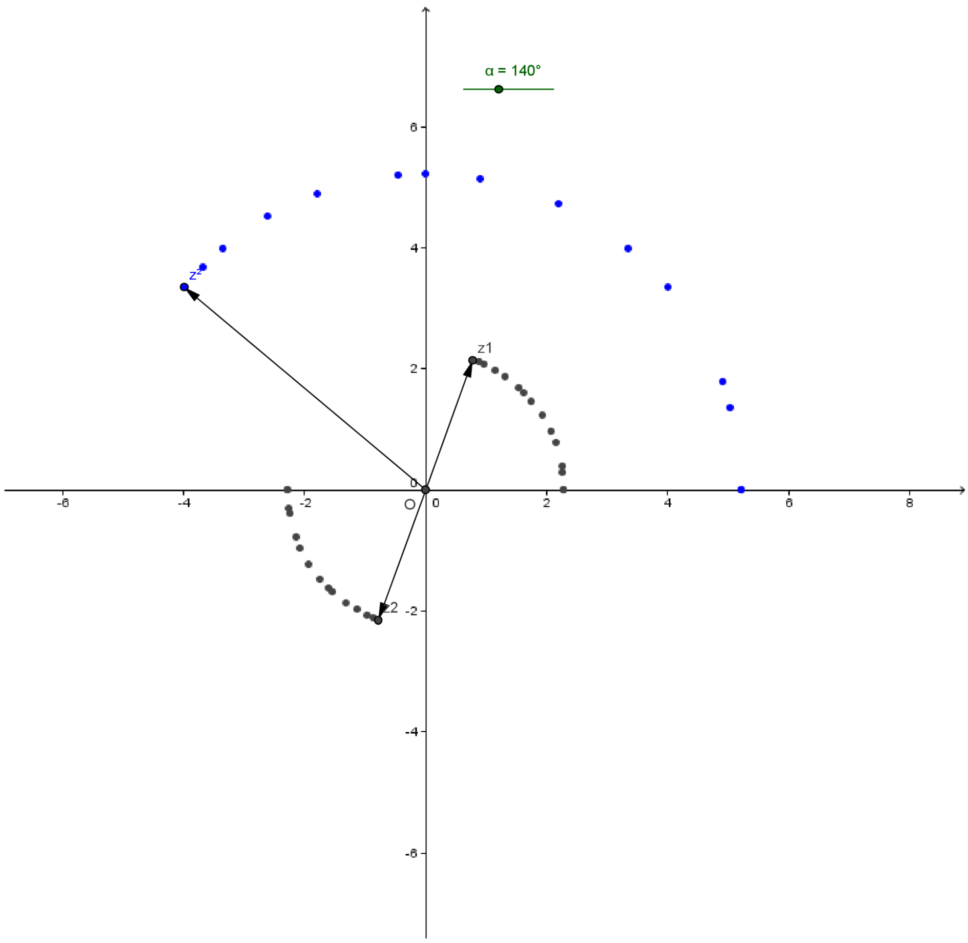
Tehát csak két különböző négyzetgyök van, és ezek egymás $180°$ (π) szerinti elforgatottjai:

$$w_1 = \sqrt{5}(\cos 15° + i\sin 15°), \qquad w_2 = \sqrt{5}(\cos 195° + i\sin 195°).$$

Korábban (15. oldal) láttuk, hogy a komplex számnak két négyzetgyöke van, ezek – algebrai szemszögből vizsgálva – egymás ellentettei, és valóban:

$$w_1 = \sqrt{5}(\cos 15° + i\sin 15°), \qquad w_2 = -\sqrt{5}(\cos 15° + i\sin 15°).$$

A z^2 argumentumából következtethetünk z argumentumára, de az kétféle különböző érték is lehet. A



4.1. ábra. Egyenlő abszolút értékű komplex számok négyzetgyökpárjai argumentumai

www.cs.elte.hu/~kfried/algebra2/komplex_negyzetgyok.html

animáció adott komplex számhoz mutatja a négyzetgyökei helyzetét a komplex síkon. A képernyő bal alsó sarkában elindítható és leállítható az animáció. Az adott pont (z^2) argumentuma, azaz α szög állítható.

A 4.1 ábra szemlélteti, hogy hol helyezkedhetnek el egyes komplex számok négyzetgyökpárjai a komplex síkon.

Most vonjunk *köbgyököt* a fenti z-ből, azaz keressük meg az összes olyan komplex számot, amelyek harmadik hatványa z.

Mivel komplex számok szorzatának hossza a tényezők hosszának szorzata, argumentuma az argumentumok összege, z_1 köbgyöke olyan komplex szám, amelynek hossza $\sqrt[3]{|z_1|} = \sqrt[3]{5}$, argumentuma z_1 argumentumának harmadrésze: $10° + k \cdot 120°$. Ez három különböző komplex számot jelent:

$$q_1 = \sqrt[3]{5}(\cos 10° + i \sin 10°),$$
$$q_2 = \sqrt[3]{5}(\cos 130° + i \sin 130°),$$
$$q_3 = \sqrt[3]{5}(\cos 250° + i \sin 250°).$$

(A többi argumentum ezeknek 360° egész számú többszörösével való elforgatásával kapható.)

Általánosíthatjuk a tapasztaltakat:

4.2.1. Definíció. *Egy $z \neq 0$ komplex szám n-edik gyökén ($n \in \mathbb{N}$) értjük az összes olyan komplex számot, amelyek n-edik hatványa z.*

4.2.2. Tétel *Egy $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ komplex szám n-edik gyökei ($n \in \mathbb{N}$) a*

$$w_j = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right)$$

($i = 0, 1, \ldots, n-1$) komplex számokkal adhatók meg.

Bizonyítás. Három állítást kell belátnunk. 1. A fentiek mind gyökei z-nek

2. Minegyik felírt gyök más. (Nincs köztük egyenlő.)

3. Nincs több n-edik gyöke z-nek.

1. A komplex számok trigonometrikus alakjával végzett szorzás összefüggései alapján ellenőrizhetjük, hogy w_j^n hossza $|z|$, argumentuma $\varphi + k \cdot 2\pi$, vagyis a w_j-k n-edik hatványai valóban z-vel egyenlők. Ezek tehát valóban n-edik gyökei z-nek.

2. A fenti w_j-k mind különbözőek, mert az argumentumaik különbözőek.

3. z-nek minden n-edik gyökét megkaptuk, hiszen ha lenne olyan argumentum, amelyet nem kaptunk volna meg, akkor annak az n-szerese ($\varphi + 2k\pi$ alakú) lenne. Elvégezve a $k = rn + k_1$ ($k_1 \geq 0$) maradékos osztást, k_1-hez és k-hoz ugyanaz a szög tartozik, hiszen $2k$ és $2k_1$ között a különbség $2rn$, vagyis a nekik megfelelő forgásszögek közti különbség $2rn\pi$ (egy teljes kör többszöröse). A k_1-hez tartozó gyököt pedig felírtuk. □

4.2.3. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy $\sqrt[n]{r} = r^{\frac{1}{n}}$, vagyis továbbra is teljesülhet a hatványozásra vonatkozó $z^n \cdot z^k = z^{n+k}$ azonosság.*

Itt fel kell használnunk azt is, hogy $(z^k)^n = z^{k \cdot n}$, amiből $(z^k)^n = (z^n)^k$. Ezt feladatként az olvasóra bízzuk.

4.2.4. Megjegyzés. *A komplex számok egész kitevőjű hatványozása (és egész szám alapú gyökvonása) így a felírt összefüggés szerint tetszőleges racionális hatványra és gyökre kiterjeszthető (kivéve a 0-nak a 0-dik hatványát).*

Ez valamelyest általánosabb is, mint a valós számokon elvégezhető hatványozás, hiszen ott negatív számnak nem tudtuk értelmezni tetszőleges racionális hatványát (gyökét), mert az nem lett volna egyértelmű.

Most azért tehetjük meg mindezt, mert a gyökvonást csak a komplex szám abszolút értékén, egy nemnegatív racionális számon kell elvégezni. (Persze az argumentum is változik, de az osztás elvégezhető.)

4.2.5. Példa. *Vegyük a $z = -1 + i$ komplex szám harmadik gyökét.*

$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \dfrac{3\pi}{4}$.

A hosszúságának a harmada $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$*, az egyik arumentuma* $\dfrac{\pi}{4}$*. A másik két köbgyök argumentuma ennek az argumentumánál* $\dfrac{2\pi}{3}$*-mal, illetve* $\dfrac{4\pi}{3}$*-mal nagyobb.*

Így a köbgyökök:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ w_2 &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) \\ w_3 &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Világos, hogy az 1 hosszúságú, $\dfrac{0\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{4\pi}{3}$ argumentumú komplex számok mindegyikének a köbe 1. (Hiszen a köbeik hossza 1, az argumentuma 2π egész számú többszöröse.)

Ha $w_1^3 = z$, akkor $w_1 \cdot \left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ és $w_2 \cdot \left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$ köbe is z.

Eszerint egy szám egyik köbgyökéből megkaphatjuk az összes köbgyökét, ha megszorozzuk egy egység hosszúságú, $k \cdot \dfrac{2\pi}{3}$ argumentumú komplex számmal.

4.2.6. Következmény. *A 4.2.2. tétel értelmében $z = (r;\varphi)$ komplex szám n-edik gyökeit az argumentumuk nagysága szerint sorba rendezhetjük. Két egymás utáni gyök szöge között a különbség* $\dfrac{2\pi}{n}$*.*

Így ha egy n-edik gyököt megkaptunk, akkor azt $\frac{2\pi}{n}$*-nel elforgatva – vagyis az* $1 \cdot (\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n))$ *komplex számmal szorozva – újabb gyököt kapunk.*

Ez ad okot a következő fogalom megalkotására:

A $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ komplex számot komplex n-edik egységgyöknek nevezzük.

Ennek a számnak az n-edik hatványa 1. Valójában ε minden természetes kitevőjű hatványának n-edik hatványa 1, hiszen $(\varepsilon^k)^n = \varepsilon^{k\cdot n} = \varepsilon^{n\cdot k} = (\varepsilon^n)^k = 1$.

Mivel egy $z \neq 0$ valamely komplex n-edik gyökét nemcsak ε-nal, hanem ennek tetszőleges hatványával megszorozva ismét n-edik gyökét kapjuk z-nek, indokolt, hogy az összes ilyen komplex számot n-edik egységgyöknek nevezzük:

Vegyük észre, hogy akkor ezek mind az 1 komplex n-edik gyökei (és 1-nek minden n-edik gyöke szerepel).

4.2.7. Definíció. *Az* 1 *komplex szám n-edik gyökeit* n-edik egységgyököknek *nevezzük.*

Ezek az egység hosszúságú, $k \cdot \frac{2\pi}{n}$ $(k \in \mathbb{Z})$ *argumentumú komplex számok.*

Az n-edik hatványuk 1.

Szokás a k szorzótényező szerint sorbarakni, megsorszámozni az n-edik egységgyököket. Az 1 maga is n-edik gyöke 1-nek. $k = 0$-ra kapjuk az 1-et, így ezt a nulladiknak nevezzük, $\varepsilon_{n,0}$-val jelöljük.

Az első n-edik egységgyök a $k = 1$-hez tartozó $\varepsilon_{n,1} = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$.

A k-adik az n-edik egységgyökök közül $\varepsilon_{n,k} = \cos(k \cdot 2\pi/n) + i\sin(k \cdot 2\pi/n)$.

4.2.8. Megjegyzés *Könnyen ellenőrizhető, hogy például*

– a második egységgyökök az 1 *és a* -1*;*

– a harmadik egységgyökök az 1*, a* $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$*;*

– a negyedik egységgyökök 1, i, -1, $-i$.

Eszerint a második egységgyökök egyszersmind negyedik egységgyökök is. Nem is meglepő, hiszen ha egy szám második hatványa 1*, akkor a negyedik hatványa (ami* 1*-nek a második hatványa) szintén 1 lesz.*

Látjuk, hogy lehet olyan komplex n-edik egységgyök, amelyik egy n-nél kisebb k-ra is k-adik egységgyök. Például a negyedik egységgyökök közül a -1 második egységgyök is.

Azokat az n-edik egységgyököket, amelyekre ez nem teljesül, n-edik primitív egységgyököknek nevezzük.

4.2.9. Definíció. ω primitív n-edik egységgyök, *ha* $\omega^n = 1$, *de ha* $0 < k < n$, *akkor* $\omega^k \neq 1$.

Másképp is szokás definiálni a primitív egységgyököket – ekkor azonban be kell látnunk, hogy a két definíció egyenértékű. A másik definíció szerint:

4.2.10. Definíció. ω primitív n-edik egységgyök, *ha minden n-edik egységgyök előáll mint ω valamely hatványa.*

4.2.11. Állítás *A két definíció ugyanazt jelenti.*

Bizonyítás. Ha – az első definíció szerint – ω primitív n-edik egységgyök, akkor az első n hatványa

1. mind különböző – hiszen ha $\omega^{k_1} = \omega^{k_2}$ $(n > k_1 > k_2 > 0)$ teljesülne, akkor $\omega^{k_1-k_2} = 1$ $(n > k_1 - k_2 > 0)$ lenne –;

2. mind n-edik egységgyök, hiszen $(\omega^k)^n = (\omega^n)^k = 1^k = 1$,

így tehát ω első n hatványa előállítja mind az n darab n-edik egységgyököt.

Másrészt, ha – a második definíció szerint – ω primitív n-edik egységgyök, akkor található n olyan hatvány, amelyek az n-edik egységgyököket adják:

$$\omega^{i_1}, \omega^{i_2}, \omega^{i_3}, \ldots, \omega^{i_n}.$$

Mivel ω n-edik hatványa 1, ezért osszuk i_k-t maradékosan n-nel, és megtehetjük, hogy az i_k kitevők helyett azok n szerinti maradékát vesszük. ($i_k = t_k n + r_k$ maradékos osztás esetén $\omega^{i_k} = \omega^{t_k n} \cdot \omega^{r_k}$, ahol az első tényező 1.)

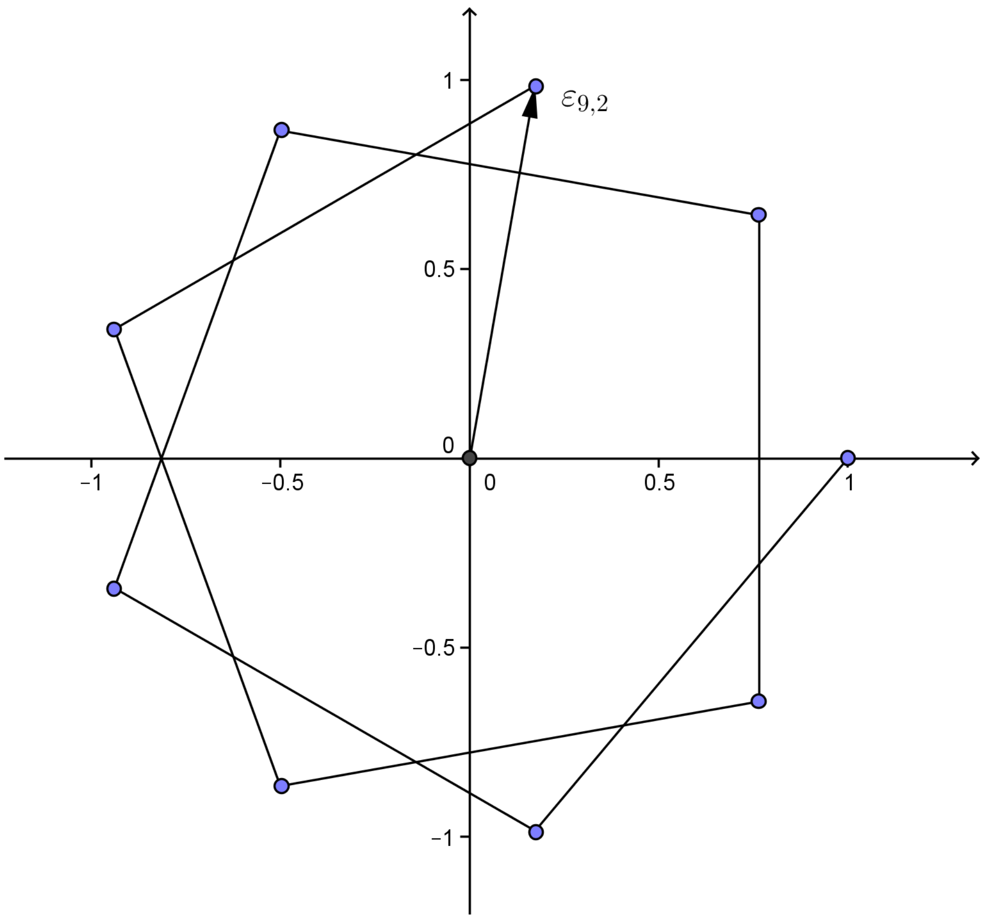
Ezek a kitevők 0 és $n - 1$ közé esnek, a 0-adik egyenlő 1-gyel, vagyis az összes többi különbözik 1-től. Eszerint $0 < k < n$-re minden más hatvány 1-től különböző. Így ω a másik értelemben is primitív n-edik egységgyök. □

4.2.12. Tétel *Az n-edik egységgyökök közül az r-edik akkor és csak akkor primitív n-edik egységgyök, ha $(r, n) = 1$.*

Bizonyítás. Legyen a sorban az r-edik egységgyök $\varepsilon_{n,r}$, amely tehát a sorban az első n-edik egységgyöknek, $\varepsilon_{n,1}$-nek az r-edik hatványa.

Legyen most $(r, n) = d \neq 1$, $r = r_1 d$, $n = n_1 d$. Ekkor

$$(\varepsilon_{n,r})^{n_1} = (\varepsilon_{n,1}^{r})^{n_1} = (\varepsilon_{n,1}^{r_1 d})^{n_1} = \left((\varepsilon_{n,1}^{r_1})^d\right)^{n_1} = (\varepsilon_{n,1}^{r_1})^n = 1,$$



4.2. ábra. $n = 9$, $k = 2$, $\varepsilon_{9,2}$ (primitív egységgyök) hatványai sorban összekötve

hiszen $\varepsilon_{n,1}^{r_1}$ is n-edik egységgyök (mert egy n-edik egységgyök hatványa).

Eszerint $\varepsilon_{n,r}$-nek egy n-nél kisebb kitevőjű hatványa is 1, azaz nem primitív egységgyök.

Másrészt, ha $\varepsilon_{n,r}$, $r < n$ nem primitív egységgyök, akkor van olyan n-nél kisebb k kitevő, amelyre $\varepsilon_{n,r}^k = 1$. Eszerint $(\varepsilon_{n,1}^r)^k = 1$, azaz $(\varepsilon_{n,1})^{rk} = 1$.

Mivel azonban $\varepsilon_{n,1}$ primitív n-edik egységgyök (a hatványai sorban előállítják az összes n-edik egységgyököt), azaz $(\varepsilon_{n,1})^n = 1$. Sőt, csak azok a hatványai egyenlők 1-gyel, amelyek n egész számú többszörösei, hiszen a hatványok n szerinti periódussal egyenlőek egymással (például $\varepsilon^{tn+r} = \varepsilon^r$, ha $t, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < n$; és $0 < r < n$ esetén a $\varepsilon^{tn+r} = \varepsilon^r$ hatvány nem egyenlő 1-gyel). Ebből következik, hogy $n \mid rk$. Ha $(n, r) = 1$ lenne, akkor abból $n \mid k$ következne, ami ellentmondás, hiszen $k < n$. Tehát n és r nem lehetnek relatív prímek. $\square$

4.2.13. Megjegyzés *Érezzük – de egyszerűen be is látható –, hogy szoros kapcsolat áll fenn az n-edik egységgyökök szorzás szerinti és a $\mathbb{Z}_n$ összeadás szerinti algebrai struktúrák között. Nevezetesen a két struktára izomorf.*

A bizonyításunkat ennek segítségével is levezethettük volna.

4.2.14. Következmény. *A primitív n-edik egységgyökök $0, 1, \ldots, n-1$ hatványai előállítják az n-edik egységgyököket.*

Bizonyítás. Ha a sorban az r-edik n-edik egységgyök primitív, akkor a $0, 1, \ldots, n-1$-edik hatványai a 4.2.12. tétel miatt nem lehetnek 1-gyel egyenlők, de mind különbözők, ezért minden n-edik egységgyököt megkaptunk. □

Amikor felírtuk a második és a negyedik egységgyököket, láttuk, hogy ezek „szép szimmetrikusan" helyezkednek el, vagyis az összegük 0.

A harmadik egységgyökök esetén azonban ez nem látszik, de ha felírjuk az összegüket, akkor megkapjuk:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0.$$

Felmerül a kérdés, hogy ez véletlen-e, vagy mindig így van.

4.2.15. Tétel *Az n-edik egységgyökök összege* 0*.*

Bizonyítás. (Első) Az n-edik egységgyökök egység hosszú vektorok, amelyek közül a szomszédosak egymással ugyanakkora szöget zárnak be. Ezért ha a vektorösszeadás szabálya szerint láncba fűzzük őket, éppen egy szabályos n-szög oldalvektorait alkotják (körben egymást követi az irányuk), amelyek összege eszerint éppen 0. ($n = 5$-re lásd 4.3 ábra, $n = 9$-re lásd a

www.cs.elte.hu/~kfried/algebra2/egyseggyokosszeg2.html

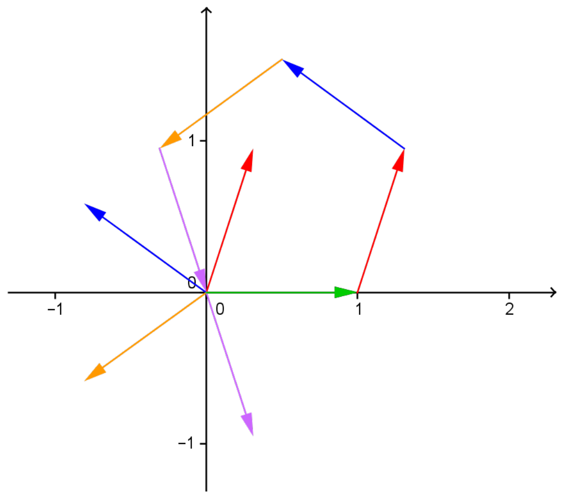
animációt.) □

Bizonyítás. (Második) Az n-edik egységgyökök előállnak $\varepsilon_{n,1}$ hatványaiként:

$$1 = \varepsilon_{n,1}^0, \quad \varepsilon_{n,1}^1, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{n,1}^{n-1}.$$

Ezek összege véges mértani sorösszeg, amelyben az első elem 1, a kvóciens (hányados) $\varepsilon_{n,1}$; azaz $\dfrac{1-\varepsilon_{n,1}^n}{1-\varepsilon_{n,1}}$. Mivel pedig $1 = \varepsilon_{n,1}^n$, ez az összeg 0. □

Ha már megvizsgáltuk az egységgyökök összegét, nézzük meg, mit mondhatunk a szorzatukról. $n = 2$ esetén -1, $n = 3$-ra 1, $n = 4$-re ismét -1 adódik. Sejtjük, mi a helyzet:



4.3. ábra. Az ötödik egységgyökök összege

4.2.16. Tétel *Az n-edik egységgyökök szorzata páros n-re -1, páratlan n-re 1.*

Bizonyítás. A komplex számok szorzatának hossza a hosszaik szorzata (ez 1, hiszen minden egységgyök hossza 1), az arkusza az arkuszok összege. Ez pedig

$$0 + \frac{2\pi}{n} + \frac{4\pi}{n} + \frac{6\pi}{n} + \ldots + \frac{(n-1)2\pi}{n}.$$

Ez olyan számtani sorozat, amelynek differenciája $\frac{2\pi}{n}$, az összege pedig

$$\frac{n(n-1)}{2}\frac{2\pi}{n} = (n-1)\pi.$$

A szorzat tehát $\cos(n-1)\pi + i\sin(n-1)\pi$, az arkusza ezért páros n-re $(-\pi)$-nek, páratlan n-re π-nek felel meg, míg az abszolút értéke 1, vagyis az n-edik egységgyökök szorzata páros n-re -1, páratlan n-re 1. $\square$

Az egységgyököknek további érdekes tulajdonságaik vannak, amelyekkel most nem foglalkozunk.

Végezetül megemlítjük, hogy magasabb analízisbeli ismeretek alapján definiálható a komplex számok exponenciális alakja: $z = r \cdot e^{i\varphi}$, speciálisan $e^{i\pi} = -1$.

Feladatok

1. Igazolja a 4.2.3. megjegyzésben szereplő $(z^k)^n = z^{k \cdot n}$ állítást. ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n, k \in \mathbb{N}$)

2. Oldja meg a következő másodfokú egyenleteket a komplex számok halmazán!

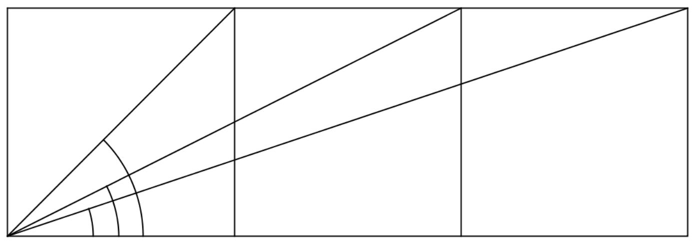
   (a) $ix^2 - ix + 1$

   (b) $ix^2 + x + 1 + i = 0$

   (c) $(i-2)x^2 + (2+i)x + 2i = 0$

3. Határozza meg, hogy az $x^2 + ipx - 1 = 0$ egyenlet megoldásainak négyzetösszege a p paraméter mely értékére lesznek minimálisak!

4. Határozza meg a 4.4. ábrán ívekkel jelölt szögek összegét! (Három négyzetet rajzoltunk egymás mellé, és a közös csúcspontból meghúztuk az egymás után keletkező téglalapok egy-egy átlóját.)



4.4. ábra.

5. Végezze el a $\dfrac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha}$ műveletet (fejezze ki az eredményt algebrai alakban)!

6. Határozza meg azokat a komplex számokat, amelyek négyzete az eredeti szám konjugáltja!

7. Számítsa ki a következő komplex számokat!

   (a) $\sqrt{2i}$

   (b) $\sqrt{-8i}$

   (c) $\sqrt{3-4i}$

   (d) $\sqrt{-8-6i}$

   (e) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$

8. Oldja meg a következő egyenleteket!

   (a) $x^2 - (2+i)x + (-1+7i) = 0$
   (b) $x^2 - (3-2i)x + (5-5i) = 0$
   (c) $(2+i)x^2 - (5-i)x + (2-2i) = 0$

9. Írja fel a 2-odik, 3-adik, 4-edik, 5-ödik, 6-odik egységgyököket trigonometriai és algebrai alakban is!

10. Sorolja fel, hogy a 24-edik egységgyökök melyik milyen n-re primitív n-edik!

11. Milyen n-re primitív n-edik egységgyök a tizedik egységgyökök közül a 4-edik?

12. Milyen n-re primitív n-edik egységgyök a 12-edik egységgyökök közül a 8-adik? És a 7-edik?

13. Írja fel a 24-edik egységgyökök közül a hetediknek a hatványait, és határozza meg, hogy azok hányadikak a 24-edik egységgyökök közül!

14. Jelöljön ε egy $2n$-edik primitív egységgyököt! Határozza meg az $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{n-1}$ összeget!

15. Jelöljön ε az első n-edik egységgyököt! Számítsa ki az $(x+\varepsilon^1)^1 + (x+\varepsilon^2)^2 + \ldots + (x+\varepsilon^n)^n$ összeget!

16. Hozza egyszerűbb alakra a $\dfrac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\psi - i\sin\psi}$ kifejezést!

17. Végezze el a következő gyökvonásokat!

   (a) $\sqrt[3]{i}$
   (b) $\sqrt[3]{2-2i}$
   (c) $\sqrt[4]{-4}$
   (d) $\sqrt[6]{1}$
   (e) $\sqrt[6]{-64}$

18. Fejezze ki $\cos x$ és $\sin x$ segítségével (valamint a komplex számok trigonometrikus alakjának felhasználásával) a következőket:

   (a) $\sin 2x$

(b) $\cos 3x$

(c) $\cos 5x$

(d) $\cos 7x$

(Ötlet: $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ esetén a z hatványait algebrai és trigonometrikus alakban is kiszámíthatjuk.)

19. Fejezze ki $\operatorname{tg} 2\varphi$-t $\operatorname{tg}\varphi$ segítségével!

II. rész

Polinomok

5. Polinomok

A könyv második részében polinomokról lesz szó. Polinomokkal már középiskolában is találkozunk. A másodfokú egyenlet megoldóképlete címen valójában egy másodfokú polinomegyenlet megoldásait keressük.

Másodfokú polinomként az $ax^2 + bx + c$ kifejezést ismertük. Mivel most magasabb fokú polinomokkal is fogunk találkozni, az egyre magasabb fokszámot jelölő x-hatványok együtthatójára hamar kifogynánk az ábécé betűiből, így érdemes más jelölést kitalálnunk.

Lehetne $a_0x^2 + a_1x^1 + a_2$ a jelölés, vagy $a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$. Mi az utóbbit fogjuk használni.

Több kérdésre fogjuk keresni a választ. Mindenekelőtt tisztázzuk tehát a használt fogalmakat.

Természetesen meg kell mondanunk, hogy mi micsoda: mi az az x, mi az az a, és ha már tudjuk, hogy azok valamilyen számok (együtthatók), akkor milyen halmazból vannak.

Amikor az egyenlet megoldásáról beszéltünk, akkor nem az $a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$ polinomot oldottuk meg, hanem az $a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 = 0$ egyenletet. A kettő között ugyan van kapcsolat, de meg kell különböztetnünk a polinomot és a segítségével felírt (polinom)egyenletet. Ezeket is tisztáznunk kell.

Emlékeztetőül: testnek nevezzük az olyan $(T, +, \cdot)$ algebrai struktúrát, ahol T egy nem üres halmaz, az $+$ (összeadás) kétváltozós művelet kommutatív, asszociatív és invertálható (egységeleme a 0), a $\cdot$ (szorzás) kétváltozós művelet kommutatív, asszociatív és a $T \setminus \{0\}$ halmazon invertálható, valamint a szorzás disztributív az összeadásra (vagyis összeget úgy is szorozhatunk egy T-beli elemmel, hogy a minden tagot megszorzunk, és a szorzatokat adjuk össze).

(Ha egy struktúra majdnem test, épp csak a szorzás nem kommutatív, akkor azt *ferde testnek* nevezik.)

5.1. Polinomokkal kapcsolatos fogalmak

Legyen T egy test, és legyenek az a_n, a_{n-1}, …, a_2, a_1, a_0 elemek T-beli elemek.

5.1.1. Definíció. *T test feletti (egyhatározatlanú)* polinomnak *nevezzük az*

$$P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{5.1}$$

formális kifejezést, *ahol az x egy jel, amelynek ebben a pillanatban nem kölcsönzünk értelmet. (Ezért mondjuk azt, hogy ez a kifejezés formális.)*

Bármit jelentsen is az x, az x^k jelölés az önmagával vett k-szoros szorzatot jelöli. (Aminek – x értelmetlen lévén – szintén nincs még értelme. $k = 0$ esetén az 1-et – a szorzás egységelemét –, $k = 1$ esetén x-et jelenti.)

Az a_i elemeket együtthatóknak *nevezzük, x-et pedig* határozatlannak.

A polinomban egy a_kx^k kifejezéset tagnak *nevezünk. (Eszerint a fenti P polinomnak $n + 1$ tagja van.)*

A későbbiekben kétféle értelemmel töltjük meg a polinom formális kifejezését, amelyek egymással is és a formális kifejezéssel is kapcsolatban lesznek.

1. Ha az x-ről azt feltételezzük, hogy az valamelyik T-beli elem, akkor azt mondjuk, hogy a fenti ((5.1)) kifejezésbe *behelyettesítjük* az adott elemet. Ekkor a P-ben szereplő műveletek elvégezhetők, az eredmény pedig – amely szintén T-be esik – a P polinom x helyen vett *helyettesítési értéke.*

2. Ha tetszőleges T-beli x elemhez hozzárendeljük a szintén T-beli $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ elemet, akkor ez egy hozzárendelés, egy függvény, amit *polinomfüggvénynek* nevezünk. Ezt úgy is jelöljük, hogy $P(x)$ (ebben az esetben x megnevezése: változó).

Ekkor van értelme azt firtatni, hogy a P polinomnak mely $x \in T$ érték mellett 0 a helyettesítési értéke (a polinomegyenlet megoldása, ekkor x megnevezése: ismeretlen), illetve hogy mely x értékhez rendel 0-t a $P(x)$ függvény (a polinomfüggvény zérushelye).

Ennek a két kérdésnek a megválaszolása ugyanannak a problémának a megoldását jelenti. Ebben a fejezetben – többek között – erre a kérdésre keressük a választ.

5.1.2. Definíció. *A (5.1) polinom* fokszáma *az a_n (legnagyobb indexű tag) indexe: n; jele:* $\mathrm{gr}(P) = n$.

Mivel a kifejezés formális, nem lehetünk benne biztosak, hogy $a_n \neq 0$.

Ha $a_n \neq 0$*, akkor az* n *a polinom* valódi fokszáma, *ellenkező esetben a valódi fokszám* n*-nél kisebb.*

Azokat a polinomokat, amelyek valódi fokszáma 1, konstans polinomoknak *nevezzük – kivéve az* azonosan 0 polinomot, *amelynek minden együtthatója* 0*!*

Szinte soha nem fogunk arra fanyalodni (de egyszer-kétszer mégis), hogy a_n-t 0-nak vegyük, így azon ritka esetekben, amikor 0-nak adódna, figyelnünk kell rá, hogy mi a valódi fokszám.

További gondjaink lesznek még azzal a ténnyel, hogy bár a $P = a_0 \neq 0$ (egytagú) polinom fokszáma 0 (a definíciónk szerint), az $a_0 = 0$ polinom fokszámára mást kell majd kitalálnunk.

Ugyan nincsen semmi értelme, de a későbbiek alapján az látszik a legcélszerűbbnek, ha a konstans 0 polinom fokszámát – formálisan – mínusz végtelennek vesszük. Azaz bármilyen nem 0 számmal szorozzuk meg, bármennyit is adunk hozzá, önmagát kapjuk.

5.1.3. Definíció. *A polinom legmagasabb fokú tagját* (a_nx^n*-et, ahol* $a_n \neq 0$) főtagnak, *az* a_n*-et* főegyütthatónak *nevezzük.*

5.2. Műveletek polinomokkal

5.2.1. Definíció. Két polinom összegét *a következőképpen definiáljuk:*

$$A = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0, \qquad B = b_mx^m + \ldots + b_1x + b_0$$

esetén jelölje l *az* n *és az* m *közül a nagyobbikat (vagy* $n = m$*, akkor ezt). Ha* A *és* B *fokszáma nem ugyanannyi, akkor egészítsük ki az alacsonyabb fokszámút olyan tagokkal, hogy a nem valódi fokszáma* l *legyen. Ekkor*

$$A = a_lx^l + \ldots + a_1x + a_0, \qquad B = b_lx^l + \ldots + b_1x + b_0.$$

(Az egyik valódi l*-edfokú, a másik nem feltétlenül.)*

Ezek összege az a C *polinom, amelynek a* k*-adik tagja* $(a_k + b_k)x^k$*, tehát*

$$C = (a_l + b_l)x^l + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0).$$

Ebből a definícióból az alábbiak következnek (vezethetők le egyszerűen):

1. A polinomok összeadása kommutatív.

2. A polinomok összeadása asszociatív (visszavezethető a T testbeli összeadás asszociativitására).

3. A polinomok összeadásának van egységeleme, az azonosan 0 polinom (minden együttható 0), amelyet O-val fogunk jelölni.

4. Az összeg fokszáma nem lehet nagyobb egyik összeadandó fokszámánál sem. (Esetünkben l-nél.)

5.2.2. Definíció. Polinomok szorzata:

$$A = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad B = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$$

esetén legyen a szorzatuk az a C polinom, amelynek a k-adik tagja

$$(a_k \cdot b_0 + a_{k-1} \cdot b_1 + \ldots + a_0 \cdot b_k) x^k,$$

amennyiben pedig a megfelelő együtthatók nem léteznek, azokat 0-nak vesszük:

$$C = (a_n \cdot b_m) x^{n+m} + (a_n \cdot b_{m-1} + a_{n-1} \cdot b_m) x^{n+m-1} + \ldots + (a_1 \cdot b_0 + a_0 \cdot b_1) x + (a_0 \cdot b_0).$$

(Lásd az 5.1 ábrát!)

	$a_n x^n$	$a_{n-1} x^{n-1}$	$a_{n-2} x^{n-2}$	$\ldots$	$a_2 x^2$	$a_1 x^1$	a_0
$b_m x^m$	$a_n b_m x^{n+m}$	$a_{n-1} b_m x^{n+m-1}$	$a_{n-2} b_m x^{n+m-2}$	$\ldots$	$a_2 b_m x^{2+m}$	$a_1 b_m x^{1+m}$	$a_0 b_m x^m$
$b_{m-1} x^{m-1}$	$a_n b_{m-1} x^{n+m-1}$	$a_{n-1} b_{m-1} x^{n+m-2}$	$a_{n-2} b_{m-1} x^{n+m-3}$	$\ldots$	$a_2 b_{m-1} x^{m+1}$	$a_1 b_{m-1} x^m$	$a_0 b_{m-1} x^{m-1}$
$b_{m-2} x^{m-2}$	$a_n b_{m-2} x^{n+m-2}$	$a_{n-1} b_{m-2} x^{n+m-3}$	$a_{n-2} b_{m-2} x^{n+m-4}$	$\ldots$	$a_2 b_{m-2} x^m$	$a_1 b_{m-2} x^{m-1}$	$a_0 b_{m-2} x^{m-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$b_2 x^2$	$a_n b_2 x^{n+2}$	$a_{n-1} b_2 x^{n+1}$	$a_{n-2} b_2 x^n$	$\ldots$	$a_2 b_2 x^4$	$a_1 b_2 x^3$	$a_0 b_2 x^2$
$b_1 x^1$	$a_n b_1 x^{n+1}$	$a_{n-1} b_1 x^n$	$a_{n-2} b_1 x^{n-1}$	$\ldots$	$a_2 b_1 x^3$	$a_1 b_1 x^2$	$a_0 b_1 x^1$
b_0	$a_n b_0 x^n$	$a_{n-1} b_0 x^{n-1}$	$a_{n-2} b_0 x^{n-2}$	$\ldots$	$a_2 b_0 x^2$	$a_1 b_0 x^1$	$a_0 b_0$

5.1. ábra. Polinomok szorzata

Az ugyanazzal a színnel jelölt szorzatokban ugyanannyi az x fokszáma.

Ebből a definícióból az alábbiakat tudjuk bebizonyítani:

1. A polinomok szorzása kommutatív. (Ez is visszavezethető a T-beli összeadás és szorzás kommutativitására.)

2. A polinomok szorzása asszociatív. (Visszavezethető a T-beli műveletek tulajdonságaira.)

3. A polinomok szorzása disztributív a polinomok összeadására nézve. (Visszavezethető a T-beli műveletek tulajdonságaira.)

4. A polinomok szorzásának létezik egységeleme: az azonosan 1 polinom, amelyet E-val fogunk jelölni.

5. Két polinom szorzata csak úgy lehet az O polinom, ha valamelyik maga az O. (Ezt kicsit komplikáltabb bizonyítani, de ugyanúgy visszavezethető a T-beli műveletek tulajdonságaira.)

6. A polinomok szorzásakor a fokszámok összeadódnak – kivéve, ha a két polinom valamelyike az azonosan 0 polinom, vagyis az O.

Ez utóbbi fontos tulajdonság, és szeretnénk, ha tetszőleges polinomokra használhatnánk. Sokszor fogunk rá „polinomok szorzatának fokszámára vonatkozó összefüggés"-ként vagy röviden csak „fokszámösszefüggés"-ként hivatkozni.

Ezzel egyébként magyarázatot kaphatunk arra is, miért nem értelmezhetjük 0-nak az O (azonosan 0) konstans polinom fokszámát. Ha ugyanis O fokszáma 0 lenne, akkor tetszőleges A polinom esetén az $O \cdot A = O$, tehát a fokszáma 0 lenne, másrészt a szorzatra vonatkozó fokszámösszefüggés miatt $\mathrm{gr}(O) + \mathrm{gr}(A) = \mathrm{gr}(A)$-t kellene kapnunk, de ezt nem tudjuk minden A-ra garantálni.

Miként érdemes tehát megválasztani (és eddig miért nem tettük meg ezt) az $O = 0$ polinom fokszámát.

Három igényünk van:

1. a fokszám fejezze ki a tagok számának a csökkenését;

2. a fokszám természetes (de legalábbis egész) szám legyen;

3. a szorzatpolinom fokszáma (lehetőleg) legyen egyenlő a tényezők fokszámának összegével.

Azért nem értelmeztük tehát az O fokszámát, mert nincs olyan természetes (sőt egész) szám, amire teljesülne a szorzat fokszámára tett feltétel.

Sajnos ezért le kell mondanunk arról, hogy O-nak fokszámot adjunk. (Inkább, minthogy lemondjuk a szorzatra vonatkozó fokszámösszefüggésről.)

Mint azt korábban említettük – a második tulajdonságról lemondva – az lenne a legcélszerűbb, ha a konstans 0 polinom fokszámát „mínusz végtelennek" vennénk. Ilyen szám természetesen nincs.

Valamilyen mértéket mégis hozzá fogunk rendelni a polinomokhoz, mert „nagyság" szerinti összehasonlításukra is szükségünk lesz.

5.2.3. Definíció. *Legyen az A polinom „mérete" vagy „mértéke" $2^{\mathrm{gr}(A)}$, ha létezik a $\mathrm{gr}(A)$, és legyen 0, ha nem létezik.*

Ez a *méret* kifejezi a fokszám nagyságát (nagyobb fokszámú polinomhoz nagyobb méret tartozik); természetes szám; polinomok szorzatának mérete a tényezők méretének *szorzata.*

Azt láttuk eddig, hogy a test fölötti polinomok körében definiálható egy kommutatív és asszociatív összeadás, illetve szorzás, továbbá az összeadás invertálható, és a szorzás disztributív az összeadásra nézve.

Nem végezhető el azonban az osztás, vagyis nincs minden esetben megoldása a $PX = Q$ egyenletnek (amelyben tehát P, Q adott T-feletti polinomokhoz keressük azt a T-feletti X polinomot, amelyre $PX = Q$).

Az 1-nél magasabb fokszámú polinomoknak nincs például reciproka.

5.2.4. Példa. *Tegyük fel, hogy invertálható a polinomok körében a szorzás, például a $P = x$ polinomra az $\dfrac{E}{P} = \dfrac{1}{x}$ kifejezés is polinom.*

Ekkor a $P = \dfrac{1}{x}$-ből $P \cdot x = 1$ lenne.

Ha létezik $\mathrm{gr}(P)$, *akkor ebből* $\mathrm{gr}(P) + 1 = 0$ *következne, ami lehetetlen.*

Ha viszont $\mathrm{gr}(P)$ *nem létezik, akkor $P \equiv O = 0$, amiből $O \cdot x = O$, ami nem egyenlő az 1 polinommal, vagyis ez is ellentmondásra vezet.*

Ebből következik, hogy a polinomok körében nem végezhető el az osztás.

Érdekes azonban megjegyezni a következőt:

5.2.5. Állítás *Ha A és B ($B \neq O$) két egytagú polinom és* $\mathrm{gr}(A) \geq \mathrm{gr}(B)$, *akkor létezik olyan P polinom, amelyre $A = P \cdot B$. Mondhatjuk, hogy ekkor létezik az $\dfrac{A}{B}$ polinom.*

Bizonyítás. Ha $A = a_k x^k$ és $B = b_l x^l$, akkor $P = \dfrac{a_k}{b_l} x^{k-l}$ megfelel, mert $k - l \geq 0$ egész szám (alkalmas x kitevő), $\dfrac{a_k}{b_l}$ pedig T-beli elem.

Továbbá $PB = \dfrac{a_k}{b_l} x^{k-l} \cdot b_l x^l$ a szorzás szabályai szerint $a_k x^k$, azaz éppen A. □

5.2.6. Definíció. *Ha egy nem üres halmazon értelmezve van egy kommutatív, asszociatív és invertálható összeadás, valamint egy kommutatív szorzás, amely disztributív az összeadásra nézve, akkor ezt az algebrai struktúrát* gyűrűnek *nevezzük.*

A fentiekben megállapítottuk, hogy a T test feletti polinomok gyűrű, *amelyet $T[x]$-szel jelölünk.*

Találkoztunk már gyűrűvel korábban is. Ilyen például az egész számok halmaza.

Az egész számok körében sem végezhető el az osztás. Ezért ott definiáltuk a maradékos osztást. (A következő kötetben egy másik megoldást fogunk keresni: kibővítjük a struktúrát.)

A maradékos osztáshoz rengeteg fogalmat vezettünk be: oszthatóság, egység (nem egységelem!), asszociált, maradékos osztás, Euklideszi algoritmus, prímtulajdonság, felbonthatatlanság, végül eljutottunk a számelmélet alaptételéig.

Ezt az utat követjük most a test feletti polinomokra is.

Feladatok

1. Hogyan lehet két polinom összegének fokszáma kisebb az összeadandók fokszámánál?

2. Határozza meg pontosan, hogy mennyi lehet két polinom összegének fokszáma! Minden lehetőséget vegyen tekintetbe!

3. Igazolja a polinomszorzás definíciója alapján, hogy két polinom szorzata csak úgy lehet O-val egyenlő, ha valamelyik az O.

4. Végezze el a következő polinomszorzásokat!

   (a) $(2x + 1)(x^2 - 1)$
   (b) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$
   (c) $(x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)$
   (d) $(x^3 - x^2 + x - 1)(x + 1)$

5. Adja meg a következő polinomok helyettesítési értékét a -1, 0, 1 helyeken!

   (a) $x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$
   (b) $5x^4 + 3x^2 - x + 4$
   (c) $3x^3 - 2x^2 + 2x - 3$
   (d) $3x^3 + 2x^2 + 2x + 3$

6. Két polinom szorzata negyedfokú. Hányadfokú lehet az összegük?

7. Két polinom összege negyedfokú. Hányadfokú lehet a szorzatuk?

8. Vezesse le másodfokú polinomokra a gyökök és együtthatók közötti összefüggést (Viète/formula)[1].

[1]François Viète (vagy latinul Vièta) (1540–1603). Az $x^2 + px + q = 0$ alakban felírt másodfokú polinomegyenlet x_1, x_2 – nem feltétlenül különböző – gyökeire $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$.

6. Polinomok számelmélete

Ebben a fejezeteben minden polinom T feletti (azaz $T[x]$-beli), ám ezt nem mindenütt fogjuk feltüntetni.

Próbáljuk meg átvinni az egész számok számelméletében bevezetett fogalmakat a polinomokra is.

6.1. Oszthatóság

6.1.1. Definíció. *Legyen A és $B \in T[x]$.*

Azt mondjuk, hogy A osztója *B-nek (vagy B* többszöröse *A-nak), ha létezik olyan $Q \in T[x]$ polinom, amelyre $B = A \cdot Q$.*

Példa. A $2x - 4$ polinomnak például többszöröse a $2x^2 - 4x$ (x-szerese), a $4x^2 - 4x - 4$ ($(2x + 1)$-szerese) vagy az $x - 2$ ($1/2$-szerese). Ezért a $2x^2 - 4x$, a $4x^2 - 4x - 4$, az $x - 2$ minegyikének osztója a $2x - 4$.

Az azonosan 0 polinom is többszöröse (mert 0-szorosa), vagyis $(2x - 4) \mid O$.

6.1.2. Definíció. Egységeknek *azokat a T feletti (azaz $T[x]$-beli) polinomokat nevezzük, amelyek minden polinomnak osztói.*

6.1.3. Megjegyzés. *A szorzat fokszámára vonatkozó feltétel miatt egységek csak a konstans polinomok lehetnek. (Hiszen az a polinom, amely minden polinomnak osztója, a konstans 1 polinomnak is osztója, márpedig akkor a fokszáma nem lehet nagyobb nullánál.) Továbbá az O polinom kivételével valóban mind egység is.*

Ha ugyanis $E_1 = a$ egy konstans polinom és $P = a_n x^b + \ldots + a_1 x + a_0$ tetszőleges polinom (T felett), akkor az $\frac{1}{a}$ is konstans polinom, és

$$P' = \frac{a_n}{a} x^b + \ldots + \frac{a_1}{a} x + \frac{a_0}{a}$$

is T feletti polinom, és $E_1 \cdot P' = P$*, tehát* $E_1 \mid P$*.*

6.1.4. Definíció. *Legyen* A *és* $B \in T[x]$*. Ha* $A \mid B$ *és* $B \mid A$*, akkor* A *és* B *egymás* asszociáltjai.

Ekkor $A = \mathcal{E}_A \cdot B$ *és* $B = \mathcal{E}_B \cdot A$ *kifejezésekben* $\mathcal{E}_A$*,* $\mathcal{E}_B$ egységek.

6.1.5. Következmény. *Ha* A *és* B *asszociáltak, akkor a fokszámuk egyenlő.*

Ez abból következik, hogy az asszociáltak egymás egységszeresei – azaz konstansszorosai –, így a fokszámuk egyenlő.

Könnyű ellenőrizni, hogy az oszthatóság a $T[x]$ polinomok körében is rendezési reláció. (Reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív.)

6.2. Legnagyobb közös osztó

6.2.1. Definíció. *Két polinom* legnagyobb közös osztója *olyan polinom, amely 1. Mindkét polinomnak osztója (közös osztó). 2. Minden közös osztójuknak többszöröse.*

6.2.2. Megjegyzés. *Ez a tulajdonság az egész számok körében a kitüntetett közös osztó tulajdonság volt, ott viszont még azt is kikötöttük, hogy pozitív legyen. Mi állhat mindezek hátterében?*

A természetes számok körében a legnagyobb közös osztó egyértelmű.

Az egész számok körében az asszociáltak közül kiválaszottuk (kijelöltük) a pozitívat.

Érdekes észrevenni, hogy a polinomok körében nem garantált, hogy a legnagyobb közös osztó polinom egyértelmű. Csupán annyit mondhatunk, hogy asszociált erejéig egyértelmű:

6.2.3. Állítás *Mivel két polinom két legnagyobb közös osztója egymás többszöröse, így azok egymás asszociáltjai. Ez egyszersmind azt is jelenti, hogy két polinom legnagyobb közös osztója asszociált erejéig egyértelmű.*

Ha nagyon fontos lenne, meg tudnánk különböztetni egyetlen, kitüntetett közös osztót, például azt, amelyiknek a főegyütthatója 1. Ennek ebben a pillanatban azonban nincs jelentősége.

A legnagyobb közös osztó meghatározására az euklideszi algoritmust alkalmaztuk, ehhez pedig szükségünk volt a maradékos osztásra.

6.3. A maradékos osztás

Az egész számokhoz hasonlóan most is szeretnénk definiálni a maradékos osztást.

Ez azt jelentené, hogy adott A, $B \neq O$ polinomokhoz keresünk olyan P, Q polinomokat, amelyekre $A = B \cdot Q + R$, és azt szeretnénk elérni, hogy az R kisebb legyen B-nél.

A polinomok körében nincsen sok értelme azt kérni egy polinomtól, hogy kisebb legyen, mint egy másik. Azt persze kérhetjük, hogy R fokszáma legyen kisebb B fokszámánál. Ezzel azonban kizárjuk az O-t mint lehetséges maradékot, hiszen nincs fokszáma.

Most fogjuk hasznát venni annak, hogy a polinomok mindegyikéhez hozzárendeltünk egy olyan mértéket, amely – ha létezik – tükrözi a fokszámok egymáshoz viszonyított nagyságrendjét, az O fokszáma pedig a legkisebb.

Emlékeztetünk: ha P-nek van fokszáma, akkor a mértéke $2^{\mathrm{gr}(P)}$, O mértéke pedig 0.

6.3.1. Definíció. (Maradékos osztás) *Ha az A, valamint a $B \neq O$ ($T[x]$-beli) polinomokhoz létezik olyan P és R ($T[x]$-beli) polinom, amelyekre teljesül, hogy $A = BP + R$, valamint R mérete kisebb, mint B mérete, akkor azt mondjuk, hogy az A-t B-vel* maradékosan osztva *a hányados P, a maradék R.*

6.3.2. Példa. *Osszuk maradékosan a $3x^2 - x + 1$ polinomot az $x - 1$ polinommal!*

Nagy segítség, ha előre megállapítjuk, hogy a polinomok fokszámra vonatkozó szorzástételéből a P fokszáma 1, a maradék fokszáma pedig 0 vagy $R = O$.

Most pedig abból indulunk ki, hogy polinomszorzáskor a tényezők főtagja a főtagok szorzata. Ennek segítségével meghatározható a hányados főtagja.

Keressük tehát a hiányzó főtagot!

Ez csak $3x$ lehet, mert akkor a főtagok szorzata: $x \cdot 3x$, megegyezik a szorzat főtagjával.

Eszerint a P polinom $3x + \ldots$ alakú. (Általában $P_1 + P_1'$.) Tegyük most fel, hogy ismerjük A-t és B-t, keressük P-t és Q-t. Amennyiben meghatároztuk a P_1-et, akkor $A = B \cdot (P_1 + P_1') + Q = B \cdot P_1 + B \cdot P_1' + Q$ miatt $A - B \cdot P_1 = B \cdot P_1' + Q$.

Mivel esetünkben $A - B \cdot P_1$ fokszáma kisebb lett, folytathatjuk tovább a maradékos osztást. Ez egy $A_1 = B \cdot P_1' + Q$ maradékos osztás elvégzéség jelenti.

Az tehát a kérdés, hogy mennyi marad, vagyis esetünkben mennyi $A - B \cdot P_1'$? $3x^2 - x + 1 - 3x(x-1) = 3x^2 - x + 1 - (3x^2 - 3x) = 2x + 1$.

Az $A_1 = (2x+1)$-nek $(x-1)$-gyel való maradékos osztásához ismét a hányados főtagját határozzuk meg. Ez a konstans 2 polinom. A visszaszorzás során: $2x + 1 - 2 \cdot (x-1) = 3$.

Ez egyszersmind az eredeti maradékos osztás maradéka is. Tehát $3x^2 - x + 1 = (3x+2)(x-1) + 3$.

Ahogy a természetes számok maradékos osztásakor is kerestünk egyszerű lejegyzési módot, a polinomok osztásához is érdemes ilyet találni.

1. lépés: felírjuk a maradékos osztást:

$$3x^2 \quad - \quad x \quad + \quad 1 \quad : \quad x \quad - \quad 1 \quad = \ldots$$

(A leírásban a félreértések elkerülése érdekében …-tal jeleztük, hogy az osztás „még tart”. Ezt végig jelölni is fogjuk.)

2. lépés: megkeressük a soronkövetkező főtagot:

$$3x^2 \quad - \quad x \quad + \quad 1 \quad : \quad x \quad - \quad 1 \quad = 3x\ldots$$

3. lépés: visszaszorzunk (ügyelve arra, hogy minden tag a neki megfelelő fokszámú tag alá kerüljön):

$$\begin{array}{llllllll} 3x^2 & - & x & + & 1 & : & x - 1 & = 3x\ldots \\ 3x^2 & - & 3x & & & & & \end{array}$$

4. lépés: kivonjuk a visszaszorzással kapott polinomot:

$$\begin{array}{llllllll} & 3x^2 & - & x & + & 1 & : x - 1 & = 3x\ldots \\ - & \big(3x^2 & - & 3x) & & & & \\ \hline & & & 2x & + & 1 & & \end{array}$$

5. lépés: megkeressük a soronkövetkező főtagot:

$$\begin{array}{llllllll} & 3x^2 & - & x & + & 1 & : x - 1 & = 3x + 2\ldots \\ - & \big(3x^2 & - & 3x) & & & & \\ \hline & & & 2x & + & 1 & & \end{array}$$

6. lépés: elvégezzük az új taggal a visszaszorzást:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & 3x^2 & - & x & + & 1 & : & x - 1 & = 3x + 2\ldots \\
- & \bigl(3x^2 & - & 3x) & & & & & \\
\cline{1-4}
 & & & 2x & & & & & \\
 & & & 2x & - & 2 & & &
\end{array}
$$

7. lépés: elvégezzük a kivonást:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & 3x^2 & - & x & + & 1 & : & x - 1 & = 3x + 2\ldots \\
- & \bigl(3x^2 & - & 3x) & & & & & \\
\cline{1-4}
 & & & 2x & + & 1 & & & \\
 & & -(& 2x & - & 2) & & & \\
\cline{3-6}
 & & & & & 3 & & &
\end{array}
$$

Mivel a 3 fokszáma alacsonyabb, mint az osztóé, ezért a maradékos osztás végetért: $3x^2 - x + 1 = (3x + 2)(x - 1) + 3$.

A lejegyzés most is egyszerűsíthető azzal, ha a visszaszorzást és a kivonást egy lépésben végezzük el, azonban ez nagy odafigyelést igényel.

6.3.3. Megjegyzés *Ennek a maradékos osztásnak az eljárása olyan, mint amilyen a természetes számokon volt. A különbség csak annyi, hogy az együtthatók tetszőleges T-beli elemek lehetnek. De még a helyiértékek is megvannak: a megfelelő fokszámú elemek jelölik ki.*

Eszerint úgy is lejegyezhetjük a polinomosztást, hogy táblázatba írjuk (hogy ne tévesszük el a „helyiértéket"), de az x-eket kihagyjuk (arról viszont nem feledkezhetünk el, hogy a kihagyott 0, illetve le nem írt 1 együtthatókat is beírjuk):

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrr}
 & 3 & - & 1 & + & 1 & : & 1 & - & 1 & = & 3 & + & 2\ldots \\
- & (3 & - & 3) & & & & & & & & & & \\
\cline{1-4}
 & & & 2 & + & 1 & & & & & & & & \\
 & & -(& 2 & - & 2) & & & & & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & & & 3 & & & & & & & &
\end{array}
$$

Abból, hogy ebben a konkrét esetben el tudtuk végezni az osztást, nem következik, hogy minden A, $B \neq O$ polinompárra elvégezhető. A következő tétel viszont éppen ezt mondja ki:

6.3.4. Tétel (Polinomok maradékos osztására vonatkozó tétel)
Tetszőleges A, B (nem azonosan nulla) $T[x]$-beli polinomokhoz van olyan P és Q – szintén T feletti – polinom, amelyekre

I.(a) $A = PB + Q$

I.(b) *Q vagy egyenlő az O-val, vagy kisebb a fokszáma, mint B fokszáma.*

II. P és Q egyértelműen meghatározott.

Bizonyítás. A bizonyítás első részét A fokszámára, pontosabban méretére vonatkozó teljes indukcióval végezzük el.

Először megvizsgáljuk, hogy mi a helyzet abban az esetben, ha A-nak nem létezik fokszáma, azaz a mérete 0. Ekkor – vagyis ha $A = O$ – készen vagyunk, mert ebben az esetben $P = Q = O$ megfelelő.

Most azt vizsgáljuk, hogy mi a helyzet $\mathrm{gr}(A) = 0$ esetén: Ha A fokszáma 0, akkor ha B fokszáma nagyobb 0-nál, akkor $P = O$, $Q = A$ megfelelő (ekkor teljesül I.(a) és I.(b) is), ha pedig B fokszáma is 0, akkor $P = \dfrac{B}{A}$ elvégezhető (T test), valamint $R = O$.

Indukciós feltevés: $\mathrm{gr}\,A < n$ esetére feltételezzük, hogy elvégezhető a maradékos osztás.

Legyen A fokszáma $n > 0$, ekkor A főtagját elosztjuk B főtagjával. (Ez 5.2.5. állítás szerint elvégezhető és polinomot eredményez.) Ez lesz a keresett hányados polinom főtagja: P'.

Eredetileg olyan P és Q polinomokat keresünk, amelyekre $A = PB + Q$, vagyis az adott P' mellett az $A = B(P' + P'') + Q$ felíráshoz keressük P''-t és Q-t.

Ekkor $A - BP'$ fokszáma kisebb, mint n, azaz A fokszáma (mert A és BP' főtagjai egyenlők – így kerestük meg P'-et), tehát az indukciós feltevés értelmében maradékosan osztható B-vel: $A - BP' = P''B + Q$.

Ekkor $A = B(P'+P'')+Q$, vagyis megkaptuk az $A = B(P'+P'')+Q$ maradékos osztásban szereplő $P = P' + P''$, illetve Q polinomokat.

Ezzel a bizonyítás I. részét befejeztük.

Ha most tekintjük A-nak a $A = BP_1 + Q_1$ és $A = BP_2 + Q_2$ felírását, akkor kivonva ezeket egymásból $O = BP_1 + Q_1 - BP_2 - Q_2 = B(P_1 - P_2) + (Q_1 - Q_2)$ adódik, amiből $B(P_2 - P_1) = Q_1 - Q_2$.

A bal oldalon álló kifejezés osztható B-vel, így a jobb oldalon álló $Q_1 - Q_2$ is.

Ha most a B-vel osztható $Q_1 - Q_2 \neq O$, akkor a fokszáma biztosan kisebb B fokszámánál, de a szorzat fokszámára vonatkozó összefüggés szerint ez lehetetlen.

Így csak az lehet, hogy $Q_1 = Q_2$. Amiből $B(P_1 - P_2) = O$, és mivel $B \neq O$, a polinomok szorzására vonatkozó fokszámtétel szerint csak $P_1 = P_2$ lehetséges.

Ezzel bebizonyítottuk az egyértelműséget is. $\square$

6.4. Az euklideszi algoritmus

6.4.1. Példa. *Az egész számok halmazán leírt euklideszi algoritmus mintájára keressük meg az $A = 3x^2 - 2x - 1$ és a $B = x^2 - 1$ polinomok legnagyob közös osztóját!*

Tudjuk, hogy az euklideszi algoritmus alapja az a gondolat, hogy két elem közös osztója osztója a különbségüknek is, és ha ezzel kisebb elemekhez jutunk, akkor egyszerűen folytatva az eljárást, előbb-utóbb olyan elemeket kapunk, amelyek egymással és a lehető legnagyobb közös osztóval is egyenlőek. Ennek érdekében nem egyszerűen kivontuk a nagyobbik elemből a kisebbiket, hanem egyetlen, nagyobb lépésben meghatároztuk a nagyobbiknak a kisebbel vett maradékát.

A polinomoknál persze a nagyságot a fokszám jelenti.

Az előzőek szerint tehát elosztjuk maradékosan az A-t B-vel.

1. $3x^2 - 2x - 1 = (x^2 - 1)3 + \underbrace{(-2x + 2)}_{\text{maradék}}$

Most az új maradékkal osztjuk a korábbi osztót:

2. $x^2 - 1 = (-2x + 2) \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) x + \underbrace{(x - 1)}_{\text{maradék}}$

Ismét osztjuk az előző osztót a kapott maradékkal:

3. $-2x + 2 = -2(x - 1) + \underbrace{0}_{\text{maradék}}$

Az utolsó nem nulla maradék az $x - 1$, vagyis ez a két polinom legnagyobb közös osztója. A legnagyobb közös osztó csak asszociált, vagyis konstans szorzó erejéig egyértelmű. Általában a lehetséges legnagyobb közös osztó konstansszorosai közül vehetjük „kitüntetettnek” azt, amelyiknek a főegyütthatója 1. Esetünkben éppen ilyen legnagyobb közös osztót kaptunk.

6.4.2. Állítás (Euklideszi algoritmus a polinomok körében)
Tetszőleges A és B $T[x]$-beli, nem O-val azonos polinomoknak létezik legnagyobb közös osztója, és ez egész számoknál látott módon meghatározható az euklideszi algoritmus segítségével.

Bizonyítás. Azt állítjuk, hogy az

$$\begin{aligned} A &= Q_1 B + R_1, \\ B &= Q_2 R_1 + R_2, \\ R_2 &= Q_3 R_2 + R_3 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{6.1}$$

maradékos osztás láncban az utolsó nem nulla (O) maradék az A és a B legnagyobb közös osztója.

Először belátjuk, hogy közös osztó. Ez abból következik, hogy ha egy

$$U = PV + R$$

maradékos osztásban S osztója U-nak és és V-nek, akkor R-nek is, hiszen $U = U_1 S$, $V = V_1 S$, így $R = U_1 S - PV_1 S$, vagyis $R = S(U_1 - PV_1)$, ezért $S \mid R$.

Eszerint a legnagyobb közös osztó (ha létezik) minden lépésben osztója az osztandónak, az osztónak és a maradéknak. Mivel a láncban az új osztandó az előző osztó, az új osztó pedig az előző maradék, így az újonnan keletkező maradéknak is osztója lesz a legnagyobb közös osztó (ha létezik).

Most belátjuk, hogy az utolsó nem nulla maradék a legnagyobb közös osztó, ami a polinomok körében azt jelenti, hogy minden közös osztójuknak többszöröse.

Tegyük fel, hogy Z közös osztója A-nak és B-nek is.

Mivel Z osztója A-nak és B-nek, így osztója lesz R_1-nek is. Hasonlóan, minden további lépésben osztója az osztandónak és az osztónak, vagyis a keletkező maradéknak is. Így a legutolsó nem nulla maradéknak is osztója a Z, így az utolsó nem 0 maradék valóban többszöröse minden közös osztónak. □

Azt egyébként már láttuk, hogy a legnagyobb közös osztó legfeljebb asszociált erejéig egyértelmű. Ugyan az euklideszi algoritmus csak egyetlen eredményt ad, de tudjuk, hogy ez nem az egyetlen legnagyobb közös osztó.

6.4.3. Következmény. *Két polinom legnagyobb közös osztója előáll a két polinom lineáris kombinációjaként, vagyis A-hoz és B-hez van olyan U és V polinom, amelykre az $(A, B) = AU + BV$.*

Bizonyítás. Az első egyenlőségből kifejezhető a maradék A és B lineáris kombinációjával: $R_1 = A - BQ_1$. Ezt behelyettesítjük a másodikba, amelyből ismét kifejezhető a maradék A és B segítségével.

Fogalmazhatjuk ezt úgy is, A és B lineáris kombinációinak lineáris kombinációja továbbra is lineáris konmbinációja lesz A-nak és B-nek:

$$\alpha_1 \cdot (a_1 A + b_1 B) + \alpha_2 \cdot (a_2 A + b_2 B) = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)A + (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2)B.$$

Így haladva végül az utolsó nem nulla maradékhoz is eljutunk, azt is megkapjuk A és B lineáris kombinációjaként. □

Az euklideszi algoritmus egy másik következménye:

6.4.4. Következmény. *Ha A, B és C $T[x]$-beli polinomok, és egyik sem az O, akkor $(AC, BC) = C(A, B)$.*

Bizonyítás. A felírt maradékos osztás minden sorát megszorozva C-vel éppen a bizonyítandó összefüggést kapjuk. □

Ezután egész számokra definiáltuk a prímelem és a felbonthatatlan elem tulajdonságokat. Polinomokra is megadhatók ezek a fogalmak:

6.4.5. Definíció. *Egy O-tól és egységtől különböző F polinom* felbonthatatlan (irreducibilis), *ha minden olyan esetben, amikor F felírható UV szorzat alakban, akkor U vagy V egység (és persze a másik polinom F-nek asszociáltja).*

6.4.6. Következmény. *Nyilvánvaló, hogy (minden test fölött) az elsőfokú polinomok felbonthatatlanok, ez a polinomok szorzásának fokszámára vonatkozó összefüggésből következik. (Egy elsőfokú polinomot nem tudunk alacsonyabb fokú polinomok szorzataként felírni.)*

6.4.7. Definíció. *Egy O-tól és egységtől különböző P polinom* prímtulajdonságú, *ha valahányszor osztója egy XY polinomszorzatnak, osztója valamelyik tényezőnek.*

Az egész számok körében ezután bebizonyítottuk, hogy az egész számok körében ez a két tulajdonság megegyezik. (Azt is láttuk, hogy ez nem minden halmazban teljesül.)

6.4.8. Tétel *A $T[x]$ halmazban a prímtulajdonság és a felbonthatatlanság ugyanazokra a polinomokra teljesül.*

Bizonyítás. Legyen F felbonthatatlan. Tételezzük fel, hogy $F = XY$. Belátjuk, hogy ekkor F osztója X-nek vagy Y-nak.

Ha $F \mid X$, akkor készen vagyunk. Ha viszont $F \nmid X$, akkor a legnagyobb közös osztójuk egység ($\mathcal{E}$), hiszen F osztói csak egységek vagy saját asszociáltjai lehetnek. Azaz $(F, X) = \mathcal{E}$, ezért a 6.4.4. következmény miatt $(FY, XY) = \mathcal{E}Y$, viszont mivel FY és XY is osztható F-vel ($F = XY$), így $F \mid \mathcal{E}Y$, azaz $F \mid Y$.

Ezzel beláttuk az állítás egyik felét.

Másrészt ha P prímelem, és valamely UV-vel egyenlő, akkor ennek a szorzatnak nyilván osztója is: $P \mid P$, vagyis $P \mid UV$. Mivel P prímtulajdonságú, ezért U és V közül az egyiknek biztosan osztója. Legyen ez például az U. (V-re természetesen ugyanúgy működik a bizonyítás.)

Eszerint $U \mid P$. $P = UV$ miatt viszont $U \mid P$, vagyis az U a P asszociáltja, V pedig – ezek szerint – egység.

Ezzel az állítás másik felét is beláttuk. □

Ezután – csakúgy, mint az egész számok körében – rátérhetünk a számelmélet alaptételére.

6.4.9. Tétel (A számelmélet alaptétele polinomokra) *Minden O-tól és egységtől különböző T test fölötti polinom vagy felbonthatatlan, vagy lényegében egyértelműen írható fel felbonthatatlan elemek szorzataként. Az egyértelműség sorrend és asszociáltság erejéig érvényes. (Vagyis két felírás csak konstans szorzóban és a tényezők sorrendjében térhet el.)*

6.4.10. Megjegyzés. *Ez a (lényegében egyértelmű) feltétel az egész számok körében elég semmitmondónak tűnt, hiszen a sorrend nyilván változhat, mert a szorzás kommutatív, az egységszeres pedig csak előjelváltást jelent.*

A természetes számokon még semmitmondóbb az egyértelműségben az egységszeres kitétel, hiszen ott csak az 1 az egység.

Bizonyítás. Felírhatóság: A bizonyítás „létezik a felírás” részét a polinom fokszámára vonatkozó indukcióval végezzük el. Ha a polinom fokszáma 1 (0 nem lehet), akkor készen vagyunk, hiszen a polinomok szorzására vonatkozó fokszámösszefüggés alapján a polinom felbonthatatlan.

Ha a fokszám n (1-nél nagyobb), akkor amennyiben a polinom felbonthatatlan, akkor készen vagyunk. Ha felbontható két, külön-külön n-nél kisebb fokú polinom szorzatára, akkor a kapott polinomokra alkalmazzuk a tétel felírhatóságra vonatkozó részének indukciós állítását.

Ezzel beláttuk a felbonthatóságot.

Kvázi-egyértelműség: Tekintsük egy polinom két felírását. Amennyiben vannak olyan tényezők a két felírásban, amelyek egymás asszociáltjai, akkor ezekkel egyszerűsíthetjük a szorzatokat.

Amennyiben ezután nem csak két (egyébként nyilván egyenlő) konstans maradt volna, hanem további felbonthatatlan polinomok szorzata, akkor a bal oldalon álló polinomok egyike nyilván osztója a jobb oldali polinomszorzatnak, így annak valamely (prím, azaz felbonthatatlan) tényezőjének is: $F_1 \mid F_2$. Mivel ezek felbonthatatlanok, ez azt jelenti, hogy $F_1 = F_2\mathcal{E}$ (F_2 osztója csak egység vagy asszociáltja lehet, de F_1 nem egység). Vagyis mégiscsak maradt volna egy-egy olyan polinomtényező a két oldalon, amelyek egymás asszociáltjai, ami ellentmondás, így a két felírás valóban „lényegében" megegyezik. □

Ezzel eljutottunk arra a pontra, ameddig az egész számok számelméletében:

Minden O-tól és egységtől különböző polinom lényegében egyértelműen írható fel felbonthatatlan polinomok szorzatára. (Ebben a megfogalmazásban a felbonthatatlan elemet egytényezős szorzatnak tekintettük.)

6.4.11. Következmény. *A polinomokra vonatkozó számelméleti alaptételből látszik, hogy egy n-edfokú polinom legfeljebb n polinom szorzatára bontható, hiszen 0-adfokú polinomok egységek.*

Az általunk leginkább ismert és használt három test a komplex számok, a valós számok és a racionális számok teste.

Felmerül a kérdés, hogy melyek a felbonthatatlan elemek a $\mathbb{C}[x]$-ben, az $\mathbb{R}[x]$-ben, illetve e $\mathbb{Q}[x]$-ben.

A következő részben ezekre a kérdésekre keressük a választ. Sajnos éppen a legegyszerűbben hangzó válasz lesz a legnehezebb. Nem is fogjuk bizonyítani.

Feladatok

1. Igazolja, hogy ha egy P polinomra $P \mid AB$ és $(P, A) = \mathcal{E}$, akkor $P \mid B$.
2. Igazolja, hogy az $x^2 + 2x + 2$ polinom a valós számok fölött irreducibilis.
3. Felbontható-e a valós számok fölött az $x^2 + 4$ polinom?
4. Végezze el a következő maradékos osztásokat!

   (a) $(2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x + 1)$

(b) $(x^3 - 3x^2 - x - 1) : (3x^2 - 2x + 1)$

(c) $(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8) : (x - 1)$

5. Igazolja, hogy ha egy A polinomnak gyöke x_1 és maradékosan osztjuk a B polinommal, amelynek szintén gyöke az x_1, akkor a maradék polinomnak is gyöke x_1.

7. Az algebra alaptétele és következményei

Ahhoz, hogy megértsük és fel tudjuk használni a témakör legfontosabb tételét, meg kell ismerkednünk néhány fogalommal és összefüggéssel.

7.1. Néhány fontos fogalom

7.1.1. Definíció. *A* $P \in T[x]$ polinom gyökének *nevezzük az* $x_0 \in T$ *elemet, ha az* x *helyébe* x_0*-t írva a formális kifejezés helyettesítési értéke* 0.

Ez pontosan azt jelenti, hogy x_0 a $P\colon x \mapsto P(x)$ polinomfüggvénynek nullhelye, azaz $P(x_0) = 0$.

7.1.2. Állítás *Ha* x_0 *gyöke egy* P *polinomnak, akkor* P *osztható az* $(x - x_0)$ *polinommal.*

Bizonyítás. Osszuk el maradékosan a P polinomot $(x - x_0)$-lal:

$$P = Q \cdot (x - x_0) + R.$$

Ebben a maradékos osztásban R csak konstans lehet, hiszen az osztó $(x - x_0)$ fokszáma 1. Továbbá kifejezhető az R: $R = P - Q(x - x_0)$.

Helyettesítsünk x helyébe x_0-t. Mivel P az x_0-ban 0 és $Q(x_0 - x_0)$ is nulla, így R helyettesítési értéke is nulla az x_0-ban.

R tehát egy olyan konstans polinom, amely x_0-ban nulla, ebből pedig következik, hogy mindenütt nulla. □

7.2. Irreducibilis komplex együtthatós polinomok

7.2.1. Tétel (Az algebra alaptétele) *A $C[x]$-ben minden legalább elsőfokú polinomnak van gyöke.*

Ezt a tételt nem bizonyítjuk, de jól körül fogjuk járni.

1. Nem tévesztendő össze a számelmélet alaptételével!

2. A tétel azt mondja ki, hogy minden nem konstans komplex együtthatós polinomnak van gyöke. A 7.1.2. állításból következik, hogy egy n-edfokú ($n > 1$) komplex polinomnak biztosan van gyöke, és így „kiemelhető" belőle egy elsőfokú tényező. Induktív módon eljárva a megmaradó másik tényezőnek is van gyöke, annak is van elsőfokú osztója.

3. Azt már korábban láttuk, hogy minden n-edfokú polinomnak legfeljebb n gyöke lehet. Ebből a tételből az is látszik, hogy a komplex együtthatós n-edfokú polinomoknak pontosan n gyöke van – esetleg vannak köztük egyenlők.

Foglaljuk össze az algebra alaptételének legalapvetőbb következményeit:

7.2.2. Következmény.

1. *Minden nem konstans komplex együtthatós polinomnak van gyöke.*
2. *Minden nem konstans komplex együtthatós n-edfokú polinom felírható n darab elsőfokú polinom szorzataként.*
3. *A nem konstans komplex együtthatós n-edfokú polinomoknak (multiplicitással, vagyis az egyenlő gyököket többszörösen számítva) pontosan n gyöke van.*
4. *A komplex polinomok között pontosan az elsőfokúak az irreducibilisek.*

Ezzel a $\mathbb{C}[x]$ polinomok körében megadtuk az irreducibilis elemeket. A valósok körében – nyilván – felbonthatatlanok az elsőfokúak, és középiskolai tanulmányainkból tudjuk, hogy azok a másodfokúak is fenbonthatatlanok, amelyek diszkriminánsa negatív.

Az a kérdés, van-e más felbonthatatlan polinom $\mathbb{R}[x]$-ben.

7.3. Irreducibilis valós együtthatós polinomok

7.3.1. Tétel *A valós számok körében a felbonthatatlan polinomok az elsőfokúak és azok a másodfokúak, amelyek diszkriminánsa negatív.*

Bizonyítás. Vizsgáljuk a P valós együtthatós polinomot komplex együtthatósként. (Tehetjük, mert minden valós szám komplex is.)

Ekkor ha a z komplex szám gyöke P-nek, akkor z konjugáltja gyöke P konjugáltjának (ez az összeg és szorzat konjugálására vonatkozó azonosságokból következik). A P konjugáltja azonban maga P, hiszen minden együtthatója valós.

Emiatt, ha a z komplex szám gyöke P-nek, akkor $\overline{z}$ is gyöke.

A valós együtthatós P polinom (mint komplex együtthatós) tehát így írható elsőfokú polinomok szorzataként:

$$(x - z_1)(x - \overline{z_1})(x - z_2)(x - \overline{z_2}) \cdot \ldots \cdot (x - x_1)(x - x_0).$$

(Előre soroltuk a komplex gyököket a konjugáltjaikkal együtt, a végére a valósakat, hiszen ilyenek is lehetnek.)

Ebben az alakban az $(x - z)(x - \overline{z})$ szorzat $x^2 - (z + \overline{z})x + z\overline{z}$, ez egy másodfokú valós együtthatós polinom. Ennek a diszkriminánsa negatív, mert két nem valós gyöke van, z és $\overline{z}$. (Egyébként természetesen a komplexek fölött kiszámíthatók a gyökei, hiszen meghatározható a diszkrimináns négyzetgyöke, ami $\pm(z - \overline{z})$.)

Vagyis minden nem konstans valós együtthatós polinom felbontható elsőfokú valós tényezők és negatív diszkriminánsú másodfokú tényezők szorzataként.

Ebből következik, hogy a valós fölött a felbonthatatlanok éppen a tétel szerintiek. □

A tételnek van egy nagyon egyszerű következménye:

7.3.2. Következmény. *Minden legalább harmadfokú valós együtthatós polinom felbontható.*

Analitikusan (végtelenben vett határértékekkel és a folytonosságra vonatkozó tételek segítségével) nem nehéz bebizonyítani, de most algebrai úton is láthatjuk, hogy:

7.3.3. Következmény. *A páratlan fokú valós polinomoknak van valós gyöke.*

Ez azért igaz, mert a valós együtthatós polinomok komplex gyökei „párban” fordulnak elő, vagyis a páratlan fokú polinomoknak van elsőfokú valós tényezője.

7.4. Irreducibilis racionális együtthatós polinomok

A racionális számok is számtestet alkotnak (a szokásos összeadással és szorzással), de leginkább a valósokon megfogalmazott eredményeket szoktuk a racionálisokra is vonatkoztatni.

Ha most ezzel próbálkoznánk, nagyon nagy bajban lennénk.

Láttuk, hogy vannak olyan egész együtthatós polinomok, amelyeknek nemhogy egész vagy racionális, de még csak valós gyöke sincs, például az $x^2 + 1$.

Példa. Van-e racionális gyöke az $x^2 - 2$ polinomnak?

A valósok fölött megoldva az $x^2 - 2 = 0$ egyenletet $x = \pm 2$ adódik, ami nem racionális.

Ilyen alapon hamar kiderül, hogy akármilyen magas fokszámú polinom is lehet irreducibilis a racionálisok fölött: $x^n - 2$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

A $2x^2 - 2$ polinomnak persze van racionális gyöke, az 1 és a -1. Az $x^2 - \dfrac{1}{4}$ polinomnak pedig a $\pm\dfrac{1}{2}$.

Az $ax + b$ racionális együtthatós polinom irreducibilis.

Az ax^2+bx+c nemcsak akkor irreducibilis, ha a diszkriminánsa negatív, hanem akkor is, ha a diszkriminánsa nem racionális szám négyzete.

Azt tudjuk, hogy ha az együtthatók egészek lennének (és miért ne lehetnének – egy konstans szorzóval elintézhető), akkor a diszkrimináns egész szám lenne, és akkor az lenne a felbonthatóság szükséges feltétele, hogy a diszkrimináns négyzetszám legyen.

7.4.1. Definíció. *Két* egyenlet ekvivalens, *ha ugyanazok a megoldásai.*

Két polinomfüggvény ekvivalens, *ha ugyanazok a zérushelyei.*

7.4.2. Következmény. *Két komplex vagy valós vagy racionális test feletti polinom ekvivalens, ha egymás konstansszorosai.*

Bizonyítás. Osszuk el a polinomot a főegyütthatóval. Ezután felírjuk komplex elsőfokú tényezők szorzataként:

$$(x - z_1)(x - z_2)\dots(z - z_n)$$

A polinom gyökei $z_1, z_2, \ldots, z_n$. A polinomnak ez a komplex feletti gyöktényezős alakja. Minden olyan polinomnak, amelynek pontosan ugyanezek a gyökei legfeljebb a konstans szorzóban térhet el. □

A racionális számtest fölötti polinomok között keresve a felbonthatatlan polinomokat azt tapasztaljuk, hogy nagyon szorosan kapcsolódnak az egész együtthatós polinomokhoz, bárha ezek nem test felettiek, és másképp is viselkednek. (Nem lesz például minden konstans polinom egység.)

A racionális és az egész együtthatós polinomok között nagyon szoros a kapcsolat: minden racionális polinom felírható egy egész együtthatós polinom és egy racionális konstans szorzataként. Ez a felírás azonban nem egyértelmű. Igyekszünk egyértelművé tenni.

Ezért most az egész együtthatós polinomokat fogjuk szemügyre venni.

A sok ekvivalens polinomalak közül szeretnénk kitüntetni egyet. Ehhez először az együtthatók legnagyobb közös osztójával el kell osztanunk a polinomot. Ezután meg kell állapodnunk, hogy melyik legyen ez a kitüntetett alak.

7.4.3. Definíció. *Egy egész együtthatós polinomot* primitívnek *nevezünk, ha az együtthatóik egymáshoz relatív prímek, és a főegyütthatója pozitív.*

Ez azt jelenti, hogy egy P primitív polinom nem írható fel dP alakban, ahol $P \in \mathbb{Z}[x]$, $1 < |d| \in \mathbb{N}$. Vagyis P-nek nincs konstans osztója (csak az 1 és a -1).

7.4.4. Tétel *1. A primitív polinomnak minden nem konstans osztója primitív polinom (vagy annak ellentettje).*

2. Két primitív polinom szorzata is primitív.

Bizonyítás. 1. Legyen P egy primitív polinom, és írjuk fel két tényező (A és B) szorzataként. Mivel P főegyütthatója pozitív, feltételezhetjük, hogy mindkét tényező főegyütthatója pozitív. (Ha mindkettőé negatív, akkor a (-1)-szeresüket vesszük).

Ha A nem lenne primitív – de a főegyütthatója pozitív –, akkor az azt jelentené, hogy van 1-nél nagyobb abszolút értékű konstans osztója, így $A = d \cdot A_1$ alakú lenne. Ekkor $P = d \cdot A_1 \cdot B$ miatt P-nek osztója lenne d, azaz P sem lenne primitív.

2. Tegyük fel, hogy két primitív polinomot összeszoroztunk, és nem primitív az eredmény.

$$\begin{aligned}
P &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0,\\
Q &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0,\\
C &= (a_n \cdot b_m) \cdot x^{n+m} + (a_n \cdot b_{m-1} + a_{n-1}b_m) \cdot x^{n+m-1} + \ldots\\
&\quad \ldots + (a_2 \cdot b_0 + a_1 \cdot b_1 + a_0 \cdot b_2)x^2 + (a_1 \cdot b_0 + a_0 \cdot b_1) \cdot x + a_0 \cdot b_0.
\end{aligned}$$

Ezek szerint van olyan egész szám – így olyan p prímszám is van –, amely osztja a szorzat minden együtthatóját.

A konstans tag osztható p-vel, ezért a_0 vagy b_0 osztható vele. Ha ez a_0 (hasonlóan gondolható meg, ha b_0), akkor P-nek nem oszthatja minden együtthatóját, hiszen P primitív.

Tegyük fel, hogy például a_0, a_1, …, a_t osztható p-vel, de már a_{t+1} nem osztható vele.

Ekkor az $a_0b_t+a_1b_{t-1}+\ldots+a_{t-1}b_1+a_tb_0$ tagban (amely szintén osztható p-vel) b_0-nak kell p-vel oszthatónak lennie.

Emiatt az $a_0b_{t+1} + a_1b_t + a_2b_{t-1} + \ldots + a_tb_1 + a_{t+1}b_0$ tagban (amely szintén osztható p-vel) b_1-nek is oszthatónak kell lennie p-vel.

Az $a_0b_{t+2} + \ldots + a_tb_2 + a_{t+1}b_1 + a_{t+2}b_0$ tagban b_2-nek kell oszthatónak lennie p-vel.

Satöbbi. (A lépések a 5.1 táblázat általánosabb alakján követhetők nyomon.)

Így eljutunk az $a_{t+m}b_0 + a_{t+m-1}b_1 + \ldots + a_tb_m$ tagig, amelyben végül b_m-nek kell p-vel oszthatónak lennie, emiatt B minden együtthatója osztható p-vel, és ez ellentmond annak, hogy B primitív. □

Az egész együtthatós polinomok körében tehát a primitív polinomok egy (szorzásra) zárt struktúrát alkotnak. Ez nagyon erős tulajdonság.

7.4.5. Tétel *Minden racionális együtthatós polinom egyértelműen bontható fel egy tovább nem egyszerűsíthető racionális szám és egy primitív polinom szorzatára.*

Bizonyítás. Először az egyértelműséget bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy P-t kétféleképpen is felírtuk egy primitív polinom és egy tovább már nem egyszerűsíthető tört szorzataként: $P = \frac{p}{q} \cdot A = \frac{u}{v} \cdot B$.

Eszerint $\frac{p \cdot v}{u \cdot q} \cdot A = B$.

Itt A és B is primitív polinom, tehát együtthatóik egészek és relatív prímek.

$\dfrac{p \cdot v}{u \cdot q}$ egész szám, mert A primitív, és ha törtszám lenne, akkor $\dfrac{p \cdot v}{u \cdot q}A$-ban lenne olyan együttható, amely nem egész.

Másrészt viszont $A = \dfrac{u \cdot q}{p \cdot v}B$-ban $\dfrac{u \cdot q}{p \cdot v}$ is egész szám, emiatt csak 1 vagy -1 lehet.

Ekkor pedig $A = B$ vagy $A = -B$, de tekintettel arra, hogy a primitív polinom főegyütthatója pozitív, csak az egyik eset lehetséges, és $\left|\dfrac{p}{q}\right| = \left|\dfrac{u}{v}\right|$.

Az előjelek alapján meggondolható, hogy a két felírás ugyanaz.

A felírás pedig a következőképpen konstruálható:

1. P (racionális együtthatós) polinom minden együtthatójának nevezőjét összeszorozva k-t kapunk, ezzel a $P_1 = k \cdot P$ polinom egész együtthatós.

2. A P_1 együtthatóiból a közös osztókat kiemelve l-et kapunk, erre $P_2 = \dfrac{1}{l} \cdot P_1 = \dfrac{k}{l} \cdot P$, ahol a törtet egyszerűsítve a kívánt alakú felírást kapjuk; illetve ha P főegyütthatója nem lenne pozitív, akkor a $-\dfrac{k}{l} \cdot (-P)$ felírást választjuk. $\square$

Ezzel létesítettünk egy megfeleltetést a racionális és a primitív egész együtthatós polinomok között.

Az egymással ekvivalens racionális együtthatós polinomok között vannak egész együtthatós polinomok. Ezek között kitüntettünk egyet, egy primitív polinomot. Tulajdonképpen oszthatósági szempontból minden racionális együtthatós polinomot azonosíthatunk a neki megfelelő primitív polinommal.

A primitív polinomok pedig csak primitív polinomok szorzatára bonthatók fel.

Ha most a racionális polinomok körében meg tudnánk állapítani, hogy melyek a felbonthatatlanok, akkor az egész együtthatós polinomok körében is meg tudnánk mondani. Az a racionális polinom, amelyik felbonthatatlan a racionális felett, annak a neki megfelelő primitív polinom is felbonthatatlan az egészek felett, illetve az egészek felett felbonthatatlan primitív polinomnak megfelelő minden racionális polinom felbonthatatlan.

$Q = R_1 \cdot R_2$ esetén $\dfrac{a}{b}Q' = \dfrac{c}{d}R_1' \cdot \dfrac{e}{f}R_2'$ a primitív polinomok felbontására vonatkozó 7.4.4. tétel első állítása szerint $Q' = R_1' \cdot R_2'$.

Ha tekintünk egy egész együtthatós polinomot, akkor úgy tudjuk eldönteni, hogy az felbonthatatlan-e, hogy kiemeljük az együtthatók legnagyobb közös osztóját (primitív polinomot készítünk belőle), racionális együtthatósnak tekintjük, és megvizsgáljuk, hogy a racionálisak körében felbontható-e.

Ha ugyanis felbontható, akkor a felbontás racionális polinomjait felírjuk primitív polinomok és törtek szorzataként; a felírásban szereplő egész együtthatós polinomok primitívek, emiatt a törtek szorzata 1 kell legyen. Így tehát találtunk egy egész együtthatós felbontást.

Ha pedig a racionálisban felbonthatatlannak bizonyul, akkor az egészek körében is felbonthatatlan kell legyen, hiszen ha az egészek körében felbonthatnánk, akkor racionális együtthatósnak kezelve a felbontást, a racionálisak körében is találtunk volna egy felbontást.

7.4.6. Következmény. *Az egész együtthatós primitív polinomok akkor és csak akkor felbonthatatlanok az egészek fölött, ha a racionálisban felbonthatatlanok.*

Marad a kérdés: Mik a felbonthatatlanok a racionális felett? Kereshetjük persze a primitív egész együtthatós polinomok körében is a felbonthatatlanokat, ez ugyanaz a probléma.

Erre a kérdésre nem fogunk kimerítő választ adni. Egy-egy tételt mondunk ki arról, hogy mi lehet gyöke egy racionális polinomnak, illetve adunk egy elégséges (de nem szükséges) feltételt arra, hogy mikor irreducibilis egy polinom.

7.4.7. Tétel (Rolle-tétel) *Ha*

$$A = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

egész együtthatós primitív polinom ($a_i \in \mathbf{Z}$), akkor a tovább már nem egyszerűsíthető $\frac{p}{q}$ csak akkor lehet gyöke, ha $p \mid a_0$ és $q \mid a_n$.

Ez tehát csak szükséges, de nem elégséges feltétel: szükséges, hogy $\frac{p}{q}$ a fenti tulajdonságú legyen, de ez a tulajdonság még nem elegendő ahhoz, hogy valóban gyöke is legyen a polinomnak.

Bizonyítás. Helyettesítsük be x helyére a $\frac{p}{q}$-t, hogy meglássuk, milyen tulajdonsággal kell rendelkeznie $\frac{p}{q}$-nak ahhoz, hogy az eredmény 0 legyen.

$$0 = a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + \ldots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0.$$

Szorozzuk a kifejezést q^n-nel:

$$0 = a_n p^n + \ldots + a_1 p \cdot q^{n-1} + a_0 q^n.$$

Minden tag osztható p-vel, kivéve a a_0-t, így az összeg (a 0) csak úgy lehet szintén p-vel osztható, ha $p \mid a_0$. Minden tag osztható q-val, kivéve a a_n-t, így az összeg (a 0) csak úgy lehet szintén q-val osztható, ha $q \mid a_n$, hiszen p és q relatív prímek. □

Példa. A $6x^2 + 2x - 2$-nek csak a $\pm\frac{2}{6}$, $\pm\frac{2}{3}$, $\pm\frac{2}{2}$, $\pm\frac{2}{1}$, $\pm\frac{1}{6}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{1}$ lehet gyöke a racionális számok körében. (Persze könnyen tudjuk ellenőrizni, hogy ennek a polinomnak nincsen racionális gyöke.)

Az $x^3 + x^2 + x + 1$ polinomnak csak 1 vagy -1 lehet a racionális gyöke – és -1 valóban gyöke is.

7.4.8. Tétel (Schönemann–Eisenstein) *Az egész együtthatós*

$$A = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

primitív polinom felbonthatatlan, ha van olyan p prímszám, amely osztja az együtthatók mindegyikét, kivéve a_n-t, de p^2 már nem osztja a_0-t.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az A polinom felbontható két polinom szorzatára: $A = P \cdot Q$. Mivel A primitív, P és Q is az.

$$P = p_k x^k + \ldots + p_1 x + p_0, \qquad Q = q_l x^l + \ldots + q_1 x + q_0.$$

Ezekből A együtthatói:

$$\begin{aligned}
a_n &= p_k q_l \\
a_{n-1} &= p_k q_{l-1} + p_{k-1} q_l \\
a_{n-2} &= p_k q_{l-2} + p_{k-1} q_{l-1} + p_{k-2} q_l \\
a_{n-3} &= p_k q_{l-3} + p_{k-1} q_{l-2} + p_{k-2} q_{l-1} + p_{k-3} q_l \\
&\vdots \\
a_3 &= p_3 q_0 + p_2 q_1 + p_1 q_2 + p_0 q_3 \\
a_2 &= p_2 q_0 + p_1 q_1 + p_0 q_2 \\
a_1 &= p_1 q_0 + p_0 q_1 \\
a_0 &= p_0 q_0
\end{aligned}$$

(A 5.1 táblázatban nyomon követhetők a szorzat együtthatói.) Ezek $a_n = p_k q_l$ kivételével mind oszthatók p-vel. $p_0 q_0$ osztható p-vel, de mindkettő nem lehet p-vel osztható, mert akkor a szorzatuk osztható lenne p^2-tel. Emiatt pl. $p \mid p_0$.

A $p \mid p_1 q_0 + p_0 q_1$, és $p \mid p_0$ miatt $p \mid p_0 q_1$, így $p_1 q_0$ is osztható p-vel, de tudjuk, hogy q_0 nem. Emiatt $p \mid p_1$.

A $p_2 q_0 + p_1 q_1 + p_0 q_2$ osztható p-vel, $p_0 q_2$, $p_1 q_1$ is, így $p_2 q_0$ is, de tudjuk, hogy q_0 nem. Emiatt $p \mid p_2$.

Azt kapjuk visszafelé haladva, hogy $a_k = p_0 q_k + p_1 q_{k-1} + \ldots + p_k q_0$-nak is oszthatónak kellene lennie p-vel, de akkor p_k is osztható lenne.

Emiatt az $a_n = p_k q_l$ is osztható lenne, ám ez ellentmondás. $\square$

Példa. Az $x^2 - 2$ polinom eszerint felbonthatatlan az egészek fölött (itt $p = 2$), de például az $x^2 + 4$-ről vagy az $x^2 - 4$-ről ez nem látszik.

7.5. A Horner-elrendezés

Az egész együtthatós polinomok egész gyökeinek száma Rolle-tétele alapján legfeljebb $2a_0$ lehet. Racionális gyöke sem lehet sok, legfeljebb $2a_0 a_n$.

Ezért ezeket nem tart sokáig végigellenőrizni.

Polinomok helyettesítési értékeinek kiszámítására Horner (William George Horner (1786–1837) angol matematikus) olyan táblázatos módszert dolgozott ki, amelynek segítségével hatványozás nélkül számolhatunk.

A módszer lényege egy példán:

A $2x^3 - 6x^2 + 2x - 1$ polinomot $x(2x^2 - 6x + 2) - 1 = x(x(2x - 6) + 2) - 1$ alakba írva egy x_0 behelyettesítését ilyen lépésekkel végezhetjük el:

1. $2x_0$
2. $2x_0 - 6$
3. $x_0(2x_0 - 6)$
4. $x_0(2x_0 - 6) + 2$
5. $x_0(x_0(2x_0 - 6) + 2)$
6. $x_0(x_0(2x_0 - 6) + 2) - 1$

Egyszer sem kell hatványoznunk, csak szorozni, összeadni és kivonni.

Táblázatba rendezve a lépéseket például -2-re kiszámíthatjuk a helyettesítési értéket:

		2	-6	2	-1	
1.	-2	-4				(-2)-szer 2 az -4
2.	-2	-4	-10			-4 meg -6 az -10
3.	-2	-4	-10	20		-2-szer -10 az 20
4.	-2	-4	-10	22		20 meg 2 az 22
5.	-2	-4	-10	22	-44	-2-szer 22 az -44
6.	-2	-4	-10	22	-45	-44 meg -1 az -45

Vagy egyszerűbben (összevonva az x-szel való szorzást és a következő együttható hozzávételét):

		2	-6	2	-1	
1–2.	-2		-10			-2-szer 2 az -4, meg -6 az -10
3–4.	-2			22		-2-szer -10 az 20, meg 2 az 22
5–6.	-2				-45	-2-szer 44 az -44, meg -1 az -45

Így az egészet egyetlen sorba lehet írni:

	2	-6	2	-1
-2		-10	22	-45

Ennek a polinomnak az esetében két lehetséges egész gyök van, az 1 és a -1. (Racionális gyökként szóba jöhet még az $1/2$ és a $-1/2$.)

A helyettesítési értékek 1-ben és -1-ben:

	2	-6	2	-1
1		-4	-2	-3
-1		-8	10	-11

A helyettesítési értékek $1/2$-ben és $-1/2$-ben:

	2	-6	2	-1
$1/2$		-5	$-1/2$	$-5/4$
$-1/2$		-7	$1/2$	$-15/4$

Általában:

$$\begin{aligned} &a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ = \, &x\left(a_n + x\left(a_{n-1} + x\left(\ldots + a_3\right) + a_2\right) + a_1\right) + a_0 \end{aligned}$$

Táblázatba írva az együtthatókat, a behelyettesítés első lépésben a főegyütthatóval szorozzuk x_0-t, majd hozzáadjuk a következő együtthatót. A következő lépésben x_0-lal szorozzuk az eredményt, majd a soron következő együtthatót adjuk hozzá.

És így tovább. Az utolsó együttható hozzáadásával megkapjuk a helyettesítési értéket.

Feladatok

1. Igazolja, hogy az egész együtthatós polinomok körében nem minden konstans polinom egység.
2. Ellenőrizze, hogy az $5x^3 + 3x^2 - x + 4$ polinomnak vannak-e racionális gyökei.
3. Készítsen általános megoldóképletet az $x^4 + px^2 + q = 0$ alakú egyenletek megoldására!
4. Milyen feltételek mellett osztható az $x^3 + px + q$ polinom az $x^2 + mx - 1$ polinommal?
5. Milyen feltételek mellett osztható az $x^4 + px^2 + q$ polinom az $x^2 + mx + 1$ polinommal?
6. A Horner-elrendezés segítségével határozza meg a következő polinomok adott helyen való helyettesítésé értékét!
   (a) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ az $x_0 = -1$ helyen
   (b) $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90$ az $x_0 = 1$ helyen
7. Hányszoros gyöke a 2 az $x^5 - 5x^4 + 7x^2 + 4x - 8$ polinomnak?
8. Határozza meg az a paraméter értékét úgy, hogy az $x^3 - ax^2 - ax + 1$ polinomnak a -1 legalább kétszeres gyöke legyen!

8. Magasabbfokú egyenletek

Most, hogy már tudjuk, hogy egy (nem konstans) komplex együtthatós polinomnak mindig van komplex gyöke, a gyakorlatban is megpróbálhatjuk megkeresni azokat.

8.1. A másodfokú egyenletek

A másodfokú egyenlet megoldását már középiskolában is tanultuk, ismételjük most át.

Az $a_2x^2+a_1x+a_0=0$ egyenletet $a_2 \neq 0$ esetén átrendezhetjük $x^2+\frac{a_1}{a_2}x+\frac{a_0}{a_2}=0$ alakba, ahonnan $\left(x+\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 = -\frac{a_0}{a_2}+\frac{a_1^2}{4a_2^2}$ alapján

$$x = -\frac{a_1}{2a_2}+\sqrt{-\frac{a_0}{a_2}+\frac{a_1^2}{4a_2^2}}.$$

Ez egyébként lényegében megegyezik a középiskolában tanult összefüggéssel. Most látjuk kárát annak, hogy nem tudjuk megkülönböztetni a komplex négyzetgyökvonást a valós négyzetgyökvonástól.

A valósban a négyzetgyök egyértelmű, ezért ki kell tennünk a $\pm$ jelet, hogy mutassuk, a négyzetgyök ellentettje is megfelel.

Tudjuk azonban, hogy a nem 0 komplex számoknak két négyzetgyöke van, ezért a komplex négyzetgyök kétértékű – ezért nem kell jelölni.

Persze azt is tudjuk, hogy a komplex fölött minden (valódi) másodfokú polinomnak két gyöke van (esetleg egybeesik, vagyis multiplicitással számolva kettő).

8.1.1. Tétel *Az ax^2+bx+c komplex együtthatós polinom két gyöke az $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, illetve az $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.*

Emellett a polinom $a(x-x_1)(x-x_2)$ alakban írható fel.

Bizonyítás. Kétféle úton is indulhatunk: ellenőrizzük x_1, x_2-ről, hogy gyökei-e a polinomnak, és mivel több nem lehet (mert másodfokú), ezért ezek **a** gyökök.

Vagy:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)\right)$$

alapján

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)\right)=0,$$

ha

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Gyököt vonhatunk – amit a komplexek körében szabad is, még azt is tudjuk, hogy két négyzetgyök keletkezik, amelyek egymás ellentettjei.

Emiatt $x+\dfrac{b}{2a}=\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}$ komplex négyzetgyök.

Tudjuk, hogy ilyen kettő van, ezek egymás ellentettjei.

Korábban beláttuk már, hogy ha az x_1 gyöke a P polinomnak, akkor az osztható $(x-x_1)$-gyel, ezért ha P másodfokú és két gyöke x_1 és x_2, főegyütthatója a, akkor $P=a(x-x_1)(x-x_2)$. $\square$

8.2. A harmadfokú egyenletek

8.2.1. Tétel *A harmadfokú komplex együtthatós polinomegyenlet gyökei képlettel megadhatók.*

Bizonyítás. Az $ax^3+bx^2+cx+d=0$ polinomegyenletből kiindulva x helyére $(x-t)$-t írunk. Ha tudjuk, hogy milyen x_i-ben lesz 0 az új polinom helyettesítési értéke, akkor az x_i+t-ben lesz 0 az eredeti polinom.

$$ax^3-3ax^2t+3axt^2-at^3+bx^2-2bxt+bt^2+cx-ct+d=0$$

Úgy választjuk meg t-t, hogy az x^2-es tag együtthatója 0 legyen: $-3at+b=0$, vagyis $t=\dfrac{b}{3a}$. Ezzel az új polinomegyenlet $a_1x^3+0x^2+c_1x+d_1=0$ alakú, amit végigosztva a_1-gyel $x^3+px+q=0$ alakot kapunk.

Ha itt $p=0$, akkor ránézésre megoldható az egyenlet, $x=\sqrt[3]{-q}$ – ez komplex köbgyök, vagyis ($q\neq 0$ esetén) x-re három értéket kapunk. Folytassuk a gondolatmenetet, ha $p\neq 0$.

Keressük x-et $u+v$ alakban. Tudjuk, hogy ilyen u, v végtelen sok van, szabadon változtathatjuk az egyiket, a másik is változik. Persze, ha rögzítenénk róluk még egy tulajdonságot, akkor egyértelművé tehetnénk a felbontást. Helyettesítsünk $u+v$-t x helyére:

$$\begin{aligned}&u^3+3u^2v+3uv^2+v^3+p(u+v)+q=\\&=u^3+v^3+3uv(u+v)+p(u+v)+q=u^3+v^3+(p+3uv)(u+v)+q=0.\end{aligned}$$

Megtehetjük, hogy u és v szorzatát rögzítjük. (Tudjuk, hogy ha két szám összege és szorzata adott, akkor őket egy másodfokú polinomegyenlet megoldásaiként kaphatjuk.) Legyen ezért $p+3uv=0$. Ebből $uv=\dfrac{-p}{3}$. Mivel $p\neq 0$, sem u, sem v nem lehet 0. Ekkor

$$x^3+px+q=u^3+v^3+q=0,$$

tehát $u^3+v^3=-q$. De u^3-nek és v^3-nek a szorzatát is tudjuk, ez a szorzatuk köbe: $u^3\cdot v^3=\left(\dfrac{-p}{3}\right)^3$. u^3 és v^3 összege is, szorzata is ismert, ezért ők egy másodfokú polinomegyenlet gyökeiként kaphatók:

$$(z-u^3)(z-v^3)=z^2-(u^3+v^3)z+u^3v^3=z^2+qz-\left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Ennek megoldása a megoldóképlet szerint:

$$\frac{-q+\sqrt{q^2+\dfrac{4p^3}{3}}}{2}=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

(A négyzetgyök komplex feletti, tehát két értéket ad.)

Ennek a kifejezésnek a harmadik gyökei szolgáltatják u és v három-három értékét (nem nulla komplex számnak három különböző köbgyöke van). Ezen három köbgyök közül tudjuk, hogy csak azok felelnek meg, amelyekre $p+3uv=0$ teljesül.

Azt hihetnénk, hogy a kifejezés kétféle négyzetgyökértékének háromféle köbgyökértéke u-ra összesen 6-féle lehetőséget szolgáltat. Nem ez a helyzet azonban.

A négyzetgyök két értéke közül az egyik az u^3, a másik a v^3. Ezek szerepe szimmetrikus, tehát mindegy, hogy melyiket nevezzük ki u^3-nek, mert az ebből kapható u alapján fogjuk v-egyértelműsíteni. (Azt a gondolatmenet helyessége garantálja, hogy a kapott v köbe valóban a másik gyök legyen.)

u-ra a köbgyökvonás után három érték adódik. Ebből $p + 3uv = 0$ alapján egyértelműen megkapható v. (Emlékeztetünk, hogy $p \neq 0$, így $u \neq 0$.)

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

A gyököket komplex értelemben vesszük, a négyzetgyöknél csak az egyik értéket, a köbgyöknél mindhárom értéket tekintetbe vesszük.

$$v = \frac{-p}{3u}$$

Megjegyezzük, hogy u és v megoldásban elfoglalt szimmetrikus szerepe miatt v-re is teljesül, hogy a felmerülő 6 gyök valamelyikével egyenlő. u ismeretében a $p + 3uv = 0$ összefüggés egyértelműsíti, hogy melyik a 6 közül.

A megfelelő u és v értékek összegei adják a három $x_1 - t$, $x_2 - t$, $x_3 - t$ értéket, amelyekből x_1, x_2, x_3 már meghatározható. $\square$

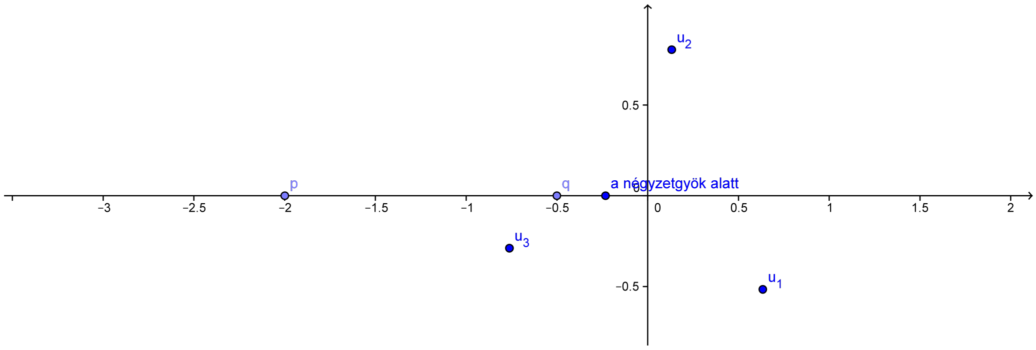
8.2.2. Definíció. *Az*

$$u, v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \qquad p + 3uv = 0$$

összefüggést az $x^3 + px + q = 0$ harmadfokú egyenlet megoldóképletének *vagy a képletet publikáló tudósról elnevezve, Cardano*[1]*-formulának nevezzük. (Az igazsághoz hozzátartozik, hogy nem pontosan ez a Cardano-formula, de ezzel ekvivalens.)*

Tudjuk, hogy a harmadfokú komplex polinomegyenletnek pontosan három gyöke van, azt is tudjuk, hogy a valós együtthatós harmadfokú polinomegyenletnek vagy 3, vagy 1 valós gyöke van. (Hiszen a komplex gyökei párosával szerepelnek.) (A gyökök egybe is eshetnek, ez minket nem zavar.)

[1]Gerolamo (vagy Girolamo) Cardano 1501–1576 olasz matematikus, fizikus, csillagász



8.1. ábra. Egy példa: ha a négyzetgyök alatt negatív szám áll

Casus irreducibilis

Érdekes megfigyelés, hogy a valós együtthatós harmadfokú polinomnak éppen akkor lesz három valós gyöke, amikor a valós fölött nem végezhető el a négyzetgyökvonás, vagyis amikor

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \tag{8.1}$$

negatív.

8.2.3. Definíció. *Azt az esetet, amikor a harmadfokú egyenlet megoldóképletében szereplő négyzetgyök alatt negatív valós szám áll,* casus irreducibilis *(kázusz irreducibilisz)-nek nevezzük.*

8.2.4. Állítás *A valós harmadfokú x^3+px+q $(p, q \neq 0)$ egyenletnek pontosan a casus irreducibilis esetén van három valós gyöke.*

Bizonyítás. Ha a (8.1) kifejezés negatív (valós), akkor a négyzetgyök tiszta képzetes, $-\frac{q}{2} + ri$, illetve $-\frac{q}{2} - ri$ áll a köbgyök alatt. (Ezek egymás konjugáltjai.) (8.1. ábra)

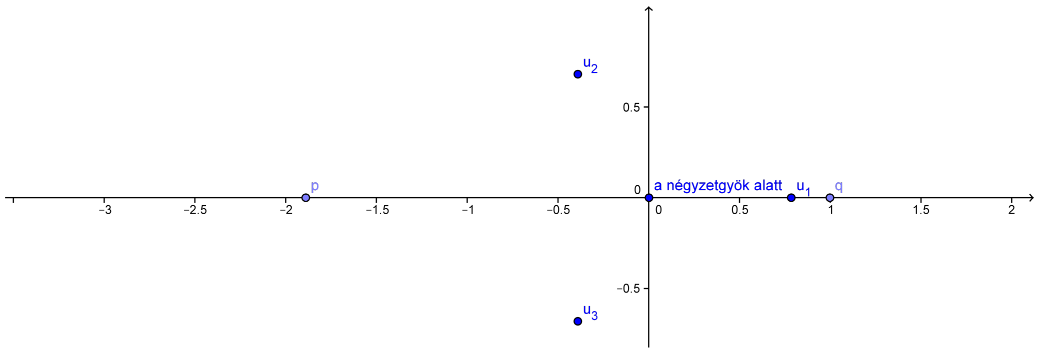
A köbgyök argumentumai: α, $\alpha + \frac{2\pi}{3}$, $\alpha + \frac{4\pi}{3}$, illetve $-\alpha$, $-\alpha + \frac{2\pi}{3}$, $-\alpha + \frac{4\pi}{3}$. (Valamilyen nem nulla α-ra. Nem nulla, mert $-\frac{q}{2} + ri$ nem valós szám.)

A szorzatuk csak úgy lehet valós, ha argumentumaik összege π egész számú többszöröse, tehát az argumentumpárok: α és $-\alpha$, $\alpha + \frac{2\pi}{3}$ és $-\alpha + \frac{4\pi}{3}$, illetve $\alpha + \frac{4\pi}{3}$ és $-\alpha + \frac{2\pi}{3}$. Vegyük észre, hogy $\left(-\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) - \left(-\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = 2\pi$,

$\left(-\alpha + \dfrac{2\pi}{3}\right) - \left(-\alpha - \dfrac{4\pi}{3}\right) = 2\pi$, és az argumnetumpárokban szereplő argumentumok egymás ellentettei.

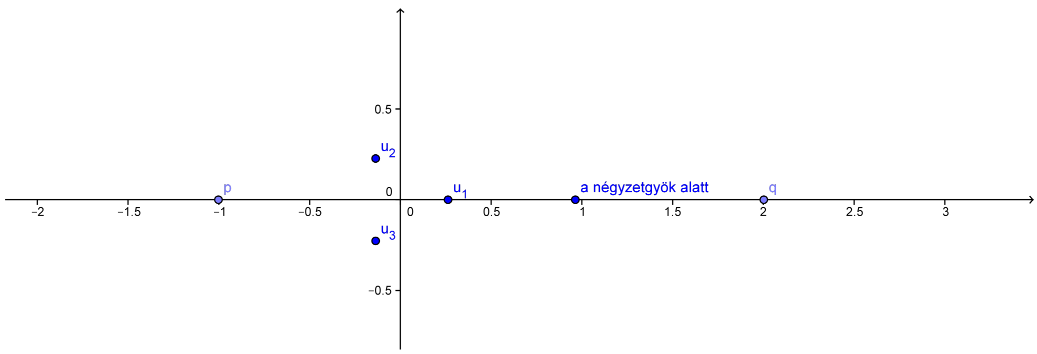
Mivel pedig a köbgyökök abszolút értéke egyenlő (a köbgyök alatt álló lehetséges két kifejezés egymás konjugátja), így a kapott gyökpárok összege mindhárom esetben valós.

Ha a 8.1-beli kifejezés 0, akkor $-\dfrac{q}{2}$ valós szám, három komplex gyöke van, amelyek közül az egyik eleme a valós számhalmaznak is. Eszerint egyetlen valós gyöke van a harmadfokú egyenletnek. (8.2. ábra)



8.2. ábra. Egy példa: ha a négyzetgyök alatt nulla áll

Ha a 8.1 kifejezés pozitív (valós), akkor a négyzetgyöke pozitív valós szám, $-\dfrac{q}{2}$-t hozzáadva ismét valós számot kapunk, mégpedig kétféle, különböző abszolút értékű szám lesz. (A $p = 0$ vagy $q = 0$ eseteket kizártuk.) Vagyis $|u^3| \neq |v^3|$. (8.3. ábra)



8.3. ábra. Egy példa: ha a négyzetgyök alatt pozitív szám áll

A következő animáción p és q változtatásával megfigyelhető a négyzetgyök alatti kifejezés és a köbgyökök elhelyezkedése a komplex síkban.

A köbgyökeik abszolút értéke is különböző, így $-\dfrac{p}{3} = uv$ és $-q = u + v$ csak abban a kivételes esetben lehet valós, ha u és v is valós, ez azonban a három lehetséges gyök közül – az argumentumokat tekintetbe véve – csak az egyik gyökpár esetében lehet.

Vagyis ebben az esetben egyetlen valós gyök van. □

A negyedfokú polinomegyenletek a komplex számok fölött

A másodfokú egyenlet megoldóképletének levezetését néhány sorban elintéztük.

A harmadfokú egyenlet megoldóképletéhez több trükköt is be kellett vetnünk, és a „megoldóképlet” nem annyira kompakt, mint a másodfokúé.

A negyedfokú egyenlet megoldóképletét fel sem fogjuk írni, csak megmutatjuk a megoldás menetének lépseit.

1. Az $\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon = 0$ polinomegyenletet a korábbiakhoz hasonlóan $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ alakúra redukáljuk. (Feltehető, hogy $q \neq 0$, különben x^2-ben másodfokú egyenletet kapnánk, aminek a megoldása egyszerű.)

2. Ezt $(x^2 + ax + b)(x^2 - ax + c)$ formában szorzattá alakítjuk, ami pontosan akkor 0, amikor valamelyik tényező 0. Ezzel elvileg készen is lennénk.

A gond az, hogy az a, b, c együtthatók meghatározása nem egyszerű feladat. Így tehát folytatjuk a lépéseket.

3. A szorzatok felbontása után az együtthatókból azt kapjuk, hogy az átalakítás ekvivalens feltételei: $b + c - a^2 = p$, $a(c - b) = q$, $bc = r$.

Ezekből $c+b = p+a^2$, $c-b = \dfrac{q}{a}$, így $b = \dfrac{1}{2}\left(a^2 + p - \dfrac{q}{a}\right)$ és $c = \dfrac{1}{2}\left(a^2 + p + \dfrac{q}{a}\right)$.

$bc = r$ miatt $(a^3 + pa - q)(a^3 + pa + q) = 4ra^2$, amiből

$$a^6 + 2pa^4 + (p^2 - 4r)a^2 - q^2 = 0.$$

Ez a^2-ben harmadfokú, ami már „megoldható”.

4. Az a-ra kapva egy gyököt felírható b és c, amiből elvégezhető a kívánt szorzattá alakítás.

8.3. Magasabbfokú egyenletekről

A magasabbfokú egyenletek megoldásához nem áll rendelkezésre a másod- és harmadfokú polinomegyenlet megoldásához hasonló levezetés. Mi több, ötöd- vagy annál magasabbfokú egyenlethez nem konstruálható általános megoldóképlet.

Bizonyítás nélkül közöljük az algebra egyik nagyon fontos tételét:

8.3.1. Tétel (Abel–Ruffini) *A legalább ötödfokú polinomegyenlet megoldásához nem lehet az alapműveletekkel és gyökökkel felírt* megoldóképletet *adni.*

Ez a tétel azt mondja ki, hogy nincs olyan, kizárólag összeadást, kivonást, szorzást, osztást, gyökvonást tartalmazó zárt formula, amelybe a polinomegyenlet együtthatóit behelyettesítve az egyenlet egy megoldását kapjuk.

Különböző trükkökkel azonban továbbra is kísérletezhetünk.

Reciprokegyenletek

8.3.2. Definíció. *Az $f(x) = 0$ polinomegyenlet* reciprokegyenlet*, ha x k-szoros gyöke a polinomnak, akkor azzal együtt $\frac{1}{x}$ is k-szoros gyöke.*

Példa. Ha például egy egyenletnek gyöke 2 és $\frac{1}{2}$, valamint -1, akkor az $(x+1)(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ alakba írható, ezt polinomegyenlet alakban felírva:

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = 0,$$

ha például gyöke 2 és $\frac{1}{2}$, valamint -1 és -1, akkor az $(x+1)(x+1)(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ alakba írható, ezt polinomegyenlet alakban felírva:

$$x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0.$$

Több ilyen reciprokegyenletet felírva azt tapasztaljuk, hogy az n-edfokú reciprokegyenletben a k-adfokú és az $(n-k)$-adfokú tagok együtthatói egyenlők. Ennél azonban több is igaz.

8.3.3. Tétel *Az $f(x) = 0$ polinomegyenlet akkor és csak akkor reciprokegyenlet, ha együtthatóira*

$$a_0 = a_n, \quad a_1 = a_{n-1}, \quad \dots$$

vagy

$$a_0 = -a_n, \quad a_1 = -a_{n-1}, \quad \dots$$

(Az együtthatók szimmetrikusak vagy antiszimmetrikusak.)

A polinomot a komplex számtest fölött fogjuk vizsgálni.

Először egy segédtételt fogunk bebizonyítani:

8.3.4. Állítás *Két szimmetrikus együthatójú polinom szorzata is szimmetrikus együtthatójú.*

Bizonyítás. Szimmetrikus együtthatós polinomok esetén a polinomok szorzatát szemléltető táblázatban (5.1 táblázat) az $(n-k)$-adik „átlóban” a polinom megfelelő együtthatóinak egyenlősége miatt éppen azok az együtthatók fognak szerepelni, mint a k-adik „átlóban”. $\square$

Bizonyítás. Először bebizonyítjuk, hogy a reciprokegyenlet együtthatói (anti)szimmetrikusak. A reciprokegyenletnek nem lehet gyöke a 0.

Gyöke lehet viszont az 1 (például m_1-szeres) és a (-1) (például m_2-szeres), amelyről nem tudjuk megállapítani, hogy az most a gyök, vagy annak reciproka, ezért különválasztjuk.

Így a reciprokegyenlet

$$a_n(z-1)^m(z+1)^{m_2}(z-z_1)\left(z-\frac{1}{z_1}\right)\cdot(z-z_2)\left(z-\frac{1}{z_2}\right)\cdot(z-z_k)\left(z-\frac{1}{z_k}\right) \quad (8.2)$$

alakban írható. Ebből

$$a_n(z-1)^{m_1}(z+1)^{m_2}\cdot\left(z^2-\left(z_1+\frac{1}{z_1}\right)z+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(z^2-\left(z_k+\frac{1}{z_k}\right)z+1\right).$$

Az első tényezőtől eltekintve a többi tényező mindegyikében szimmetrikus együtthatójú polinomok szerepelnek. Ha m_1 páros, akkor $(z-1)^{m_1}$ is szimmetrikus együtthatós, így a 8.3.4. állítás alaján szimmetrikus együtthatós polinomot kapunk.

Ha m_1 páratlan, akkor $(z-1)$-gyel szorzunk egy szimmetrikus együtthatós polinomot. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy itt valóban antiszimmetrikusak lesznek a szorzatpolinom együtthatói. (Ha a polinom $(n+1)$-edfokú, akkor az $(n+1)$-edfokó tag együtthatója a_n, a nulladfokúé $-a_0 = -a_n$, és általában a $(k+1)$-edfokú tagé $a_k - a_{k+1}$, az $(n-k)$-adfokúé pedig $a_{n-k} - a_{n-k+1} = a_k - a_{k+1}$, ami éppen $-(a_k - a_{k+1})$.)

Ebből az is kiderült, hogy mely esetben szimmetrikusak, és mely esetben antiszimmetrikusak az együtthatók.

Most vizsgáljuk, hogy egy (anti)szimmetrikus együtthatós polinomegyenletnek valóban gyöke-e minden gyökének a reciproka.

Ha $z_1 \neq 0$ gyöke, akkor behelyettesítve $\frac{1}{z_1}$-et:

$$a_n \frac{1}{z_1^n} + a_{n-1} \frac{1}{z_1^{n-1}} + a_{n-2} \frac{1}{z_1^{n-2}} + \ldots + a_2 \frac{1}{z_1^2} + a_1 \frac{1}{z_1} + a_0$$

Szorozzuk a kifejezést z_1^n-nel, és írjuk a_{n-k} helyére a vele egyenlő vagy ellentétes a_k-t:

$$a_0 + a_1 z_1^1 + a_2 z_1^2 + \ldots + a_{n-2} z_1^{n-2} + a_{n-1} z_1^{n-1} + a_n z_1^n.$$

Ez éppen a z_1 helyen felvett helyettesítési érték (azaz nulla), vagyis $\frac{1}{z_1}$ valóban gyöke a polinomegyenletnek. $\square$

8.3.5. Tétel *Az $f(x)$ polinomegyenlet akkor és csak akkor reciprokegyenlet, ha teljesül rá, hogy minden x-re*

$$f(x) = x^n \cdot (\pm 1) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Bizonyítás. Ha f reciprokegyenlet, akkor

$$x^n \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = a_n + a_{n-1}x + \ldots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n =$$
$$(\pm 1) \cdot (a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^n + a_n x^n)$$

az előző tétel alapján.

Másrészt viszont ha minden x-re $f(x) = (\pm 1) x^n \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$, akkor ha x_0 gyöke f-nek (azaz $f(x_0) = 0$), akkor $\frac{1}{x_0}$ is gyöke, tehát definíció szerint reciprokegyenlet. (És persze $x_0 \neq 0$.) $\square$

Vizsgáljuk meg, hogy tudunk-e valamit mondani a reciproklegyenletek gyökeiről. Az eddigiek alapján három lehetőségből tudunk gyökökre következtetni:

8.3.6. Tétel *1. Ha f antiszimmetrikus együtthatójú polinom, akkor gyöke az* 1.

2. Ha f páros fokú polinom antiszimmetrikus együtthatókkal, akkor gyöke a -1 *(és az előző állítás szerint az* 1 *is).*

3. Ha f páratlan fokú polinom szimmetrikus együtthatókkal, akkor gyöke a -1.

Bizonyítás. Ha f antiszimmetrikus együtthatós polinom, akkor – mint azt a (8.2) felírásból láthattuk – szerepel a gyöktényezős felírásában $(z-1)$ tényező, tehát gyöke az 1.

Ha f páros fokú antiszimmetrikus polinom, akkor az az antiszimmetria miatt csak úgy lehet, ha a (8.2) felírásban m_1 páratlan – de akkor m_2-nek is páratlannak kell lennie, mert a fokszám páros. Így az 1 és a -1 is gyöke a polinomnak.

Ha f páratlan fokszámú, akkor $m_1 + m_2$ páratlan, de ha szimmetrikusak az együtthatók, akkor m_1 páros, tehát m_2 páratlan, vagyis f-nek gyöke a -1. (Az 1 nem feltétlenül, hiszen lehet, hogy $m_1 = 0$.) □

Az így megkapható gyökök ismeretében f-et oszthatjuk a gyökökhöz tartozó polinomtényezővel ($(z-1)$ vagy $(z+1)$), vagyis végső soron egy páros fokszámú, szimmetrikus együtthatós polinomegyenlethez jutunk.

Ezt kell tehát általánosan megoldanunk.

Példa. Oldjuk meg az $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$ egyenletet. Ennek sem a 0, sem az 1, sem a -1 nem gyöke.

Szokásos ötlet ilyenkor x^2-tel (a legmagasabb fokú x-hatvány négyzetgyökével) osztani az egyenletet: $x^2 + 2x + 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$.

Ekkor az $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$ egyenlethez jutunk.

Vezessük be az $y = x + \frac{1}{x}$ jelölést. Eszerint az előbbi $y^2 - 2 + 2y + 1 = 0$, azaz $y^2 + 2y - 1 = 0$ egyenletben $y = -1 \pm \sqrt{2}$.

$x + \frac{1}{x} = y$-ból pedig x lehetséges értékei kiszámíthatók.

A páros $(2n)$ fokszámú szimmetrikus reciprokegyenletet x^n-nel osztva az így kapott kifejezésben az x-es és az $\frac{1}{x}$-es tagok és hatványainak együtthatói egyenlők.

Így bevezetve az $y = x + \dfrac{1}{x}$ jelölést, új, n-edfokú egyenletet kaphatunk. Felhasználjuk közben, hogy

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 2y^2 - 2,\\
x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) = y^3 - 3y,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Eszerint, mivel egy 4-edfokú polinomegyenletet elvileg meg tudunk oldani, a 8-adfokú szimmetrikus együtthatós egyenletet is meg tudjuk oldani.

Feladatok

1. Oldja meg a következő egyenletet
   (a) $x^3 - 6x + 9 = 0$
   (b) $x^3 + 12x + 63 = 0$
   (c) $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$
   (d) $x^3 + 9x^2 + 9x + 1 = 0$
2. Oldja meg a következő egyenletet
   (a) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$
   (b) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 15 = 0$
   (c) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0$

III. rész

Lineáris algebra

9. Lineáris algebra

Az eddigiekben olyan egyenletek megoldásait kerestük, amelyekben egy ismeretlen volt, de annak fokszáma tetszőleges lehetett.

Ebben a részben viszont több olyan egyenlet egyidejű megoldását keressük, amelyekben több ismeretlen szerepelhet, ám mindegyik csak az első hatványon.

Középiskolában is találkoztunk már ilyen feladattal.

Példa. Határozzuk meg az $5x + 4y = 2$ és az $x + y = 1$ egyenletű egyenesek metszéspontját!

Többféle megoldást is tanultunk.

1. Például a második egyenletből kifejezzük y-t, behelyettesítjük az elsőbe: $5x + 4(1 - x) = 2$, amiből $x = -2$, ezt behelyettesítve a második egyenletbe $y = 3$.

A kapott megoldást – amennyiben nem ekvivalens átalakításokat végzünk – ellenőrizni kell. Ettől azonban mi most és a jövőben is eltekintünk, és azt sem fogjuk bebizonyítani, habár nem lehetetlen, hogy a megoldás ekvivalens lépésekből áll. Erre azért még egyszer viszatérünk.

2. Egyenlő együtthatók módszere: A második egyenletet szorozzuk 5-tel:

$$\begin{aligned} 5x{+}4y &= 2 \\ 5x{+}5y &= 5 \end{aligned}$$

A második egyenletből kivonva az elsőt azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 5x + 4y &= 2 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Most a második egyenletből kapott y értéket az elsőbe helyettesítve megkapjuk x értékét: $5x + 12 = 2$, amiből $x = -2$. (Ismét elhagyjuk az ellenőrzést.)

Példa. Határozzuk meg a következő egyenespárok közös pontjait:

$x + 2y = 0$ és $2x + 4y = -2$; valamint $x + 2y = -1$ és $2x + 4y = -2$

Az első egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x+2y &= 0 \\ 2x+4y &= -2 \end{aligned}$$

Az első egyenlet kétszeresét kivonjuk a másodikból:

$$\begin{aligned} x+2y &= 0 \\ 0 &= -2, \end{aligned}$$

ami ellentmondás, ennek az egyenletrendszernek nincs megoldása, a két egyenesnek nincs metszéspontja.

A második egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x+2y &= -1 \\ 2x+4y &= -2 \end{aligned}$$

Az első egyenlet kétszeresét kivonjuk a másodikból:

$$\begin{aligned} x+2y &= -1 \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

ami minden x, y esetén teljesül, azaz ennek az egyenletrendszernek minden olyan (x, y) számpár megoldása, amely eleget tesz az első egyenletnek, vagyis a két egyenesnek minden pontja közös. (Ismét elhagyjuk az ellenőrzést.)

Néhány tanulság Két egyenesnek nem mindig van közös pontja. Lehet, hogy egy van, lehet, hogy végtelen sok van (egybeesnek), és az is lehet, hogy egy sincs (mert párhuzamosak).

(Több egyenesnek is lehet nulla, egy vagy végtelen sok közös pontja.)

A második módszert kicsit átalakítva egy általánosan alkalmazható megoldási módszert kapunk:

$$\begin{aligned} 5x+4y &= 2 \\ x+\ \ y &= 1 \end{aligned}$$

Kivonjuk az első egyenlet ötödét a másodikból (kiejtjük a második egyenletből az x-et):

$$\begin{aligned} 5x+\ \ 4y &= 2 \\ 0{,}2y &= 0{,}6 \end{aligned}$$

Szorozzuk 5-tel a második egyenletet:

$$\begin{aligned} 5x+4y &= 2 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Kivonjuk a második egyenlet 4-szeresét az elsőből (kiejtjük belőle y-t):

$$\begin{aligned} 5x\quad &= -10 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Osztjuk 5-tel az első egyenletet:

$$\begin{aligned} x\quad &= -2 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

(Ismét elhagyjuk az ellenőrzést.)

Keressük meg a $x - y = 3$, $x + y = 1$ és $2x + y = 0$ egyenesek közös metszéspontját. Ezt az egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} x-y &= 3 \\ x+y &= 1 \\ 2x+y &= 0 \end{aligned}$$

Az első egyenletet kivonjuk a másodikból, a kétszeresét pedig a harmadikból:

$$\begin{aligned} x-\ \ y &= 3 \\ 2y &= -2 \\ 3y &= -6 \end{aligned}$$

A második egyenletet osztjuk 2-vel:

$$\begin{aligned} x-\ \ y &= 3 \\ y &= -1 \\ 3y &= -6 \end{aligned}$$

A második egyenletet hozzáadjuk az elsőhöz, a háromszorosát kivonjuk a harmadikból:

$$\begin{aligned} x \quad &= 2 \\ y &= -1 \\ 0 &= -3 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlet szerint ellentmondásra jutottunk, ami azt jelenti, hogy a három egyenesnek nincs közös metszéspontja. (Hiába kaptuk meg, hogy $x = 2$, $y = -1$, a kapott pont nem illeszkedik a harmadik egyenesre.)

Keressük meg a $x - y = 3$, $x + y = 1$ és $2x + y = 3$ egyenesek közös metszéspontját. Ezt az egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} x-y &= 3 \\ x+y &= 1 \\ 2x+y &= 3 \end{aligned}$$

Az első egyenletet kivonjuk a másodikból, a kétszeresét pedig a harmadikból:

$$\begin{aligned} x- \quad y &= 3 \\ 2y &= -2 \\ 3y &= -3 \end{aligned}$$

A második egyenletet osztjuk 2-vel:

$$\begin{aligned} x- \quad y &= 3 \\ y &= -1 \\ 3y &= -3 \end{aligned}$$

A második egyenletet hozzáadjuk az elsőhöz, a háromszorosát kivonjuk a másodikból:

$$\begin{aligned} x \quad &= 4 \\ y &= -1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlet semmitmondó. Az első két egyenletből azt kaptuk, hogy $x = 2$, $y = -1$. A $(2; -1)$ pont valóban illeszkedik az adott egyenesekre.

Feladatok

1. Van-e közös pontja a következő egyenespároknak?

   (a) $$\left.\begin{aligned} 4x - 5y &= -13 \\ 7x + 2y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

   (b) $$\left.\begin{aligned} 3x - y &= 4 \\ x - 4y &= 4 \end{aligned}\right\}$$

2. Van-e egy közös pontja a következő egyeneseknek?

   (a) $$\left.\begin{aligned} 4x - 5y &= -13 \\ 3x + 7y &= 1 \\ 7x + 2y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

   (b) $$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= -1 \\ x - 4y &= 5 \\ -2x + y &= -3 \end{aligned}\right\}$$

3. Határozza meg a következő egyenesek metszéspontját!

   (a) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & 2y & + & 3x & = & 11 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ 7x & & & + & z & = & 9 \end{array}\right\}$$

10. Lineáris egyenletrendszerek

10.1. A lineáris egyenletrendszer fogalma

Ebben a fejezetben az imént látottakhoz hasonló egyenletrendszerek megoldásával foglalkozunk.

10.1.1. Definíció. *Az*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ &\vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n &= c_k \end{aligned} \tag{10.1}$$

egyenletrendszert – ahol a_{ij} és c_i valamely T testbeli elemek – együtthatók –, az x_i-k ismeretlenek, értéküket ugyane T testben keressük – lineáris egyenletrendszernek *nevezzük.*

10.1.2. Definíció. *A* lineáris egyenletrendszer egy megoldása *az x_i ismeretlenek egy rendszere, amely x_i-k kielégítik az egyenletrendszer egyenleteit.*

Az algebrának a lineáris egyenletrendszerek megoldását leíró ága a *lineáris algebra.*

Az előzőekben láttuk, hogy milyen elemi módszereket alkalmazhatunk lineáris egyenletrendszer megoldására. Meg kell vizsgálnunk, hogy mikor végzünk ekvivalnes átalakítást.

Ha két lineáris egyenletet összeadunk, akkor egyet kapunk, amelynek lehet olyan megoldása, amely sem az első, sem a második egyenletet nem elégíti ki. Ha például a két egyenlet $x + y = 1$ és $x - y = 1$, akkor a kettő összegéből $2x = 2$, $x = 1$, míg y tetszőleges érték lehet, vagyis megoldása például az $(1; 1)$ azonban ez sem az első, sem a második egyenletnek nem megoldása.

Ez azt jelenti, hogy az eredeti egyenletrendszerrel nem ekvivalens az összegegyenlet, azért *ez az átalakítás nem ekvivalens*.

Ha egyenesekként tekintünk az egyenletekre, akkor megértjük: a két egyenes egyenletének különbsége nemcsak a metszéspontjukban 0, hanem az egész $x = 1$ egyenesen, és a különbségkapott egyenlet valóban ennek az egyenesnek az egyenlete.

A két egyenes egyenletének különbségével egy újabb egyenest írtunk fel. Ennek végtelen sok pontja van, így nem lehet minden pontja megoldása az egyenletrendszernek.

Csak annyit tudhatunk, hogy ha van olyan pont, amely az eredeti két egyenesnek közös pontja, akkor az a kapott, harmadik egyenesnek is pontja lesz. Önmagában tehát nem helyettesíti mindkét egyenletet. Azt gondolhatnánk, hogy akkor most két egyenlet helyett hárommal kell dolgoznunk, vagyis nem nyertünk semmit.

A helyzet azonban ennél kissé árnyaltabb. Elegendő ugyanis a két eredeti egyenlet közül az egyiket megtartani (a másikat elhagyhatjuk), míg a harmadik – ha ügyes átalakítást végzünk – sokkal egyszerűbb lehet, mint az, amelyet elhagyunk.

A fenti esetben is ez a helyzet: az $x = 1$ egyenlet kifejezetten egyszerű. Akár az elsővel, akár a másodikkal vetjük össze, könnyen meghatározható az egyenletrendszer megoldása. ($x = 1$, $y = 0$)

Az a lépés viszont, hogy két egyenlet számszorosait összeadjuk, és az egyik egyenletet kicseréljük a kapott egyenlettel, ekvivalens átalakítás.

Ez nem csak kétismeretlenes, hanem többismeretlenes lineáris egyenletrendszerekre is teljesül.

Feladatok

1. Oldja meg az egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 4 \end{aligned}$$

   Ellenőrizze is a kapott eredményt!

2. Van-e olyan a valós paraméter, amelyre nincs megoldása a következő egyenletrendszereknek!

(a)

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & = & a \\ x_1 & - & x_2 & = & 3 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcl} ax_1 & + & 3x_2 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & = & 3 \end{array}$$

Indokolja meg a tapasztaltakat!

3. Oldja meg az egyenletrendszert!

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 11 \end{array}$$

Ellenőrizze is a kapott eredményt!

4. Oldja meg az egyenletrendszert!

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ 2x_2 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -4 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \end{array}$$

Ellenőrizze is a kapott eredményt!

11. A Gauss-elimináció

A lineáris egyenletrendszer megoldására többféle módszer is kínálkozik. Az előzőekben említett két módszer közül a második kis pontosítással általánosan alkalmazható módszerré tehető, amelynek leírása Gauss nevéhez fűződik. (Johann Carl Friedrich Gauss 1777–1855 jeles német matematikus, rendkívüli eredményei születtek a matematikában – számemlélet, algebra, statisztika, analízis, differenciálgeometria stb. témakörben –, valamint fizikában, asztronómiában, optikában.)

11.1. Egyenletek lineáris kombinációja

Ahhoz, hogy végigkövessük, néhány dolgot fontos leszögeznünk. Először egy fogalom – amelyet már korábban is sokszor használtunk –, és amelyet most is csak nagyon általánosan fogjuk leírni:

11.1.1. Definíció. *Legyen A és B két olyan elem, amelyeknek összegét, különbségét és számszorosait lehet venni, valamint legyen α és β két szám, amelyekkel A és B szorozható. Ekkor az $\alpha A + \beta B$ kifejezést az A és B* lineáris kombinációjának *nevezzük.*

(Jusson eszünkbe, hogy már számelméletben is, két elem legnagyobb közös osztóját felírtuk az adott elemek *lineáris kombinációjaként.*)

Most rátérünk a módszer leírására.

1. Az az alapgondolat, hogy ha két egyenletet kielégít az ismeretlenek adott értéke, akkor az az egyenletek lineáris kombinációját is kielégíti.

Ugyanakkor lineáris kombinációval kapott egyenlethez az egyik eredeti egyenletet meg kell tartanunk, a másikat pedig elhagyhatjuk (hiszen ha szükséges, az új egyenletek lineáris kombinációjával vissza tudjuk állítani).

(Ha E_1 és E_2 a két kiinduló egyenlet, $E_3 = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2$ és megtartjuk E_3 mellett például E_2-t, akkor $\alpha_1 E_1 = E_3 - \alpha_2 E_2$. Ha valóban két egyenlet lineáris kombinációját írtuk fel, akkor α_1 nem lehet nulla, vagyis lehet vele osztani.)

Ez azt mutatja, hogy **egyenletet nem veszíthetünk el.** Emiatt nem mondhatjuk azt például, hogy összeadunk két egyenletet (így kettőből egy lenne), hanem csak azt, hogy az egyik egyenlet egy számszorosát hozzáadjuk egy másikhoz.

2. Azt használjuk fel, hogy ha egymás utáni lépésekben minden csökkentjük az egyenletekben az ismeretlenek számát, akkor – jó esetben – eljuthatunk egy olyan egyenletekhez, amelyekben már csak egy-egy ismeretlen szerepel. (Ez egyfajta indukciós lépés.)

11.2. A Gauss-elimináció lépései

1. Az első egyenletet elosztjuk x_1 együtthatójával, és az így kapott egyenlet megfelelő számszorosait hozzáadjuk a többi egyenlethez, hogy kiessen belőlük az x_1.

2. A második egyenletet elosztjuk x_2 együtthatójával, és az így kapott egyenlet megfelelő többszöröseit hozzáadjuk a többi egyenlethez, hogy kiessen belőlük az x_2.

3. A harmadik egyenletet elosztjuk x_3 együtthatójával, és az így kapott egyenlet megfelelő többszöröseit hozzáadjuk a többi egyenlethez, hogy kiessen belőlük az x_3.

4. ... És így tovább, mindig a soronkövetkező egyenletet elosztjuk a soronkövetkező ismeretlen együtthatójával, és az így kapott egyenlet alkalmas számszorosait kivonjuk a többi egyenletből, hogy kiessen belőlük a soronkövetkező ismeretlen.

Mindezt addig folytatjuk, amíg el nem fogynak az ismeretlenek vagy az egyenletek.

1. Ha elakadunk Előfordulhat, hogy a soronkövetkező egyenletben a soronkövetkező ismeretlen 0 együtthatóval szerepel. (Vagyis nem szerepel benne). Ilyenkor két választásunk is van: az egyik, hogy felcseréljük az egyenletek sorrendjét, a másik, hogy egy másik ismeretlennel folytatjuk az eljárást. Mi inkább a második lehetőséget fogjuk alkalmazni.

Ha valamelyik lépésben a soron következő egyenletben minden ismeretlen együtthatója 0 (tehát a bal oldalról minden ismeretlen kiesett), de van még olyan ismeretlen, amellyel nem hajtottuk végre az eljárást, akkor átugrunk a következő egyenletre. (Ez az eset fordult elő akkor, amikor két párhuzamos egyenes metszéspontjait kerestük.)

2. Ha 0 a bal oldal Előfordulhat, hogy olyan egyenletet kapunk, amelynek a bal oldalán 0 áll (kiesett az összes ismeretlen). Az ilyen egyenleteket a rövidség kedvéért *függő egyenleteknek* fogjuk nevezni. A többit *függetlennek*.

Ha a jobb oldalukon is 0 marad, akkor ezekkel nincs mit tenni (azonosan nulla az egyenlet). Ha azonban a jobb oldalon nem 0 marad, akkor ellentmondásra jutottunk, *az egyenletrendszernek nincsen megoldása*, kár is tovább folytatni az eljárást. (Az egyik eset akkor fordult elő, amikor két egymással azonos egyenes metszéspontjait kerestük, a másik meg amikor párhuzamosak volt a két egyenes.)

3. Ha elfogynak az ismeretlenek Amikor az utolsó ismeretlennel is elvégeztünk az eliminációt, akkor az eljárás szerint lesz annyi egyenlet, ahány ismeretlen, amelyek tehát $x_i = d_i$ alakúak. Ezekből megkaptuk minden ismeretlen értékét.

Lehetnek további függő egyenletek, amelyeknek ha 0 áll a jobb oldalán, akkor minden rendben, de ha nem, akkor – mint korábban mondtuk – ellentmondásos az egyenletrendszer.

(Ilyen esethez jutottunk, amikor három nem egy ponton átmenő egyenes közös pontját keressük a síkban.)

4. Ha elfogynak az egyenletek, de van még ismeretlen Ha elfogy minden egyenlet, és nem jutottunk ellentmondásra (ha kaptunk is függő egyenletet, annak a jobb oldalán is 0 van), akkor bár nincs ellentmondás, de nem kapunk egyértelmű megoldást.

Ez történt, amikor két egyenes metszéspontját keresve kiderült, hogy az egyenesek egybeesnek.

Ilyenkor végtelen sok megoldást kapunk.

Ezeket is „fel lehet sorolni” valamiképpen, például amikor azt kaptuk, hogy $x + 2y = -1$, $0 = 0$. Ekkor $x = -2y - 1$ alakban adható meg, bárhogyan is választjuk meg y-t. Vagy fordítva: $y = \dfrac{-x-1}{2}$, bárhogyan adjuk is meg x-et.

11.2.1. Definíció. *A fent ismertetett eljárás neve:* Gauss-elimináció.

Az elimináció eltüntetést, elnyelést jelent, és az ismeretlenek eltüntetésére utal.

Foglaljuk tehát össze a megoldásra vonatkozó következtetéseinket:

Ha az ismeretlenek számát n, a független egyenletek számát r jelöli, akkor a következő esetek fordulhatnak elő:

1. a „függő" egyenletek (amelyek bal oldala 0-ra redukálódik) valamelyikének jobb oldala nem 0 – az egyenletrendszernek nincs megoldása, ellentmondásos;
2. a „függő" egyenletek jobb oldala 0, és kevesebb a független egyenlet, mint az ismeretlen ($r < n$) – végtelen sok megoldás van;
3. a „függő" egyenletek jobb oldala 0, és ugyanannyi a független egyenlet, mint az ismeretlen – egyetlen megoldás van.

11.2.2. Megjegyzés. *A függő egyenletek száma nem múlik azon, hogy milyen sorrendben írjuk fel az egyenleteket, vagy hogy milyen sorrendben ejtjük ki az ismeretleneket.*

11.2.3. Megjegyzés. *Az a megoldási eljárás, amelyben kifejezzük az ismeretleneket az egyes egyenletekből, vagyis: kifejezzük x_1-et az elsőből, és behelyettesítjük a többibe, utána kifejezzük x_2-t a másodikból, és behelyettesítjük a többibe stb., míg el nem fogynak az ismeretlenek vagy az egyenletek, pontosan ugyanaz, mint a Gauss-elimináció, csak a lejegyzése kevésbé szisztematizálható.*

Feladatok

1. Keressen olyan a paramétert (ha lehet), amelyre a

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array}$$

   egyenletrendszernek

   (a) 0

   (b) 1

   (c) 2

(d) végtelen sok

megoldása van.

Adjon magyarázatot a válaszaira!

Mennyiben függ az egyenletek jobb oldalán álló értéktől a megoldások száma?

2. Oldja meg Gauss-eliminációval a valós számok halmazán a következő lineáris egyenletrendszereket!

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -6 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -4 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 8 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -8 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & 1x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -5 \\ x_1 & & & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & -4 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & - & 5x_4 & = & 12 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & & & = & 5 \end{array}$$

3. Határozza meg a független egyenletek számát a következő egyenletrendszerben!

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & 4x_2 & + & 10x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & + & 18x_3 & + & 7x_4 & = & 1 \\ 10x_1 & + & 18x_2 & + & 40x_3 & + & 17x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 7x_2 & + & 17x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \end{array}$$

Ellentmondásos-e ez az egyenletrendszer?

12. Mátrixok

Már általános iskolás korunktól kezdve keressük és alkalmazzuk a tanult eljárások rövid leírását. Maga a helyiértékes írás is egy rövidítés (kihagyjuk a számrendszer alapszámának hatványai leírását), és hasonlót alkalmaztunk a polinomok körében végzett maradékos osztásnál vagy a Horner-elrendezésnél.

Amennyiben minden együttható helye konkrétan meghatározott helyen szerepel, nem szükséges kiírni azt az ismeretlent, amelynek ő az együtthatója.

A polinomok maradékos osztásánál a 3 6 4 felírás megfelelt a $3x^2 + 6x + 4$ polinomnak.

A lineáris egyenletrendszerek leírásában nagyon sok időt szánunk a műveleti jelek és az ismeretlenek lejegyzésére (amelyeket ráadásul nem is mindig ugyanazokkal a fajta jelekkel írunk le). Így ha egy szisztematikus jelölésért cserébe elhagyhatnánk ezeket, az segíthetne.

Lehetne például az

$$\begin{aligned} x-y &= 3 \\ x+y &= 1 \\ 2x+y &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerben a bal oldalának lejegyzése

$$\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

Mégiscsak rövidebb. A jobb oldal pedig akkor lehetne

$$\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

A ismeretlenek rendszere pedig – bár nem létszükséglet – lehetne

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$$

Ha most fel akarjuk írni, hogy az együtthatókat szorozva az ismeretlenekkel az eredményt kapjuk, akkor könnyen összefolyhat a jelölés, ezért a jelölt egységeket valahogy határolni kell. Eszerint a fenti lineáris egyenletrendszer így jelölhető:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vagy

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

12.1. A mátrix fogalma

12.1.1. Definíció. *A fenti módon – egy téglalap alakban – elrendezett elemeket* mátrixnak *nevezzük.*

Megállapodás: Két mátrixot pontosan akkor tekintünk egyenlőnek, ha egyrészt ugyanakkora a méretük, másrészt az ugyanolyan indexű helyeken egyenlő számok szerepelnek bennük.

12.1.2. Definíció. *Legyen T egy test. Ha egy mátrix minden eleme a T test eleme, akkor azt mondjuk, hogy az egy T* test feletti mátrix.

Ha az M mátrix sorai száma n, oszlopai száma k, akkor $(n \times k)$-as mátrixról *beszélünk. Más szóval: a mátrix mérete $n \times k$. Jelölése: $M \in T^{n \times k}$. Az i-edik sor j-edik elemét a_{ij} jelöli, de ha valamiért a jelölés félreérthető, akkor a két index közé vesszőt teszünk: $a_{i,j}$. (12.1. ábra)*

Ha $k = 1$, akkor szokás a mátrixot oszlopvektor*nak, $n = 1$ esetén* sorvektor*nak nevezni.*

A vektort alkotó elemeket a vektor koordinátáinak *is szokás nevezni.*

A fenti egyenletrendszerben például az eredmény egy 3×1-es oszlopvektor.

A vektor fogalmával már középiskolában találkoztunk. Az is világos, hogy például a koordinátarendszer pontjait mostanáig síkban egy (1×2)-es vagy

$$
\begin{array}{c}
 \\ 1. \\ 2. \\ \vdots \\ n.
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1. & 2. & \dots & k. \end{array} \\
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\
\vdots & \vdots & \ddots\vdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

12.1. ábra. $n \times k$-as mátrix

térben egy (1×3)-as vektorral adtuk meg. (Rendezett páros vagy rendezett hármas.)

12.1.3. Definíció. *A lineáris egyenletrendszer együtthatóiból a fenti módon leírtak szerint képezett mátrixot az egyenletrendszer* együtthatómátrixának *nevezzük.*

12.2. Műveletek mátrixokkal

A mátrixok elemei egy T testből valók, így azokat össze tudjuk adni, és szorozni tudjuk egymással. A mátrixok között is lehet műveleteket értelmezni.

Mivel a mátrixok közül a vektorokat már nagyon régről ismerjük, ezért arra ügyelnünk kell, hogy összhangban maradjunk korábbi ismereteinkkel.

12.2.1. Definíció. (Mátrix szorzása számmal) *Ha $\alpha \in T$ (egy testbeli elem) és $M \in T^{n \times k}$ (egy T feletti mátrix), akkor értelmezzük úgy az αM műveletet, hogy az M minden elemét α-val szorozzuk.*

Ez összecseng azzal a korábbi ismeretünkkel, hogy vektort számmal úgy szoroztunk, hogy a vektor minden elemét (geometriai szóhasználattal: koordinátáját) megszoroztuk vele.

12.2.2. Megjegyzés *Ha $\alpha \in T$ és $M \in T^{n \times k}$, akkor αM-et úgy is írhatjuk, hogy $M\alpha$. Azaz nincs jelentősége, hogy az M mátrixot balról vagy jobbról szorozzuk egy számmal.*

12.2.3. Definíció. (Mátrixok összeadása) *Ha M és $N \in T^{n \times k}$ (ugyanolyan méretű T feletti mátrixok), akkor $M + N$ olyan $T^{n \times k}$-beli mátrix, amelynek ij indexű eleme az M és az N ugyanilyen indexű elemének összege.*

12.2.4. Megjegyzés. *A definíció szerint csak ugyanolyan méretű mátrixokat tudunk összeadni.*

Ez összhangban van azzal, ahogyan a vektorokat adtuk össze. Különbség van azonban a vektorok geoemtriai és algebrai értelemben történő összeadása között. Geometriai értelemben a tér tetszőleges két vektora összeadható, algebrában viszont egy síkbeli és egy térbeli vektor nem ugyanolyan méretű, köztük tehát nem végezhető elk az összeadás. (Térbeli algebrai vektorhoz nem lehet síkbelit adni.)

Egyszerű belátni, hogy a mátrixok összeadása kommutatív, asszociatív, és invertálható művelet. A zéruselem a csupa nullákból álló mátrix, amelyet $\mathbf{0}$ jelöl.

Mielőtt rátérnénk a mátrixok szorzására, vizsgáljuk meg, hogy mit is szeretnénk kapni egy szorzat kiszámításakor. A fenti egyenletrendszert leíró példával:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az első egyenlet bal oldala $1 \cdot x + (-1) \cdot y = 3$. Ez azt jelenti, hogy az együttható mátrix első sorának elemeit sorban megszoroztuk az ismeretlenekből álló oszlopvektor elemeivel, majd a kapott szorzatokat összeadtuk.

A második egyenlet bal oldala $1 \cdot x + 1 \cdot y$, vagyis itt a második sor elemeit szoroztuk rendre az oszlopvektor elemeivel és adtuk össze a szorzatokat.

Végül a harmadik sok $2 \cdot x + 1 \cdot y$, azaz a harmadik sor elemeit szoroztuk az oszlop elemeivel és adtuk össze a szorzatokat.

Ahhoz, hogy ezt megtehessük, az is kellett, hogy az első mátrixnak uagyanannyi soreleme legyen, mint ahány eleme az oszlopvektornak.

Ha a szorzásban szereplő második mátrixnak nem egy, hanem két oszlopa lett volna, akkor az eredménymátrixnak is lett volna még egy oszlopa.

12.2.5. Definíció. (Mátrixok szorzása) *Legyen $A \in T^{n \times k}$, $B \in T^{k \times m}$. Ekkor az $A \cdot B$* mátrixszorzat *valamely ij indexű elemét úgy számítjuk ki, hogy az A mátrix i-edik sorának elemeit rendre megszorozzuk a B mátrix j-edik oszlopának elemeivel, és a szorzatokat összeadjuk.*

Formálisan, ha C jelöli az AB szorzatmátrixot, akkor ennek i-edik sorának j-edik oszlopában szereplő ij indexű eleme:

$$C_{ij} = \sum_{l=k}^{n} A_{li} B_{jl},$$

ahol A_{li} az A mátrix l-edik sorának i-edik eleme, B_{jl} pedig a B mátrix j-edik sorának l-edik eleme.

A fenti definíció alapján minden elem kiszámításához k darab szorzatot számítunk ki és adunk össze. Az eredménymátrixnak összesen annyi sora lesz, mint az A-nak, és annyi oszlopa, mint a B-nek. Vagyis $n \times m$ lesz a mérete. Összességében tehát $k \cdot (n \times m)$ szorzatot számítunk ki – mind különböző elempár szorzata. Ez egy rendkívül hosszadalmas művelet.

Példa. A mátrixszorzást nagyon sokféle dologra lehet használni. Képzeljük el, hogy egy gyár termékeinek előállítási költségét szeretnénk kiszámítani. Minden termékhez felhasználunk valamennyit valamely alapanyagból – beleértve az energiafelhasználást, a bérköltséget stb. –, és minden termékhez ismerjük a felhasznált anyagok mennyiségét, az alapanyagok például szezonális egységárát.

Ha például az egyik termékhez felhasznált alapanyagok mennyisége 1, 2, 3; ezek egységára tavasszal 4, 5, 6, télen pedig 7, 8, 9, akkor az előállítási költsége tavasszal $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6$, télen $1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9$. Ezt a két költségértéket a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

mátrixszorzás segítségével kaphatjuk meg.

Több terméket is felvehetünk, akkor annyi sora lesz az első mátrixnak, amennyi a termékek száma. Ha például van még egy termék, amelynek előállításához a fenti alapanyagokból 0, 10, 20 egységnyit használunk fel, akkor a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

mátrixszorzással kapjuk meg a két szezonban az előállítási költségét:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+10+18 & 7+16+27 \\ 0+50+120 & 0+80+180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 50 \\ 170 & 260 \end{bmatrix}$$

Az előálltási költségek: első termék első szezon: 32, első termék második szezon: 50, második termék első szezon: 170, második termék második szezon: 240.

Természetesen sokkal szerteágazóbb a mátrixszorzás felhasználása, ez csak egyetlen szemléltető példa.

12.2.6. Megjegyzés. *Ezzel a mátrixszorzással a vektorok körében nem találkozhattunk, mert a vektorok – korábbi jelöléseink szerint – mind* (2×1)*-es vagy* (3×1)*-es méretűek voltak, ezeket nem lehet összeszorozni a definíció szerint. (Középiskolában összeszoroztunk vektorokat, és a vektorok is mátrixok – ebben az értelemben szoroztunk már össze mátrixokat, ezt azonban nem neveztük mátrixszorzásnak.)*

A hosszadalmas szorzási művelet miatt nem egyszerű bebizonyítani (bár igaz), hogy a mátrixszorzás asszociatív és disztributív a mátrixösszeadásra nézve. Már ha elvégezhető!

Vizsgáljuk meg, hogy az $A(BC)$, illetve az $(AB)C$ mátrixszorzás milyen méretű mátrixok esetén végezhető el.

$A(BC)$ esetén: ha A $(n\times k)$-as, akkor szükségképpen BC mérete $k\times m$. Vagyis ha B $(k\times l)$-es, C pedig $(l\times m)$-es.

$(AB)C$ esetén: ha C mérete $l\times m$, akkor szükségképpen AB mérete $n\times l$, tehát A mérete $n\times k$, B mérete $k\times l$.

A méretek tehát minden esetben $n\times k$, $k\times l$, $l\times m$, a szorzat mérete pedig $n\times m$.

12.2.7. Állítás *Ha* $A\in T^{n\times k}$, $B\in T^{k\times l}$, $C\in T^{l\times m}$, *akkor az* $A(BC)$ *és az* $(AB)C$ *szorzás is elvégezhető, a szorzat mérete* $n\times m$, *és a két szorzat egyenlő.*

A szorzás azonban nem kommutatív – de nagyon nem! – Sőt!

Mit értünk ezen?

Nem kommutatív, mert nem is mindig elvégezhető. Csak akkor, ha A oszlopai (azaz sorelemei) és B sorai (azaz oszlopelemei) száma egyenlő.

Nagyon nem kommutatív, mert ha el is végezhető, az AB és a BA végeredmény mérete nem biztos, hogy megegyezik. Ha például A mérete $n\times k$, B mérete $k\times n$, akkor AB mérete $n\times n$, BA mérete $k\times k$.

Sőt! Ha el is tudjuk végezni mindkét szorzást, és a szorzatok mérete is megegyezik, még mindig előfordulhat, hogy $AB\neq BA$. Annak, hogy AB és BA ugyanolyan méretű legyen, az a feltétele, hogy A és B mérete is $n\times n$ legyen.

12.2.8. Definíció. *Az olyan mátrixot, amelynek sor- és oszlopszáma ugyanannyi,* négyzetes mátrixnak *nevezzük.*

Példa. Legyen A és B is négyzetes, mégpedig (2×2)-es, és legyen

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$AB = \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$BA = \begin{bmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 0 & 0\cdot 0 + 0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

és ezek nem egyenlők.

Az viszont ellenőrizhető, hogy amennyiben minden művelet elvégezhető, akkor a *mátrixszorzás disztributív a mátrixösszeadásra.*

Határozzuk meg, hogy milyen méretek mellett lehet elvégezni az $A(B+C)$ mátrixműveletet!

Ha A mérete $n \times k$, akkor $B + C$ mérete szükségszerűen $k \times m$, vagyis B és C is $(k \times m)$-es (hiszen csak ugyanolyan méretű mátrixokat tudunk összeadni), és a szorzat $(n \times m)$-es.

Ezen feltételek mellett $A(B + C) = AB + AC$.

Hasonlóan, $(A + B)C$ elvégezhető, ha A és B mérete $n \times k$, C mérete $k \times m$, akkor $(A + B)C = AC + BC$, és a művelet eredményének mérete $n \times m$.

12.2.9. Állítás *Ha $A \in T^{n\times k}$, $B, C \in T^{k\times l}$, $D \in T^{l\times m}$, akkor $A(B + C) = AB + AC$ (a mérete $n \times l$), valamint $(B + C)D = BD + CD$ (a mérete $k \times m$).*

12.2.10. Definíció. *Ha $A \in T^{n\times k}$, akkor azt a mátrixot, amelynek mérete $k\times n$ és az ij indexű eleme ugyanaz, mint A-nak ji indexű eleme, úgy nevezzük, hogy az A* mátrix transzponáltja, *és így jelöljük: A^T.*

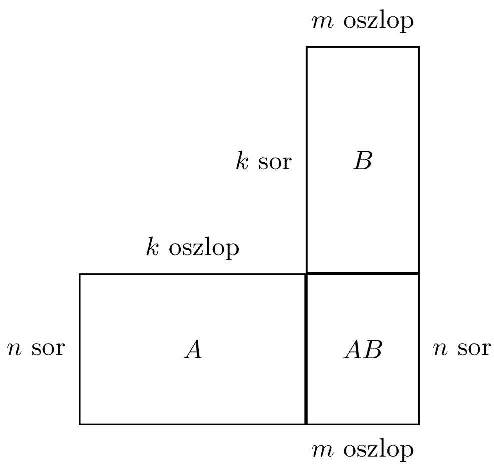
12.2.11. Definíció. *Az A mátrix ii indexű elemei alkotják az A* mátrix főátlóját.

Ezt azt jelenti, hogy az A mátrixot „tükrözve” a főátlójára megkapjuk a transzponáltját, például:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

főátlójában álló elemek az 1 és az 5, A transzponáltja pedig

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$



12.2. ábra. A mátrixszorzás egyik lehetséges lejegyzése

12.2.1. A mátrixok szorzatáról

A mátrixok szorzásának lejegyzése meglehetősen bonyolult, sok szorzást és összeadást végzünk közben. Ha az A mátrix mérete $n \times k$, a B mátrixé $k \times m$, akkor a szorzatmátrix mérete $n \times m$, azaz mind az $n \times m$ elemhez el kell végeznünk k darab szorzást (végigmegyünk A megfelelő sorelemein és szorozzuk B megfelelő oszlopelemeivel), majd összeadjuk a k darab szorzatot. Ha csak a szorzatokat számoljuk is $n \cdot m \cdot k$ szorzatot számítunk ki.

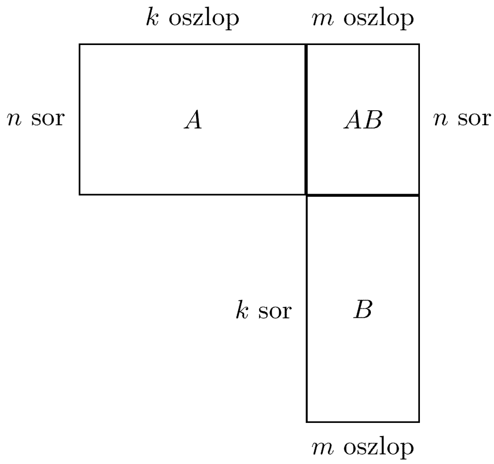
Eltéveszteni is nagyon könnyű, ezért találtak ki egy olyan lejegyzési módot, amelynek során könnyebben számontartható legalább az, hogy melyik sorelemeket és oszlopelemeket szorozzuk éppen.

A szorzandó A és B mátrixokat egymáshoz képest elcsúsztatva írjuk le, mégpedig úgy, hogy az A jobb felső sarkához illesztjük a B bal alsó sarkát, vagy az A jobb alsó sarkához a B bal felső sarkát. Ez tulajdonképpen mindegy (12.2, 12.3 ábrák).

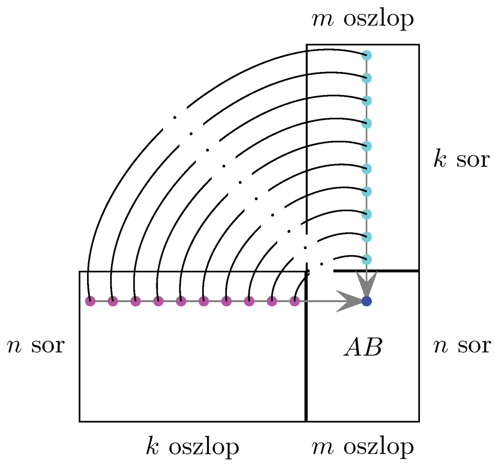
Ezután A i-edik során és B j oszlopán végigmenve az elemeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk (12.4. ábra).

12.2.12. Megjegyzés. *Figyeljük meg, hogy az AB szorzat lejegyzésekor a jobbra lent fennmaradó $n \times m$ méretű téglalap helyen keletkezett az AB szorzat. A felső üres hely mérete egy $k \times k$ négyzet alakú hely.*

12.2.13. Megjegyzés. *Ha A és B négyzetes mátrixok, akkor nemcsak jobbra lent/fent lehet mátrixszorzatot létrehozni, hanem az A fölött és B mellett található téglalapban is létrehozható egy szorzatmátrix. Vizsgáljuk meg, hogy milyen hasonló mátrixszorzás eredménye kapható meg itt.*



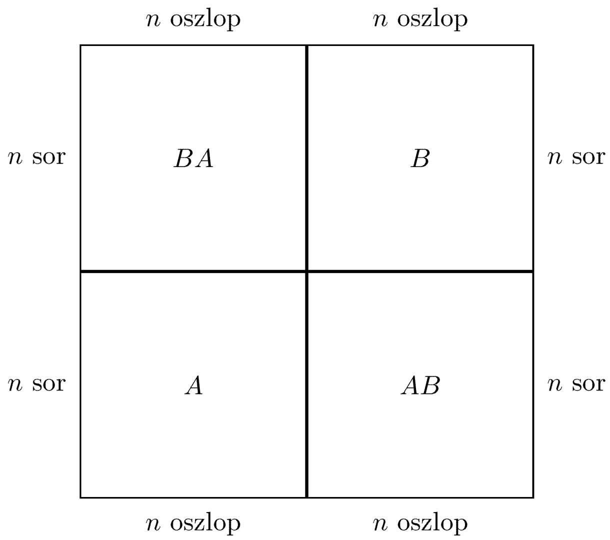
12.3. ábra. A mátrixszorzás egy másik lehetséges lejegyzése



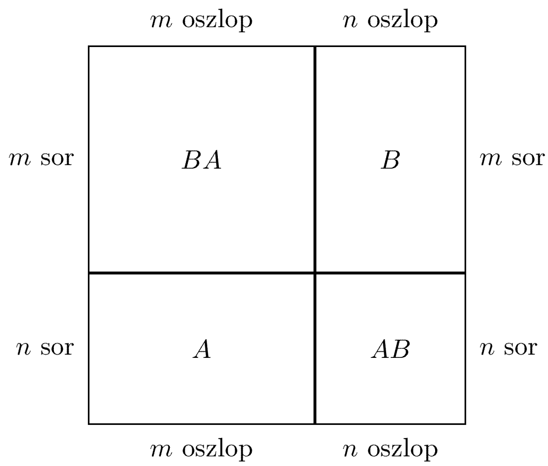
12.4. ábra. Az AB egyetlen elemének kiszámítása

Mivel egy hasonló eljárással ide az A oszlopai és B sorainak szorzatát tudjuk beírni, ez éppen a BA mátrixszorzat lesz! (12.5. ábra)

Ez nemcsak négyzetes mátrixokra alkalmazható, hanem minden olyan A, B mátrixra, amelyek esetén AB és BA is elvégezhető. Ekkor ha A mérete $n \times m$, B mérete $m \times n$, akkor a jobbra lent keletkező $n \times n$ méretű helyre az AB mátrix, a balra fent keletkező $m \times m$ méretű helyre a BA mátrix kerül. (12.6. ábra)

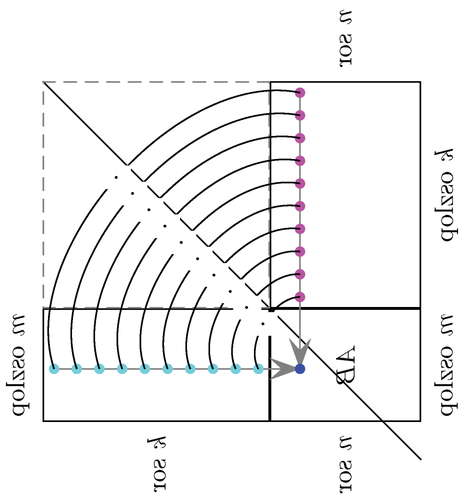


12.5. ábra. Négyzetes mátrixok szorzata



12.6. ábra. „Ellentétes” méretű mátrixok szorzata

12.2.14. Megjegyzés. *Még egy fontos észrevételt tudunk tenni. Ha az üresen maradt négyzet átlóját gondolatban megrajzoljuk, meghosszabbítjuk, és az ábrát tükrözzük, akkor az A helyére B^T, B helyére A^T lép, és mivel ugyanazok a szorzatösszegek fognak szerepelni, mint AB-ben (csak éppen más, „ellentétes" pozícióra kerülnek), így a $B^T \cdot A^T$ mátrixszorzás során éppen $(AB)^T$ az eredmény. (12.7. ábra)*



12.7. ábra. Szorzatmátrix „transzponáltja", amelyet a 12.4 ábra tényleges tükrözésével kaptuk

Mielőtt továbblépnénk, vizsgáljuk meg közelebbről, mi történik a mátrix soraival, oszlopaival a mátrixszorzás során.

Ehhez vegyük elő ismét azt a lineáris egyenletrendszert, amelyen megmutattuk a mátrixszorzás értelmét.

$$\begin{aligned} 1 \cdot x + (-1) \cdot y &= 3 \\ 1 \cdot x + \quad 1 \cdot y &= 1 \\ 2 \cdot x + \quad 1 \cdot y &= 3 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer bal oldalát felírhattuk volna másképpen is:

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot x + (-1) \cdot y \\ 1 \cdot x + 1 \cdot y \\ 2 \cdot x + 1 \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x \\ 1 \cdot x \\ 2 \cdot x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (-1) \cdot y \\ 1 \cdot y \\ 1 \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot y$$

Emlékeztetünk, hogy mátrixszorzással ezt így írtuk le:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

vagyis az $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ mátrix-szal való szorzás során az első oszlop x-szeresét és a második oszlop y-szorosát adtuk össze.

Fogalmazzuk meg általánosan az imént megfigyelteket: keressük, hogy az AB mátrixszorzat hogyan határozható meg A és B oszlopai segítségével.

Jelöljük A oszlopait mint vektorokat (egy szóval oszlopvektorait) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$-val, és legyen B i-edik oszlopa $\begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ki} \end{bmatrix}$.

Ekkor az AB szorzatmátrix i-edik oszlopa úgy áll elő, mint az A oszlopvektorainak a B i-edik oszlopában szereplő skalárokkal vett lineáris kombinációja.

Nem részletezzük, de az AB szorzat i-edik sorában hasonlóképpen a B mátrix sorainak az A mátrix i-edik sorában álló elemekkel vett lineáris kombinációja áll (gondoljunk a transzponálásra!).

Példa. Ezek alapján számítsuk ki a

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 9 & 4 \\ -2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

esetén az AB és a BA mátrixszorzások eredményét!

Az első esetben a szorzatmátrix első oszlopa az A oszlopainak 1, 0, 0 szorzókkal vett lineáris kombinációja, azaz maga az első oszlop; a szorzat második oszlopa az A oszlopainak 0, 1, 0 szorzókkal vett lineáris kombinációja, azaz maga a második oszlop; a harmadik oszlopa pedig az A oszlopainak 0, 0, 1 szorzókkal vett lineáris kombinációja, vagyis maga a harmadik oszlop. Eszerint $AB = A$.

A második esetben hivatkozhatnánk a szorzat sorai kiszámításához a sorok lineáris kombinációjára, ehelyett azonban gondolkodjunk egy kicsit. Ha $AB = A$ a B oszlopai miatt, akkor nyilván $A^T B$ is egyenlő A^T-tal.

$A^T = A^T B$, mivel pedig $B^T = B$, írhatjuk, hogy ez $A^T B^T$, ami nem más, mint $(BA)^T$, tehát $A^T = (BA)^T$, azaz $A = BA$ is fennáll.

12.2.15. Definíció. *Azt a négyzetes mátrixot, amelynek főátlójában* 1*-esek, minden más helyen* 0*-k állnak,* egységmátrixnak *nevezzük. Az* $(n\times n)$*-es méretű egységmátrixot* I_n*-nel szokás jelölni.*

Egyszerűen ellenőrizhető:

12.2.16. Állítás *Minden* $A \in T^{n\times n}$ *esetén* $AI_n = I_nA = A$.

12.3. Az elemi bázistranszformáció

Azt láttuk, hogy a lineáris egyenletrendszer mátrixokkal tömörebben leírható.

A Gauss-elimináció lépéseit a mátrixokon is nyomon követhetjük. Persze az ismeretleneket a megoldás során nem fontos leírni, azok nem változnak.

Vizsgáljuk meg, hogy miként lehet leírni egy korábban, a Gauss-eliminációval megoldott lineáris egyenletrendszer megoldását mátrixok segítségével.

$$\begin{aligned} x-y &= 3 \\ x+y &= 1 \\ 2x+y &= 3 \end{aligned}$$

felírása mátrixokkal:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Kihagyhatjuk az ismeretlenek mátrixát, de persze akkor nem írunk sem műveleti, sem egyenlőségjelet a kifejezésbe.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Az első sort (a Gauss-eliminációban egyenletet) kivontuk a másodikból, a kétszeresét a harmadikból:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

A második sort (a Gauss-eliminációban egyenletet) osztottuk 2-vel:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

A második sort (a Gauss-eliminációban egyenletet) hozzáadtuk az elsőhöz, a 3-szorosát kivontuk a harmadikból:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ha most visszaírjuk az ismeretlenek mátrixát, akkor elvégezve a mátrixszorzásokat, azt kapjuk, hogy $x = 2$, $y = -1$, $0 = 0$, tehát ugyanazt, mint korábban. (Nem meglepő, csak azt mutatja, hogy helyes a lejegyzés.)

Még rövidebben is lejegyezhetjük, ha nem ragaszkodunk hozzá, hogy külön írjuk le az együttható és az eredménymátrixot, hiszen pontosan ugyanazokat a műveleteket végezzük el rajtuk. Ez akkor már nem mátrix, hanem „csak” egy táblázat.

Persze azt fontos tudni (a későbbiekben látni fogjuk, hogy miért), hogy meddig tartanak az együtthatók, hol kezdődnek az eredmények. Ezért elválasztó vonalat teszünk az összevont táblázatban közéjük:

$$\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}$$

Az eljárás lépései leírva:

$$\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \tag{12.1}$$

Tulajdonképpen még ezen a leíráson is lehet rövidíteni, de ezt most már nem fogjuk megtenni.

A lineáris egyenletrendszer megoldásának egy ehhez nagyon hasonló lejegyzését (egy másik szemlélet alapján) *elemi bázistranszformációnak* nevezzük.

Feladatok

1. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Amely mátrixokat páronként össze lehet adni, azokat adja össze!

Amely mátrixokat páronként össze lehet szorozni, azokat szorozza össze!

Transzponálja a mátrixokat!

Szorozza meg A-t 5-tel, B-t -2-vel, C-t 4-gyel, D-t 0-val!

2. Határozza meg azt az X mátrixot, amelyre $AX = B$, ha

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Számítsa ki a $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ n-edik hatványát tetszőleges természetes n számra!

4. Oldja meg az elemi bázistranszformáció módszerével is a korábbi feladatok lineáris egyenletrendszereit!

5. Számítsa ki a $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ n-edik hatványát tetszőleges természetes n számra!

13. Determináns

Az eddig elmondottak alapján nyilvánvaló, hogy ha eljutunk a lineáris egyenletrendszer egy megoldásához, akkor minden ismeretlen összeadás, kivonás, szorzás, osztás segítségével kifejezhető az együtthatóként és eredményként adott számokból.

Keressünk tehát egy általános megoldási formulát a lineáris egyenletrendszerekre. Annak érdekében, hogy biztosítsuk az egyértelmű megoldás létezését, élünk azzal a szigorú – de indokolt – megkötéssel, hogy feltételezzük, hogy minden egyenlet „független" (azaz a bal oldala nem állítható elő a többi egyenlet bal oldalának lineáris kombinációjaként), illetve az (immár független) egyenletek száma egyenlő az ismeretlenek számával.

Kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer esetén:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= c_2 \end{aligned}$$

Feltételezve, hogy minden osztás elvégezhető, az egyenlő együtthatók módszerével számolunk:

$$\begin{aligned} a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 &= c_1a_{21} \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 &= c_2a_{11} \end{aligned}$$

Ebből $(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_2 = c_1a_{21} - c_2a_{11}$, vagyis

$$x_2 = \frac{c_1a_{21} - c_2a_{11}}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}.$$

Hasonlóan kapható (már csak formálisan is) az x_1:

$$x_1 = \frac{c_1a_{22} - c_2a_{12}}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

13.1. ábra. A 2×2-es mátrix determinánsa

Formalitásról lévén szó, megfigyelhető, hogy az x_1 úgy kapható az együtthatókból, hogy az

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \text{illetve a} \qquad \begin{bmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{bmatrix}$$

elrendezésben az átlós elemeket (ugyanolyan elrendezésben) összeszorozva, az egyik szorzatból a másikat kivonva kapjuk a nevezőt és a számlálót, míg x_2-nél a két elrendezés

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{bmatrix}.$$

Vagyis a mátrixokból egy-egy számot képeztünk: az átlós elemek szorzatának különbsége (13.1 ábra).

A mátrix főátlója – mint korábban említettük – az egyenlő indexű elemek. A másik átló neve: *mellékátló*. Eszerint a főátlóban szereplő két elem szorzatából kivonjuk a mellékátlóban szereplő két elem szorzatát.

Vizsgáljuk meg most a három egyenletből álló, háromismeretlenes esetet.

Az előzőhöz hasonló módszerrel, de sokkal több számolással azt kapjuk, hogy a nevezőben olyan szorzatok szerepelnek, amelyek az a_{ij} együtthatókból képezett mátrix minden sorából és oszlopából pontosan egy elemet tartalmaznak; ezeket pedig valamilyen előjellel tekintve adjuk össze. A számlálóban szereplő kifejezés is hasonló, de a mátrix, amiből képeztük, más.

$$x_1 = \frac{c_1 a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} c_3 + a_{13} c_2 a_{32} - a_{13} a_{22} c_3 - a_{12} c_2 a_{33} - c_1 a_{23} a_{32}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} c_2 a_{33} + a_{12} c_3 a_{31} + a_{13} c_1 a_{32} - a_{13} c_2 a_{31} - a_{12} c_1 a_{33} - a_{11} c_3 a_{32}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}}$$

$$x_3 = \frac{a_{11} a_{22} c_3 + a_{12} a_{23} c_1 + a_{13} a_{21} c_2 - a_{13} a_{22} c_1 - a_{12} a_{21} c_3 - a_{11} a_{23} c_2}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}}$$

A mátrix elemeiből álló pozitív, illetve negatív előjelű szorzatokat a 13.2. ábra szemlélteti. Ezt, a csak a 3×3-as determináns kiszámítására vonatkozó összefüggést Sarrus-szabálynak nevezzük.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

13.2. ábra. A 3×3-as mátrixból képezett pozitív előjellel vett (folytonos vonallal összekötött) és negatív előjellel vett (szaggatott vonallal összekötött) szorzatok

Vegyük észre, hogy míg a (2×2)-es mátrixokhoz rendelt érték 2 szorzat különbsége, a (3×3)-as mátrix esetében ez már 3-3 szorzat összegének különbsége.

Ha továbbmegyünk, a (4×4)-es mátrix esetében azonban nem 4-4, hanem már 12-12 szorzat összegének különbségét kellene kiszámítanunk.

Ezt konkrétan már fel sem fogjuk írni. Általánosan azonban érdemes megfogalmazni az eredményeinket.

13.1. A determináns fogalma

Foglaljuk össze a céljainkat és eddigi eredményeinket.

A lineáris egyenletrendszer megoldásakor felírtuk az egyenletrendszer mátrixát. Feltételeztük, hogy olyan egyenletek szerepelnek az egyenletrendszerben, amelyek „függetlenek”, és ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen.

Ezzel egyrészt garantáljuk, hogy van megoldás (függetlenek az egyenletek), másrészt garantáljuk, hogy a megoldás egyértelmű (ugyanannyi a független egyenlet, mint az ismeretlen).

Az ilyen egyenletrendszert szokás *regulárisnak* (reguláris jelentése szabályos) nevezni.

Az n-ismeretlenes egyenletrendszer megoldásakor megpróbáltuk az együtthatók és az eredmények ismeretében kifejezni a megoldást. $n = 2$ és 3 esetére azt vettük észre, hogy ugyanolyan szabályszerűség alapján határozhatjuk meg a megoldásban szereplő ismeretlenek nevezőjét és számlálóját (csak más mátrixból), és a megoldásban minden x_i-re ugyanaz a nevező adódott.

Minden négyzetes mátrixhoz hozzárendelünk egy számot, ezt a mátrix *determinánsának* fogjuk nevezni. Ezzel akarjuk megadni a lineáris egyenletrendszer megoldását.

Jelölés: az

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrix determinánsát

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

vagy $\det(A)$ jelöli. A determináns szó jelentése: meghatározó.

13.1.1. Definíció. *Az $A \in T^{n \times n}$ négyzetes mátrixhoz az alábbi eljárás szerint hozzárendelt számot a mátrix* determinánsának *nevezzük.*

1. *Minden lehetséges módon kiválasztunk minden sorból és oszlopból egyetlen számot, és ezeket összeszorozzuk. Az ilyen kiválasztások száma $n!$, hiszen az első oszlopból n-féle, ehhez a másodikból $(n-1)$-féle, a harmadikból $(n-2)$-féle stb. az $(n-1)$-edikből 2-féle, az n-edikből 1-féle lehetséges módon választhatjuk ki a szorzat tényezőjét.*

2. *A szorzatokat megfelelő előjellel látjuk el. Ennek lényege: sorbarendezzük a tényezőket úgy, hogy az első indexeik $1, 2, \dots, n$ sorrendben legyenek, a második indexeiket jelölje $i_1, i_2, \dots, i_n$ (ezek az $1, 2, \dots, n$ számok valamilyen sorrendben): $a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{(n-1)i_{n-1}} \cdot a_{ni_n}$.*

3. *A szorzat előjelét úgy számítjuk ki, hogy összeszámoljuk, hányszor fordul elő a szorzatban előforduló ki_k és li_l indexpárokra, hogy bár $k < l$, mégis $i_k > i_l$; ha ez páros sokszor fordul elő, akkor pozitív előjelet kap a szorzat, ha pedig páratlan, akkor negatív előjelet.*

13.1.2. Megjegyzés. *Egyelőre semmi garanciánk nincs arra, hogy az egyenletrendszer megoldását (nevéhez méltóan) meghatározza a determináns, sőt, arra sincs garanciánk, hogy a reguláris egyenletrendszer determinánsa nem 0, vagyis nem kerülhet nulla a nevezőbe. Ezt a későbbiekben látjuk be.*

Foglalkozzunk egyelőre a determináns kiszámításával.

13.1.3. Megjegyzés. *Bár a determináns kiszámításában az első lépésben nagy n esetében rengeteg szorzatot kell felírnunk, mégis az utolsó lépést tudjuk legkevésbé elképzelni. Ezt szeretnénk kicsit szemléletesebbé tenni.*

Ha például egy 6×6-os mátrixban a kiválasztott szorzat az $a_{12}a_{24}a_{33}a_{46}a_{55}a_{61}$. Keressük meg, milyen előjel járul hozzá.

Az indexpárok: 12, 24, 33, 46, 55, 61. (Az első indexeket már nagyság szerint növekvő sorrendbe állítottuk.)

Elég csak azt összeszámolni, hogy mikor van előjelváltás, vagyis hogy hányszor fordul elő, hogy az indexpár második eleme nagyobb, mint egy őt megelőző indexpár második eleme.

Képzeljük úgy ezeket a számpárokat mint egy verseny résztvevőinek indulási és érkezési sorszámát. Az előjel kiszámításához összeszámoljuk, hogy hány sorrendcserével (előzéssel) állt elő ez a helyzet.

Úgy is mondhatjuk, hogy megszámoljuk minden egyes versenyzőnél, hogy hány másik versenyzőt előzött meg.

Például a 24 *és a* 33 *indexpárnál sorrendcsere van, mert bár* $2 < 3$, *mégis* $4 > 3$.

régi sorrend	*új sorrend*
1	2
2	4
3	3
4	6
5	5
6	1

A 6 nem került senki elé. (Legelöl volt, nem is tudott volna ki elé kerülni.)

Az 5 a 6-os (és csak a 6-os) elé került. Ez 1 előzés.

A 4 nem került senki elé. (Nem utasított senkit maga mögé az előtte állók közül.)

A 3 a 4-es (és csak a 4-es) elé került. Ez 1 előzés.

A 2 nem került senki elé. (Leghátul végzett.)

Az 1 elé került mind az 5-nek: az előtte lévők közül most mögötte van a 2, a 4, a 3, a 6, az 5. Ez 5 előzés.

Összesen $1 + 1 + 5 = 7$ *előzés történt, ami páratlan, vagyis a szorzat negatív előjelet kap.*

Általában, ha az aktuális szorzat, amelynek az előjelét keressük:

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

akkor vizsgáljuk az indexeket.

Ezeket az elemeket rendre az 1., 2., ..., n-edik sorból választottuk.

Az előjel kiszámításához összeszámoljuk, hogy hány előzés történt. (Egyébként persze nem tudjuk, hogy a verseny közben mi történt, csak a végeredmény alapján nyilatkozhatunk).

Úgy is mondhatjuk, hogy megszámoljuk minden egyes versenyzőnél, hogy hányan előzték meg.

Ehhez az összeszámoláshoz egy n-tényezős szorzat esetén $\binom{n}{2}$ összehasonlítást kell végeznünk.

Az $1, 2, \ldots, n$ indexek $i_1, i_2, \ldots, i_n$ sorrendjét permutációnak nevezzük, a sorrendcserék számát a permutáció inverzió számának nevezzük. Egy konkrét permutáció inverziószámának megállapítását a

www.cs.elte.hu/~kfried/algebra2/inverzioszam.html

animáció szemlélteti. Itt megszámoljuk, hogy hány sorrendcserével állítható vissza az eredeti sorrend.

13.2. A determináns néhány fontos tulajdonsága

A determináns definíció szerinti kiszámítása rettenetesen idő- és műveletigényes.

Most néhány, a determinánsokra vonatkozó tulajdonságot bizonyítunk be, hogy egyszerűbbé tegyük ezt a számolást.

Szögezzük le, hogy **csak négyzetes mátrixnak van determinánsa.**

13.2.1. Állítás *Az A mátrix és A^T transzponáltjának determinánsa egyenlő.*

Bizonyítás. Mivel a determináns kiszámításához minden sorból és oszlopból választunk egy-egy elemet, ezeket összeszorozzuk, előjelezzük és összeadjuk, a mátrix determinánsában szereplő tetszőleges szorzat előfordul a transzponált szorzatai között. A kérdés csak az, hogy ugyanaz lesz-e az előjele.

Mely esetekben van „előjelváltás” egy tetszőleges szorzatban?

A szorzat előjelet vált, ha két tényező (a_{ij} és a_{uv}) esetén, $i < u$ mellett $j > v$.

Vizsgáljuk a transzponált mátrixban az a_{ij} és a_{uv} elemeknek a szorzatban elfoglalt helyét. Az a_{ij} a ji, az a_{uv} a vu indexű helyen lesz. Most a sorindex j és v, ahol $j > v$. Ezzel szemben $i < u$, ez pedig azt jelenti, hogy a transzponált mátrixban is előjelváltás következik be.

Ha pedig nincs előjelváltás, mert $i < u$ és $j < v$, akkor a transzponált mátrixban $v > j$ mellett $u > i$, tehát ott sincs előjelváltás.

Vagyis a két szorzatban ugyanazon elempárok esetén lesz előjelváltás, ezért ugyanannyi az előjelváltás a megfelelő szorzatokban, vagyis bármely két megfelelő szorzat előjele ugyanaz. $\square$

Innentől kezdve minden állítást oszlopokra mondunk ki, a sorokra vonatkozó állítás a transzponált mátrix oszlopaira írható fel.

13.2.2. Állítás *Egy mátrix két oszlopát felcserélve a determinánsa előjelet vált:*

Bizonyítás. A szorzatok nyilván ugyanazok maradnak, csak az a kérdés, hogy egy-egy szorzat előjele változik-e.

Ha két szomszédos oszlopot cserélünk fel, például a k és a $(k+1)$-ediket, akkor minden szorzatban van egy a_{k,i_k} és $a_{k+1,i_{k+1}}$ alakú tényező, amelyek oszlopindexe az oszlopcsere miatt felcserélődik.

Ezek a tényezők felcserélés után ugyanannyi elemet előznek meg (sőt, pontosan ugyanazokat) a többi tényező közül, mint a felcserélésük előtt, azonban a két tényező között a megelőzés sorrendje megváltozik. Ha az a_{ki_k}-t megelőzte a másik, akkor most nem fogja megelőzni (hiszen elé kerül sorrendben, eggyel csökken az utána szereplő megelőzők száma), ha pedig nem előzte meg, akkor a csere után elé kerül. Például $k < k+1$ mellett $i_k < i_{k+1}$ esetén most $i_{k+1} > i_k$ sorrendben fognak szerepelni az oszlopcsere miatt.

Ha viszont két nem szomszédos oszlopot akarunk cserélni, mondjuk az i-ediket és a j-ediket $(0 \leq i < j)$, akkor az i-edik oszlopot szomszédos oszlopcserékkel $(j-i-1)$ lépésben elvisszük a $(j-1)$-edik oszlophelyre, felcseréljük a $(j-1)$-edik és a j-edik oszlopot, majd ismét $j-i-1$ lépésben visszavisszük a $(j-1)$-edik oszlopot az i-edikre. Összesen $2(j-i-1)+1$, azaz páratlan oszlopcserét végeztünk. Az előjel eközben páratlan sokszor változott, tehát összességében (-1)-szeresére változik a szorzat.

Ez pedig minden szorzatra teljesül, vagyis a determináns az eredeti mátrix determinánsának (-1)-szerese lesz. $\square$

13.2.3. Állítás *Ha egy mátrix egy oszlopában csupa* 0 *szerepel, akkor a determináns is* 0.

Bizonyítás. Ez abból következik, hogy minden szorzat minden oszlopból tartalmaz egy tényezőt, vagyis minden szorzatban lesz egy elem a csupa 0 oszlopból, így minden szorzat 0 lesz. $\square$

13.2.4. Állítás *Ha a mátrix két oszlopa egyenlő, akkor a determinánsa* 0.

Bizonyítás. Ha a két oszlopot fölcserélem, akkor a determináns előjele az ellenkezőjére változik, de mivel a mátrix maga nem változik, a determináns ugyanaz, mint az ellentettje, tehát 0. □

13.2.5. Állítás *Ha egy mátrix valamelyik oszlopának minden elemét egy u számmal szorozzuk, az így kapott mátrix determinánsa u-szorosa lesz az eredeti mátrix determinánsának.*

Bizonyítás. Az új mátrix determinánsában minden szorzatban lesz egy tényező, amely egy, az eredeti determinánsban szereplő szorzat u-szorosára változik. Így az összes szorzat u-szorosára változik, vagyis az összeg, azaz a determináns is u-szoros lesz. □

13.2.6. Következmény. *Ha egy mátrix valamelyik oszlopa egy másik oszlopának számszorosa, akkor a mátrix determinánsa* 0.

Bizonyítás. Ha ebben a B mátrixban az i-edik oszlop u-szorosa a j-edik oszlop, akkor onnan kiemelhetjük az u-t, és azt kapjuk, hogy $|B| = u|B'|$ (ahol a B' a kapott mátrix), de B' két oszlopa egyenlő, tehát $|B'| = 0$, azaz B determinánsa is 0. □

13.2.7. Állítás *Ha az A és B mátrix csak egyetlen oszlopában tér el, akkor annak a C mátrixnak a determinánsa, amelyben az eltérő elemek oszlopában $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, a többiben pedig $c_{kj} = a_{kj} = b_{kj}$, az A és B determinánsának az összege.*

Bizonyítás. Az A és B determinánsában szereplő egymásnak megfelelő (ugyanazon helyről vett) szorzatok tényezői egyetlen tényezőben különböznek. Ezeket összevonva a közös tényezők kiemelhetők, illetve a megmaradó tényező a két különböző elem összege. A C mátrixnak a determinánsában viszont éppen a szorzat szerepel.

Mivel ez a felbontási tulajdonság minden szorzatra teljesül, így az összegre is teljesül. □

Példa. Nézzük meg ezt egy példán. Az egyszerűség kedvéért (2×2)-es mátrixokat veszünk.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (-2) + (-9) = -11 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -11$$

Az itt szereplő szorzatok $(1 \cdot 4 - 3 \cdot 2) + (1 \cdot 6 - 3 \cdot 5)$, az egyes kiválasztásnak megfelelően rendezve: $(1 \cdot 4 + 1 \cdot 6) - (3 \cdot 2 + 3 \cdot 5)$, kiemelve a közös tényezőt: $1 \cdot (4 + 6) - 3 \cdot (2 + 5)$, ami éppen az „egyesített” mátrix determinánsa.

13.2.8. Állítás *Egy mátrix k-adik oszlopához hozzáadva az i-edik oszlop számszorosát, a determináns nem változik.*

Bizonyítás. Mivel az A mátrixban csak a k-adik oszlop változott, mégpedig úgy, hogy hozzáadódott az i-edik valahányszorosa, ezért a kapott (A') mátrix determinánsa felbomlik két olyan mátrix determinánsára, amelyek egyike maga az A, a másikban pedig az A mátrix i-edik sorának számszorosa szerepel a k-adik oszlopban. (13.2.7. állítás miatt)

Ezek determinánsa $|A|$, illetve 0 (a 13.2.6. állítás miatt), vagyis $|A'| = |A|$. $\square$

Példa. Egy példán, a legapróbb lépésekre lebontva szemléltetjük ezt is. Egyrészt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} =$$
$$= (1 \cdot 3 \cdot 8) + (2 \cdot 5 \cdot 1) + (3 \cdot 1 \cdot 4) - [(1 \cdot 5 \cdot 4) + (2 \cdot 1 \cdot 8) + (3 \cdot 3 \cdot 1)] =$$
$$= 24 + 10 + 12 - 20 - 16 - 9 = 1.$$

Másrészt (felbontjuk a mátrixot a második oszlopában úgy, hogy a második oszlopból leválasztjuk az első kétszeresét)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} + 0,$$

hiszen két oszlopa egymás számszorosa. De a megmaradt mátrixot tovább is bonthatjuk (a harmadik oszlopában úgy, hogy leválasztjuk róla az első oszlop háromszorosát):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \ldots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 0.$$

Itt akár meg is állhatnánk, és kiszámíthatnánk a megmaradt determinánst (egyébként valóban 1), de ha már lúd, legyen kövér! Végezzük el sorokra is a lehetséges szétbontásokat (a második sort szétbontjuk úgy, hogy az első sort leválasztjuk róla):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \ldots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 0,$$

sőt, a megmaradt mátrix harmadik sorát is szétbontjuk:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \ldots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 0.$$

Az eljárást tovább folytathatjuk a második oszlop 2-szeresének a harmadikból való leválasztásával.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \ldots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0,$$

most pedig a harmadik sort bontjuk ketté úgy, hogy a második sor kétszeresét leválasztjuk:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \ldots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0.$$

Ennél szebb eredményben nem is reménykedhettünk volna, hiszen az utoljára maradt mátrix determinánsának kiszámításához egyetlen szorzást kell csak elvégeznünk. (Csak egy olyan szorzatot lehet kiválasztani, amelyben nem szerepel nulla.) A mátrix determinánsa 1.

Az imént követett determináns kiszámítási móddal kapcsolatban újabb nagyon fontos észrevételeket kell tennünk.

13.2.9. Állítás *Ha egy mátrix főátlója felett és/vagy alatt csupa nulla áll, akkor a mátrix determinánsa a főátlóban álló elemek szorzata.*

Bizonyítás. Bármelyik esetet vizsgáljuk is, az egyetlen lehetséges mód, hogy olyan szorzatot válasszunk ki, hogy elkerüljük a biztosan nullával egyenlő elemeket, csak a főátlóban szereplő elemeket választhatjuk. Ezek indexpárjai 11, 22, $\ldots$, nn, vagyis nem történt sorrendcsere, így a szorzat előjelén nem változtatunk. $\square$

13.2.10. Definíció. *Azt a mátrixot, amelynek a főátlóján kívül minden eleme nulla,* diagonális mátrixnak *nevezzük.*

Azt a mátrixot, amelynek a főátlója fölött minden elem nulla, alsó háromszögmátrixnak *nevezzük.*

Azt a mátrixot, amelynek a főátlója alatt minden elem nulla, felső háromszögmátrixnak *nevezzük.*

13.2.11. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy a 13.2 példában a sorokra végzett sorszétbontások emlékeztetnek arra, ahogyan a lineáris egyenletrendszer egyes sorainak számszorosait kivontuk más sorokból. Ha éppen ugyanazokat a lépéseket végezzük el a determináns kiszámításához, mint az egyenletrendszer megoldásakor, akkor éppen arra az eredményre jutunk: az egyenletrendszer bal oldalán csak egy-egy ismeretlen szerepel; a mátrixban minden sorban és oszlopban csak egyetlen elem különbözhet a nullától. (A többit lenulláztuk.)*

Érzékelhető a párhuzam a lineáris egyenletrendszer megoldása és a determináns kiszámítása között. Nézzük meg egy példán.

Példa. Az egyszerűség kedvéért az előbb látott mátrix legyen a lineáris egyenletrendszer mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldása a mátrix sorainak alakításával a Gauss-eliminációnak megfelelően: kivonjuk az első sort a másodikból és a harmadikból (kiejtjük x_1-et):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Kivonjuk a második sor kétszeresét az első és ugyancsak kétszeresét a harmadik sorból (kiejtjük x_2-t):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kivonjuk a harmadik sor (-1)-szeresét az elsőből, 2-szeresét a másodikból (kiejtjük x_3-at):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Végeredményben (ha elvégezzük a mátrxiszorzást) azt kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eszerint $x_1 = 7$, $x_2 = -4$, $x_3 = 1$. Ellenőrizve az eredményt látjuk, hogy ez valóban megoldás.

A determináns kiszámításakor is elvégezhettük volna ugyanezeket a lépéseket:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

13.2.12. Állítás *Egy mátrix determinánsát a 13.2 példában leírt módon és sorcserékkel háromszögmátrix – vagy végső soron diagonális – alakra lehet hozni.*

Bizonyítás. A mátrix soraira alkalmazzuk a Gauss-eliminációban leírt lépéseket. Ha elakadunk – mert a soron következő együttható nulla –, akkor elvégezzük a szükséges sor- vagy oszlopcserét, ami után a determináns előjelet vált.

Ellentmondásra nem juthatunk, mert nincs olyan, hogy „jobb oldal", vagyis nincs eredmény.

Ha a k-adik lépés után „elfogy" a sor, vagyis az utolsó $n-k$ sor már csupa nulla, azaz így néz ki a mátrix:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{1,k+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & 0 & \dots & 0 & b_{2,k+1} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \dots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{k,k} & b_{k,k+1} & \dots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

akkor a $(k+1)$-ediktől az n-edikig megmaradó oszlopokban szereplő elemeket oszloptranszformációval elimináljuk.

Ekkor a determináns nulla. $\square$

13.2.13. Definíció. *Azt a műveletet, amelynek során egy oszlophoz hozzáadjuk egy másik oszlop számszorosát (skalárszorosát),* oszloptranszformációnak *nevezzük. Azt a műveletet, amelynek során egy sorhoz hozzáadjuk egy másik sor számszorosát (skalárszorosát),* sortranszformációnak *nevezzük.*

13.2.14. Megjegyzés. *Ismét szoros kapcsolatot fedeztünk fel a Gauss-elimináció és a determináns ily módon történő kiszámítása között. Nevezetesen azt, hogy a Gauss-eliminációval pontosan akkor tudunk végigmenni az egyenletrendszeren, amikor a determináns kiszámításakor a redukálást az utolsó sorig tudjuk folytatni.*

Ezzel a definícióban megadott bonyolult számítási eljárás mellett olyan módszert alkottunk, amelynek segítségével kiszámítható egy négyzetes mátrix determinánsa. Ráadásul a számítás összhangban van a lineáris egyenletrendszer megoldására adott algoritmussal.

További kapcsolatot fogunk még keresni a későbbiekben.

13.3. A determináns kifejtése

Vizsgáljuk most meg, hogy mely szorzatok tartalmazzák tényezőként az a_{11}-et.

Ezek azok a szorzatok, amelyekben minden, az elsőtől különböző oszlop minden, az elsőtől különböző eleméből választunk egyet, és azt a megfelelő előjellel ellátjuk.

Amikor kiemeljük az a_{11} elemet belőlük, a megmaradó összeg az a_{22} és a_{nn} elemek közé zárt mátrix determinánsát adják. Ezt az a_{11}-hez tartozó *aldeterminánsnak* nevezzük, és így jelöljük: A_{11}.

Az a_{21}-et tartalmazó elemek hasonlóan, az első oszlop kivételével és a második sor kivételével minden oszlop minden sorából tartalmaznak egy-egy tényezőt, de ezek mindegyikét (-1)-gyel kell szorozzuk, hiszen minden tényezőben az a_{21}-et pontosan 1 elem előzi meg (az a_{i1}). Az a $-$ előjellel vett determinánst, amelyet az első oszlop és második sor elhagyásával kapott mátrixból számítunk, az a_{21} elemhez tartozó *aldetermináns*, és így jelüljük: A_{21}.

Az a_{31}-et elhagyva hasonlót mondhatunk, de az előjel itt pozitív, hiszen az a_{31}-et két tényező előzi meg: az egyik az első sorból, a másik a második sorból vett. Az a_{31} *aldeterminánsa* (A_{31}) a megmaradó mátrix $+$ előjellel vett determinánsa.

És így tovább. Így olyan összeget kapunk, amelyben az első oszlop elemeit szorozzuk a hozzájuk tartozó aldeterminánssal. Ezt nevezzük a determináns első oszlop szerinti *kifejtésének.*

13.3.1. Definíció. *A determináns* első oszlopa szerinti kifejtésnek *az* $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1}$ *összeget nevezzük.*

Ezek után nyilvánvaló:

13.3.2. Állítás *Minden négyzetes mátrix kifejthető az első oszlopa szerint.*

13.3.3. Következmény. *A determináns tetszőleges oszlopa, sőt, tetszőleges sora szerint kifejthető.*

Bizonyítás. Amennyiben másik (például a k-adik) oszlop szerint akarjuk kifejteni a determinánst, akkor az oszlopot (minden korábbival felcserélve) $(k-1)$ oszlopcserélgetéssel az első helyre visszük, és a determinánst kifejtjük az első oszlop szerint. Természetesen ilyenkor $(k-1)$ előjelváltás történik.

Ha például a második oszlop szerint fejtünk ki, akkor az első elem aldeterminánsa $+$ helyett $-$ lesz, a következő $-$ helyett $+$ stb. Ha a harmadik oszlopot választjuk, akkor az előjelek ugyanazok maradnak, mint az első esetben voltak.

Felrajzolhatjuk az előjeleket: (13.3 ábra)

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \ldots & \ldots & \ldots \\ - & + & - & + & - & \ldots & \ldots & \ldots \\ + & - & + & - & + & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & + & - & + \end{bmatrix}$$

13.3. ábra. Az aldeterminánsok előjelezése

A előjelek szerinti mintázata miatt ezt *sakktáblaszabálynak* nevezik. Fontos látni, hogy az ij indexű elemhez tartozó előjel $(-1)^{i+j}$.

Ha viszont valamelyik sor szerint akarjuk kifejteni a determinánst, akkor transzponáljuk a mátrixot – tudjuk, hogy ennek a determinánsa ugyanannyi. □

13.4. A mátrixműveletek és a determináns kapcsolata

Érdekes kérdés, hogy hogyan változik egy mátrix determinánsa, ha transzponáljuk, megszorozzuk egy skalárral, vagy van-e összefüggés mátrixok összege/szorzata determinánsa és az operandus mátrixok determinánsai között.

Ebben a részben ezekre a kérdésekre keressük a választ.

Nyilvánvaló, hogy mátrix adott skalárszorosának determinánsa nem a determináns ugyanazon skalárszorosa, hiszen korábban láttuk, hogy ha egy mátrix egyik oszlopát megszorozzuk egy u számmal, akkor u-szorosára változik a determináns. (Természetesen az $u = 0$ eset teljesen érdektelen.)

Ez viszont egyszersmind azt is jelenti, hogy ha a mátrixot szorozzuk u-val, akkor a determinánsa u^n-szeresére változik, hiszen ekkor n oszlopot szoroztunk u-val.

Azt is tudjuk, hogy nem lehet, hogy $A + B$ determinánsa a tagok determinánsának összege legeyn, hiszen egy eglsz másféle összefüggést mondtunk ki: ha két mátrixnak csak az i-edik oszlopa tér el egymástól, a többi ugyanaz, akkor az a mátrix, amelynek i-edik oszlopa a két i-edik oszlop összege, a többi pedig ugyanaz, mint a két mátrix ugyanazon oszlopai, akkor a kapott mátrix determinánsa az eredeti mátrixok determinánsainak összege.

Ha most $A, B \in T^{2\times 2}$ és az oszlopaikat $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, valamint $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ jelöli, akkor az összegük $\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2\end{bmatrix}$.

Ezt kellene olyan mátrixokra felbontani, amelyek csak egy-egy oszlopban térnek el egymástól, és amelyek determinánsa A és B determinánsából kiszámítható. Magától értetődő lenne a következő felbontás:

$$\begin{aligned}\det([\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2]) &= \det([\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2]) + \det([\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2]) = \\ &= \det([\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2]) + \det([\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{b}_2]) + \det([\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2]) + \det([\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{a}_2]).\end{aligned}$$

Itt csak két determinánst ismerünk.

Az viszont látszik, hogy két mátrix összegének determinánsa nem feltétlenül egyenlő a tagok determinánsának összegével – és ez elég tanulsággal szolgál számunkra.

Azt már korábban megállapítottuk, hogy mátrix és transzponáltja determinánsa egyenlő.

Mit lehet mondani mátrixok szorzatának determinánsáról?

Vizsgáljuk meg egy konkrét szorzat esetében! Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Kiszámíthatjuk (használja a mátrixszorzó programot, 187), hogy

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 0 \\ 4 & 11 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 3 \\ 13 & 6 & 5 \\ -5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ezek determinánsa (használja a determináns kiszámítására a mellékelt programot, 187):

$$\det(A) = -8, \qquad \det(B) = -1, \qquad \det(AB) = \det(BA) = 8.$$

Úgy tűnik, hogy a szorzat determinánsa a tényezők determinánsának szorzata. Kérdés, hogy általában is igaz-e ez, vagy csak most, kivételesen volt ilyen szerencsénk.

13.4.1. Tétel (determinánsok szorzástétele) *$A, B \in T^{n\times n}$ esetén*

$$\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A).$$

Bizonyítás. A nyilvánvaló átalakítással kapható azonosságoktól eltekintünk, és csak annyit bizonyítunk, hogy $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

A bizonyítás (2×2)-es mátrixokra kicsit macerás, de még ellenőrizhető, azonban nagyobb mátrixokra nagyon nehéz. Ennek ellenére többféle módszer is van rá.

Mi most egy ad-hoc bizonyítást mutatunk [4], amely jól nyomonkövethető, de nem magától értetődő. Készítsünk el egy $(2n \times 2n)$-es mátrixot, amelynek a bal felső $(n \times n)$-es négyzetébe az A, a jobb alsó $(n \times n)$-es négyzetébe a B mátrixot írjuk, a bal alsó négyzetébe csupa nullát, a jobb felsőbe pedig az I_n ellentettjét írjuk (13.4 ábra).

Először számítsuk ki ennek a mátrixnak a determinánsát a definíció szerint.

Ha nem akarunk biztosan nulla tényezőt belevenni a szorzatba, akkor az első n oszlopból csak az A mátrix elemeit válogatjuk ki, mégpedig ezek szerint minden oszlopból (ennek megfelelően minden sorból) egyet-egyet. Ekkor azonban az első n sorból több elemet már nem választhatunk, mert innen már választottunk tényezőt, hanem csak a B mátrix elemei közül választhatunk, innen viszont minden lehetséges módon minden sorból (és akkor oszlopból is) egyet-egyet.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline A & \begin{matrix}-1 & & & & 0\\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ 0 & & & & -1\end{matrix} \\ \hline 0 & B \\ \hline\end{array}$$

13.4. ábra.

Ez azt jelenti, hogy az A determinánsban szereplő minden szorzatot a B teljes determinánsával megszorozzuk, és ezt minden, az A determinánsának felírásában szereplő összeadandóval megtesszük. Ha ezek mindegyikéből kiemeljük $\det B$-t, akkor összességében $(\det A) \cdot (\det B)$-t kapjuk.

Most számítsuk ki oszloptranszformációk segítségével a determinánst.

Az első oszlophoz adjuk hozzá az $(n+1)$-edik oszlop a_{11}-szeresét, az $(n+2)$-edik oszlop a_{21}-szeresét az $(n+3)$-adik oszlop a_{31}-szeresét stb., az $(n+n)$-edik oszlop a_{n1}-szeresét.

Ezzel az A mátrix első oszlopa csupa nulla lesz, míg a bal alsó sarokban lévő (eredendően csupa nulla) mátrix első oszlopa a B oszlopainak A első oszlopában szereplő elemeivel vett lineáris kombinációja. Ez nem más, mint az AB szorzatmátrix első oszlopa.

Folytassuk a második oszloppal: adjuk hozzá az $(n+1)$-edik oszlop a_{12}-szeresét, az $(n+2)$-edik oszlop a_{22}-szeresét, az $(n+3)$-adik oszlop a_{32}-szeresét stb., az $(n+n)$-edik oszlop a_{n2}-szeresét.

Így az A mátrix helyén a második oszlopot is lenulláztuk, míg a csupa nulla mátrixrész második oszlopába az AB szorzat második oszlopa került.

Folytassuk mindezt az utolsó oszlopig, míg végül az A helyén a csupa nulla mátrix lesz, az eredetileg csupa nulla helyen pedig az AB mátrixszorzat (13.5 ábra).

Az átalakítások során a determináns nem változott.

$$
\begin{array}{|c|c|}
\hline
 & \begin{matrix} -1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \\ 0 & & & & -1 \end{matrix} \\
0 & \\
\hline
AB & B \\
\hline
\end{array}
$$

13.5. ábra.

Végezzünk el még egy apró átalakítást! Szorozzuk (-1)-gyel mind az első n sort, így a determináns $(-1)^n$-szeresére változik, de aztán végezzünk el n darab sorcserét is – ez ismét $(-1)^n$-szeresére változtatja a determinánst, vagyis összességében $(-1)^{2n} = 1$-szeresére változik –, ahol az n darab sorcsere legyen az 1. és $(n+1)$-edik, a 2. és az $(n+2)$-edik stb., a k-adik és $(n+k)$-adik sorok cseréje (13.6 ábra).

$$
\begin{array}{|c|c|}
\hline
AB & B \\
\hline
 & \begin{matrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & & 1 \end{matrix} \\
0 & \\
\hline
\end{array}
$$

13.6. ábra.

Így ennek a mátrixnak még mindig ugyanannyi a determinánsa, mint kiinduláskor volt. Számítsuk ki most ennek a mátrixnak a determinánsát.

A formai hasnlóság miatt könnyű látni, hogy az előzőekhez hasonlóan most is a bal fölső és a jobb alsó részben lévő $(n \times n)$-es mátrixok determinánsai szorzata a nagy mátrix determinánsa, azaz $\det(AB)\cdot\det(I_n)$, vagyis mivel $\det(I_n)=1$, ez $\det(AB)$. Ezzel beláttuk, hogy $\det(A)\det(B)=\det(AB)$. $\square$

13.5. A lineáris egyenletrendszerek megoldása determinánssal

Abból indultunk ki, hogy a lineáris egyenletrendszerek megoldását az együtthatók és az eredmények függvényében akartuk felírni. Végül a determinánsokig jutottunk. Most megkereshetjük, hogy milyen kapcsolat van a lineáris egyenletrendszer megoldása és a determináns között.

Erre Gabriel Cramer (1704–1752) svájci matematikus, fizikus adott választ

13.5.1. Tétel (Cramer-szabály) *Az*

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= c_1\\
a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &= c_2\\
&\vdots\\
a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n &= c_n
\end{aligned}$$

alakú egyenletrendszernek akkor és csak akkor létezik egyértelmű megoldása, ha az együtthatókból képezett A mátrix determinánsa nem 0.

Ekkor a megoldások az alábbi módon kaphatók:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1\,i-1} & c_1 & a_{1\,i+1} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & \ldots & a_{2\,i-1} & c_2 & a_{2\,i+1} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{n\,i-1} & c_n & a_{n\,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1\,i-1} & a_{1i} & a_{1\,i+1} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & \ldots & a_{2\,i-1} & a_{2i} & a_{2\,i+1} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{n\,i-1} & a_{ni} & a_{n\,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

13.5.2. Megjegyzés. *Amennyiben a számlálókat D_i-vel, a nevezőt D-vel jelöljük, a megoldásokat $x_i=\dfrac{D_i}{D}$ alakban adhatjuk meg.*

13.5.3. Definíció. *Azt a négyzetes mátrixot, amelynek a determinánsa nem nulla,* reguláris mátrixnak *nevezzük.*

Azt az egyenletrendszert, amelynek együtthatómátrixa reguláris, reguláris egyenletrendszernek *nevezzük.*

13.5.4. Megjegyzés. *Itt egy kicsit ambivalensek vagyunk, hiszen a reguláris egyenletrendszert már egyszer definiáltuk. Azt mondtuk, hogy legyen ugyanannyi egyenlete mint ismeretlene – ám éppen ettől lesz négyzetes a mátrixa, valamint azt kértük, hogy legyen egyértelmű megoldása – ez pedig a tétel szerint éppen azt jelenti, hogy az együtthatómátrix determinánsa nem nulla. De meg láttuk is, hogy amennyiben a Gauss-elimináció során minden ismeretlen megmarad, akkor a determináns kiszámitása során (esetleg sorcserékkel) diagonális mátrix determinánsához jutunk. Ez – mivel egy ismeretlent sem veszítettünk el – nem lehet nulla.*

Bizonyítás. Először azt bizonyítjuk, hogy ha $D = 0$, akkor nem létezhet egyértelmű megoldás.

$D = 0$ ugyanis azt jelentené, hogy a determináns sorain elvégezve a Gauss-eliminációs lépéseket (és a szükséges oszlopcseréket), valamelyik sor csupa nullává válna.

A Gauss-eliminációs lépésekkel és alkalmas oszlopcserékkel diagonális mátrixot kapunk. A diagonális mátrix determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata, ez pedig csak úgy lehet nulla, ha valamelyik sor csupa nulla.

Az egyenletekre visszafordítva ezt a gondolatot, azt kapjuk, hogy a $D = 0$ feltétel azzal egyenértékű, hogy van olyan egyenlet, amelynek a bal oldala a többiből kifejezhető lineáris kombinációval (a Gauss-elimináció során ugyanis az egyenletekkel képezett lineáris kombinációkat kapunk).

Ebben az esetben pedig vagy ellentmondásra jutunk (ha egy ilyen egyenlet jobb oldalán nem nulla áll), vagy nem lesz egyértelmű megoldás, hiszen ilyenkor nem kapunk minden ismeretlenre értéket.

Másrészt, ha nincs egyértelmű megoldás, az csak úgy lehet, ha a Gauss-elimináció során nem jutunk el a ismeretlenek meghatározásában az utolsóig, vagyis idő előtt „elfogynak" (nullává válnak) az egyenletek. Ez azt jelenti, hogy van olyan egyenlet, amely felírható a többi lineáris kombinációjaként.

Így az A mátrixban neki megfelelő sor felírható a többi sor ugyanilyen lineáris kombinációjaként. Ekkor a determináns kiszámítására vonatkozó állítások alapján az együtthatómátrix determinánsa nulla lesz.

Most pedig azt bizonyítjuk, hogy ha $D \neq 0$, akkor létezik egyértelmű megoldás.

Itt most először azt látjuk be, hogy (i) a tétel szerint adott x_i valóban megoldás, aztán azt, hogy (ii) ha $D \neq 0$ és van megoldás, akkor az a tétel szerint megadott alakban írható fel. Ezekből már következik, hogy ez az egyetlen lehetséges megoldás ebben az esetben. (Voltaképpen fordítva is biznyíthatnánk: belátjuk, hogy x_i csak $\dfrac{D_i}{D}$ alakú lehet, aztán belátjuk, hogy ez valóban megoldás is.)

(i) Ha a determináns nem 0, akkor képezhetők a fenti $\dfrac{D_i}{D}$ kifejezések. Ellenőriznünk kell, hogy az egyenletrendszerben x_i helyére $\dfrac{D_i}{D}$-t írva valóban fennállnak-e az egyenlőségek. Helyettesítsük be az x_i-k helyére a $\dfrac{D_i}{D}$-t:

$$\begin{aligned}
a_{11}\frac{D_1}{D} + a_{12}\frac{D_2}{D} + \ldots + a_{1n}\frac{D_n}{D} &\stackrel{?}{=} c_1 \\
&\vdots \\
a_{i1}\frac{D_1}{D} + a_{i2}\frac{D_2}{D} + \ldots + a_{in}\frac{D_n}{D} &\stackrel{?}{=} c_i \\
&\vdots \\
a_{n1}\frac{D_1}{D} + a_{n2}\frac{D_2}{D} + \ldots + a_{nn}\frac{D_n}{D} &\stackrel{?}{=} c_n
\end{aligned}$$

Szorozzunk meg minden egyenletet D-vel:

$$\begin{aligned}
a_{11}D_1 + a_{12}D_2 + \ldots + a_{1n}D_n &\stackrel{?}{=} c_1 D \\
&\vdots \\
a_{i1}D_1 + a_{i2}D_2 + \ldots + a_{in}D_n &\stackrel{?}{=} c_i D \\
&\vdots \\
a_{n1}D_1 + a_{n2}D_2 + \ldots + a_{nn}D_n &\stackrel{?}{=} c_n D
\end{aligned}$$

Rendezzük át a bal oldalon szereplő kifejezéseket a jobb oldalra:

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{?}{=} c_1 D - a_{11}D_1 - a_{12}D_2 - \ldots - a_{1n}D_n \\
&\vdots \\
0 &\stackrel{?}{=} c_i D - a_{i1}D_1 - a_{i2}D_2 - \ldots - a_{in}D_n \\
&\vdots \\
0 &\stackrel{?}{=} c_n D - a_{n1}D_1 - a_{n2}D_2 - \ldots - a_{nn}D_n
\end{aligned}$$

Minden egyes sor úgy néz ki, mintha egy-egy $(n+1) \times (n+1)$-es mátrix determinánsának első sora szerinti kifejtése lenne. Keressük meg, melyek lehettek ezek a mátrixok, és valóban 0-e a determinánsuk. Kezdjük az első sorral.

Azt állítjuk, hogy az első egyenlet jobb oldala a következő mátrix első sora szerinti kifejtése:

$$X_1 = \begin{pmatrix} c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(Ennek a mátrixnak szerencsére valóban 0 a determinánsa, mert az első két sora megegyezik.)

Megmutatjuk, hogy az első sora szerinti kifejtése az első egyenlet jobb oldalával egyenlő.

Az látszik, hogy a c_1-hez tartozó aldetermináns maga a D.

Az is látszik, hogy az egyébként negatív előjelellel számítandó (sakktáblaszabály) a_{11}-hez tartozó aldetermináns a D_1.

Az egyébként pozitív előjelet kapó a_{12}-höz tartozó aldetermináns nem a D_2, de egyetlen oszlopcserével (1. és 2.) megkapjuk a D_2-t, vagyis a kifejtéshez $a_{12} \cdot (-1) \cdot D_2 = -a_{12} \cdot D_2$ elemként adódik.

A negatív előjellel ellátott a_{13}-hoz tartozó aldetermináns sem a D_3, mert az első oszlopban vannak a c_i-k, viszont ezzel az oszloppal már két oszlopot kell átugrani, vagyis az előjel kétszer vált (így nem változik), ezért a kifejtéskor $-a_{13} \cdot D_3$ szerepel.

És így tovább: a kifejtésben az a_{1j} előjele $(-1)^j$, a hozzá tartozó D_j-ben pedig a c_i-k oszlopának $j-1$ oszlopot kell átlépnie, így

$$(-1)^j \cdot a_{ij} \cdot (-1)^{j-1} \cdot D_j = (-1)^{2j-1} a_{ij} D_j = -a_{ij} D_j.$$

Ez azt jelenti, hogy az első egyenlet bal oldalán valóban az X_1 mátrix első sora szerinti kifejtés szerepel, és $\det(X_1)$ valóban 0.

Hasonlóan látható be minden sorról, hogy az az

$$X_i = \begin{pmatrix} c_i & a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsával (első sor szerint kifejtve) egyenlő, ami pedig valóban 0 minden i-re, mert a mátrixnak van két egyenlő sora: az első és az i-edik.

(ii) Ha $D \neq 0$, akkor létezik megoldás (ezt már láttuk, hiszen ellenőriztük, hogy a tétel szerinti x_i megoldás), és akkor az csakis a fenti alakú lehet (tehát egyértelmű).

Tegyük fel tehát, hogy $D \neq 0$, létezik megoldása az egyenletrendszernek (még nem tudjuk, milyen alakban), és ez legyen az $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Írjuk fel az alábbi mátrixokat:

$$X_i = \begin{pmatrix} \xi_i & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ c_1 & a_{11} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \ldots & \vdots & \vdots \\ c_n & a_{n1} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ennek a mátrixnak a determinánsa 0, mert valamilyen módon megoldottuk az egyenletet – például Gauss-eliminációval –, amelynek során kijött az $x_i = \xi_i$ egyenlet, azaz a $x_i = \xi_i$ egyenlet kifejezhető az egyenletek lineáris kombinációjaként. Ez azt jelenti, hogy az X_i mátrix első sora kifejezhető a többi lienáris kombinációjaként. Akkor viszont a determináns tulajdonságai miatt $\det(X_i)$ szükségszerűen nulla.

Másrészt fejtsük ki az $|X_i|$-t az első sora szerint. Nyilván legfeljebb két 0-tól különböző szorzat fog szerepelni, tehát:

$$0 = \xi_i \cdot D + (-1)^i \cdot \Delta_i.$$

(Az 1 szorzó előjele $i = 1$ esetén $-$, $i = 2$-re $+$ stb.) Itt a Δ_i mátrixból úgy kapjuk a D_i mátrixot, hogy az első oszlopát ($i - 1$ lépésben) az i-edik helyre léptetjük (D_1 esetén 0 csere, D_2 esetén 1 csere, D_3 esetén 2 csere stb.).

Eszerint

$$0 = \xi_i \cdot D + (-1)^i \cdot (-1)^{i-1} D_i = \xi_i - D_i.$$

Tehát $D_i = \xi_i D$.

Mivel pedig $D \neq 0$, így $\xi_i = \dfrac{D_i}{D}$, tehát csak a tétel szerint adott alakú lehet a megoldás.

Összefoglalva a bizonyítás lépéseit: Ha $D = 0$, akkor nincs egyértelmű megoldás, ha nincs egyértelmű megoldás, akkor $D = 0$, ha $D \neq 0$, akkor az $x_i = \dfrac{D_i}{D}$ megoldás, és ha $D \neq 0$, ξ_i megoldás, akkor az $\dfrac{D_i}{D}$ alakú. $\square$

13.5.1. Homogén lineáris egyenletrendszer

13.5.5. Definíció. *Ha egy lineáris egyenletrendszerben az eredmények mind nullák, akkor az egyenletrendszert* homogénnek *nevezzük.*

13.5.6. Tétel *A homogén lineáris egyenletrendszernek mindig létezik megoldása.*

Bizonyítás. A Gauss-elimináció során csak akkor nem kapunk megoldást, ha ellentmondásra jutunk. Ellentmondásra pedig úgy juthatunk, ha valamelyik lépésben egy egyenletre a bal oldalon nullát kapunk, ugyanakkor a jobb oldalon nem nulla áll. Ez azonban homogén lineáris egyenletrendszer esetén nem fordulhat elő, mert a jobb oldalon – tetszőleges, az eliminációban megengedett lépéseket végzünk is – mindenképpen nulla fog szerepelni. □

13.5.7. Megjegyzés. *Nem is olyan nehéz megoldást adni a homogén lineáris egyenletrendszerre, hiszen ha minden ismeretlen nulla, akkor az megoldás.*

13.5.8. Definíció. *A homogén lineáris egyenletrendszer azonosan nulla megoldását* triviális megoldásnak *nevezzük.*

Most, hogy kiderült, hogy a megoldásszámokra vonatkozó három lehetséges eset közül (nulla, egy, végtelen sok) az egyik (nulla) kizárt, felvetődik a kérdés, hogy akkor milyen esetben van egyetlen, illetve milyen esetben van végtelen sok megoldás.

13.5.9. Állítás *Ha a homogén lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixának determinánsa nem nulla, akkor egyértelmű a megoldás, ha nulla, akkor végtelen sok megoldás van.*

Bizonyítás. A Cramer-szabály alapján pontosan akkor van egyétrtelmű megoldás, ha az egyenletrendszer együtthatómátrixának determinánsa nem nulla.

Mivel nulla megoldás nem lehet, így $D = 0$ esetben csak végtelen sok megoldás lehet. □

13.5.10. Állítás *Ha a homogén lineáris egyenletrendszernek van nem triviális megoldása, akkor a megoldásvektor tetszőleges skalárszorosa is megoldás.*

Bizonyítás. Ha valamely $\mathbf{x}$ vektor megoldása a lineáris egyenletrendszernek, akkor az egyenletrendszer tetszőleges egyenletébe behelyettesítve 0-t kapunk. Ha a vektor valamely α skalárszorosát helyettesítjük be, akkor az eredmény is α-szoros lesz, ami ugyancsak nulla. Így $\alpha\mathbf{x}$ is megoldása az egyenletrendszernek. □

13.6. Mátrix inverze

Ahogyan a polinomoknál is szóbajött, hogy – ha már van szorzás – vajon van-e valamiféle polinomosztás, úgy a mátrixoknál is felvetődik a kérdés: lehet-e mátrix-szal osztani.

A polinomoknál evidens volt a válasz, mert a polinomok mértéke növekedett a szorzással, az osztással pedig csökkennie kellett volna, ám az nem lehetett akármilyen kicsi (azaz világos volt, hogy nem lehet polinommal osztani). Ehelyett a polinomoknál az oszthatóságot definiáltuk.

A mátrixok körében – bár lehet, hogy érdekes lenne – nem szokás oszthatóságról beszélni.

Ehelyett azonban van rá remény, hogy ha osztani nem is tudunk mátrix-szal, de esetleg tudunk mondani adott A, B mátrixokhoz olyan X vagy Y mátrixokat, amelyekre $AX = B$ vagy $YA = B$.

Vizsgáljuk először a legegyszerűbb eseteket. Legyen $A \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix, és legyen $B = I_n$ (vagyis az egységmátrix). (Ez a választás a valós számok körében annak felel meg, mintha nem $\frac{b}{a}$-t, hanem csak $\frac{1}{a}$-t akarnánk kiszámítani.) Ha ebben az esetben találunk olyan X mátrixot, amelyre $AX = I_n$, akkor $AXB = I_nB = B$ miatt az A-hoz is tudunk olyan mátrixot (a talált X-hez az XB), amelyet A-val balról szorozva B-t kapjuk.

bontsuk fel a feladatot részfeladatokra!

Először keressünk olyan $\mathbf{x}_1$ vektort, amellyel A-t szorozva az I_n első oszlopát kapjuk:

$$A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Egy egyetlen lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti. Alkalmazhatjuk a Gauss-eliminációt.

Ezután keressünk olyan $\mathbf{x}_2$ vektort, amellyel A-t jobbról szorozva I_n második oszlopát kapjuk: ez is egy lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti.

$$A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mégpedig – mivel ennek az egyenletrendszernek ugyanaz a mátrixa, mint az előzőé, nevezetesen A – ugyanazt a Gauss-eliminációt végezzük el (csak a jobb oldal lesz kétféle).

És így tovább: keressünk olyan $\mathbf{x}_n$ vektort, amellyel A-t jobbról szorozva I_n n-edik oszlopát kapjuk: ez is egy lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti.

$$A\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ha tehát a feladatot n részfeladatra bontjuk, akkor n lineáris egyenéetrendszert kapunk, azok mindegyikét meg tudjuk oldani.

Ez ugyan n darab lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti, de ne feledkezzünk meg róla, hogy az eredmények a Gauss-elimináció során csak „passzív résztvevők" (csak az a lényeg, hogy mi lesz belőlük), a valódi algoritmus az együtthatómátrixon történik: annak alapján hozunk döntéseket, végezzük el az algoritmust.

Ráadásul semmi akadálya annak, hogy egyszerre oldjuk meg mind az n egyenletrendszert a (12.1) alapján.

Nézzük meg egy példán. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$. A kiinduló állapot (3 egyenletrendszerről van szó):

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Az első lépésben kivonjuk az első sort a másodikból, és a harmadik sorból is.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Majd a második sor kétszeresét kivonjuk az első, ismét a kétszeresét a harmadik sorból:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}$$

Végül a harmadik sort hozzáadjuk az elsőhöz, a kétszeresét kivonjuk a másodikból:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}$$

Azt kaptuk, hogy a három oszlopvektor (egy mátrixba írva)

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(Az eredmény helyességének ellenőrzését az olvasóra bízzuk.)

Mindezek alapján azt is meg tudjuk mondani, hogy mely esetekben végezhető el az invertálás.

Mivel lineáris egyenletrenszert oldottunk meg, nyilván az a megoldahtóság feltétele, hogy a mátrix determinánsa ne legyen nulla.

13.6.1. Következmény. *Egy négyzetes mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem nulla, azaz ha reguláris.*

Belátható, hogy ha $AB = I$, akkor $BA = I$.

13.6.2. Definíció. *Legyen $A \in T^{n\times n}$. Azt a B mátrixot, amelyre teljesül, hogy $AB = BA = I_n$, az A* mátrix inverzének *nevezzük. Jele: A^{-1}.*

Egy, a mátrix inverzére vonatkozó további eredményt bizonyítás nélkül közlünk.

13.6.3. Tétel *Legyen $A \in T^{n\times n}$ invertálható. Az A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó aldeterminánsát jelölje D_{ij}. Ekkor*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}D_{11} & (-1)^{1+2}D_{12} & \dots & (-1)^{1+n}D_{1n} \\ (-1)^{2+1}D_{21} & (-1)^{2+2}D_{22} & \dots & (-1)^{2+n}D_{2n} \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ (-1)^{n+1}D_{n1} & (-1)^{n+2}D_{n2} & \dots & (-1)^{n+n}D_{nn} \end{bmatrix}^T,$$

azaz az alkalmasan (sakktáblaszabály szerint) előjelezett aldeterminánsokból alkotott mátrix transzponáltja osztva A determinánsával.

Bizonyítás. Jelöljük A_{ij}-vel a $(-1)^{i+j}D_{ij}$ determinánst, ekkor másképp is felírhatjuk a tétel állítását:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} tehát az A mátrix ji indexű eleméhez tartozó alkalmas előjellel ellátott aldeterminánsa.

Számítsuk ki a

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mátrixszorzatot. Pontosabban a szorzat ij és ii indexű elemét:

$$b_{ii} = A_{1i}a_{1i} + A_{2i}a_{2i} + A_{3i}a_{3i} + \dots$$

Ez éppen $|A|$, hiszen olyan, mintha kifejtettük volna A-t az i-edik oszlopa szerint.

$$b_{ij} = A_{1i}a_{1j} + A_{2i}a_{2j} + A_{3i}a_{3j} + \dots$$

ez is úgy néz ki, mint egy kifejtés, de ha jobban megnézzük, az i-edik oszlop szerint a j-edik oszlopban lévő elemekkel szorozzuk az aldeterminánsokat, vagyis olyan mátrix kifejtése ez, amelynek az i-edik oszlopa helyén ugyanazok az elemek állnak, mint a j-edik oszlop elemei. Ennek viszont két oszlopa egyenlő, a determinánsa ezért 0. (Ezt az összefüggést szokás *ferde kifejtési tétel* néven is említeni.)

Ebből következik, hogy a két mátrix szorzata az I mátrix $|A|$-szorosa, így ha ezt osztjuk $|A|$-val, I-t kapjuk. $\square$

Az is világos, hogy a 13.4.1. alapján $A \cdot X = I_n$ miatt $\det(A) \cdot \det(X) = \det(I_n) = 1$ nem teljesülhet semmilyen X-re, ha A determinánsa 0.

13.7. Lineáris egyenletrendszer megoldásának felírása mátrixokkal

A korábbiakban felírtuk a lineáris egyenletrendszer mátrixát (legyen most az egyszerűség kedvéért négyzetes a mátrix):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Felírtuk az eredményt, amit szintén mátrix alakba írhatunk, sőt, az ismeretleneket is felírhatjuk oszlopvektorként:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}$$

(A vektorokat a konvenció miatt és azért is írtuk vastag betűkkel, hogy formálisan jól meg tudjuk különböztetni őket a koordinátáitól.)

Ezzel a jelöléssel a lineáris egyenletrendszer egy újabb felírását kapjuk:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{c}.$$

És itt valóban mátrixszorzás szerepel.

Ha most az egyenletet balról megszorozzuk A inverzmátrixával (persze csak ha létezik), akkor azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{c}.$$

Ezzel a (reguláris) lineáris egyenletrendszer egy újabb megoldási módszerét kaptuk meg.

13.7.1. Tétel *Ha az*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{c}$$

lineáris egyenletrendszer reguláris, akkor a megoldása:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{c}$$

alakban kapható.

13.7.2. Megjegyzés. *Természetesen mivel a mátrixinvertálás maga is egy lineáris egyenletrendszer megoldása, annyira nem meglepő ez az eredmény.*

Feladatok

1. Igazoljuk, hogy a (3×3)-as mátrixok esetében valóban a 13.1.1. definíció szerint számítható a determináns!

2. Határozza meg, hogy az alábbi indexpár felsorolásokhoz milyen előjel tartozik a determinánsban!

   (a) 11, 22, 33
   (b) 11, 23, 32
   (c) 13, 22, 31
   (d) 13, 21, 32
   (e) 13, 24, 31, 42
   (f) 15, 24, 33, 42, 51

3. Számítsa ki az alábbi mátrixok determinánsát!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & bi \\ bi & a \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \operatorname{tg} x & -1 \\ 1 & -tgx \end{bmatrix}$$

4. Határozza meg, hogy az $n \times n$-es mátrix determinánsának kiszámításakor a mellékátlóban lévő $(1, n,\ 2, n-1,\ 3, n-2,\ \ldots,\ n-1, 2,\ n, 1$ indexű) elemek szorzata milyen előjelet kap!

5. Számítsa ki az alábbi mátrixok determinánsát!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & v \\ 1 & 2 & 1 & x \\ 1 & 1 & 2 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{bmatrix}$$

6. Ellenőrizze, hogy a mátrixinvertálás példában kiszámított mátrixot – akár jobbról, akár balról – megszorozva az A mátrix-szal, az I_3-at kapjuk!

7. Állapítsa meg, hogy invertálhatók-e a következő mátrixok! Ha igen, számítsa is ki az inverzüket!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

8. Keressen olyan 2×2-es mátrixot, amelynek a négyzete a nullmátrix!
9. Keressen olyan 2×2-es mátrixot, amelynek a négyzete az egységmátrix!
10. Állapítsa meg, hogy invertálhatók-e a következő mátrixok! Ha igen, számítsa is ki az inverzüket!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

11. Igazolja, hogy $AB - BA$ soha nem lehet egyenlő az egységmátrix-szal!
12. Ellenőrizze, hogy ha $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, akkor $A^2 - (a+d)A + (ad - bc) = \mathbf{0}_2$, azaz a 2×2-es nullmátrix.

14. Vektorterek

Korábban megismerkedtünk már néhány algebrai struktúrával. Minden esetben adott volt egy nem üres halmaz (szokás *tartóhalmaznak* nevezni), definiáltunk rajta művelete(ke)t, és a műveletek kielégítettek bizonyos tulajdonságokat.

Testnek neveztük azt az algebrai strukúrát (a tartóhalmazát jelölje T), amelyen két műveletet értelmeztünk, egy összeadást és egy szorzást.

Az összeadás kommutatív, asszociatív és invertálható (egységeleme a 0, az inverzművelet neve kivonás);

a szorzás kommutatív, asszociatív, és $T \setminus \{0\}$-n invertálható (egységeleme az 1, az inverzművelet neve osztás);

valamint a szorzás disztributív az összeadásra nézve.

Például test a racionális, a valós vagy a komplex számok a szokásos összeadással és szorzással, de test a számelméletben korábban megismert $(\mathbb{Z}_p, +_p)$ (prímrendű ciklikus csoport), ha hozzávesszük a modulo p szerinti szorzást: $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$.

Vektorokról korábban is tanultunk, megismertük sok tulajdonságukat, és alkalmaztuk is őket (például komplex számok szemléltetésére). A mátrixok körében is voltak olyanok, amelyeket vektoroknak neveztünk.

A következőkben a vektorokkal kapcsolatos ismereteinket fogjuk precíz algebrai formába önteni.

14.1. A vektortér fogalma, alapvető tulajdonságai

Tudjuk, hogy vektorok között elvégezhető az összeadás, a számmal való szorzás – de a „szám” is egy algebrai struktúra eleme.

A vektortérhez adott egy test és egy kommutatív csoport a saját műveleteikkel, továbbá összeköti a kettőt egy művelet: a számmal való szorzás. (Így volt ez a polinomok esetén is.)

14.1.1. Definíció. *Adott a* $(T, +, \cdot)$ *test (az elemei* skalárok, *rendszerint görög betűkkel fogjuk jelölni), a* T*-beli összeadás egységelemét jelölje* 0*, a szorzás egységelemét jelölje* 1*, valamint a* $(V, +)$ *kommutatív csoport (az elemei* vektorok, *vastag betűkkel fogjuk jelölni), a* V*-beli összeadás egységelemét pedig jelölje* $\mathbf{0}$.

Továbbá T *és* V *között definiálunk egy műveletet (mivel nem egy struktúrán belül hat, szokás* külső műveletnek *nevezni), amely a következő tulajdoságokkal rendelkezik*

1. *minden* $\alpha, \beta \in T$ *és* $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$ *esetén létezik* V*-ben az* $\alpha\mathbf{v}$
2. $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$ *(az egyik szorzátényezőre vonatkozó disztributivitásszerű tulajdonság)*
3. $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$ *(a másik szorzátényezőre vonatkozó disztributivitásszerű tulajdonság)*
4. $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$ *(egy asszociativitás-szerű tulajdonság)*
5. $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

Ekkor azt mondjuk, hogy a V vektorteret alkot a T test felett.

A V*-beli egységelem neve* nullvektor, *jelölése:* $\mathbf{0}$.

Az 5. tulajdonságra többek között azért van szükség, mert ha azt nem kötjük ki, akkor elképzelhető, hogy minden $\alpha\mathbf{u}$ szorzat a V nulla elemével egyenlő – ezt ki akarjuk zárni.

Példa. Példák vektortérre:

1. A valós síkbeli vektorok vektorteret alkotnak a valós számtest felett.

2. A valós, illetve komplex együtthatós polinomok vektorteret alkotnak a valós, illetve a komplex számtest felett. A komplex együtthatós polinomok még a valósok felett is vektorteret alkotnak. (Bármely komplex együtthatós polinomot egy valós számmal szorozva komplex együtthatós polinomot kapunk.) A valós együtthatós polinomok azonban nem alkotnak vektorteret a komplex számtest felett, hiszen valós együtthatós polinomot komplex számmal szorozva nem feltétlenül kapunk valós együtthatós polinomot.

3. A legfeljebb ötödfokú valós együtthatós polinomok vektorteret alkotnak a valós számtest felett.

4. A valós számsorozatok vektorteret alkotnak a valós számtest felett.

5. A valós számpárok, számhármasok, szám-n-esek vektorteret alkotnak a valós test felett. (A komplex számpárok stb. nyilván a komplex felett *is* vektortér.)

6. A komplex számok vektorteret alkotnak a valós számtest és a komplex számtest felett is.

7. A valós számok testet alkotnak a valós számtest felett. (A komplex felett azonban nem, hiszen valós számot szorozva komplex számmal nem feltétlenül kapunk valós számot.)

8. A véges, de adott hosszúságú vagy végtelen bináris (jel)sorozatok vektorteret alkotnak a kételemű $((\{0,1\}, +_2, \cdot_2)$, rendszerint F_2-vel jelölt) véges test felett.

A vektortér tulajdonságaiból következtethetünk néhány fontos összefüggésre:

14.1.2. Állítás *Legyen $(T, +, \cdot)$ test, $(V, +)$ vektortér T felett; $0 \in T$ a T-beli összeadás egységeleme, $\mathbf{0} \in V$, a V-beli összeadás egységeleme. Legyen $\mathbf{u} \in T$ tetszőleges vektor, $\alpha \in T$ tetszőleges skalár. Ekkor teljesülnek az alábbi összefüggések:*

1. $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$
2. $(-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$
3. $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
4. $\alpha \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ *akkor és csak akkor, ha* $\alpha = 0$ *vagy* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Bizonyítás. 1. $\mathbf{u} + 0 \cdot \mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{u} + 0 \cdot \mathbf{u} = (0+1) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$. Mindkét oldalhoz hozzáadva $-\mathbf{u}$-t, $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

2. $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{u} = (1 + (-1))\mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{u} + (-1) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} + (-1) \cdot \mathbf{u}$. Mindkét oldalhoz hozzáadva $-\mathbf{u}$-t: $-\mathbf{u} = (-1) \cdot \mathbf{u}$.

3. $\alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}) = \alpha \cdot (1 \cdot \mathbf{u} + (-1) \cdot \mathbf{u}) = \alpha \cdot (1 + (-1)) \cdot \mathbf{u} = 0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$

4. Az egyik irány az 1. és a 3. pontból következik. Visszafelé: ha $\alpha \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$, de $\alpha \neq 0$, akkor $\alpha \cdot \dfrac{\alpha+1}{\alpha} \cdot \mathbf{u}$ is $\mathbf{0}$, vagyis $(\alpha + 1) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$, ami a feltétel szerint $\alpha \cdot \mathbf{u}$-val is egyenlő; $(\alpha + 1)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}$-ból pedig ($-\alpha\mathbf{u}$ hozzáadásával) $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ következik. $\square$

A továbbiakban – hacsak nem jelezzük külön – vektortéren a $(V, +)$ $(T, +, \cdot)$ feletti vektorterét fogjuk érteni, az állításainkat ezekre fogjuk vonatkoztatni.

14.1.3. Megjegyzés. *Most, hogy tudjuk, mi az a vektortér, korábbi kijelentéseinket is kicsit precízebben meg tudnánk fogalmazni. Ezek közül egynek az esetében ezt most meg is tesszük.*

14.1.4. Definíció. *Legyenek* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *vektorok a* V*-ben,* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *skalárok* T*-ben. Az* $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n$ *vektort a* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *vektorok* lineáris kombinációjának *nevezzük.*

14.1.5. Megjegyzés. *Korábban azt állítottuk (ha nem is ezekkel a szavakkal), hogy ha A és B (megfelelő méretű, azaz összeszorozható) mátrixok, akkor az AB szorzat i-edik oszlopvektora az A oszlopvektorainak a B i-edik oszlopában szereplő skalárokkal vett lineáris kombinációja.*

Láthatjuk, hogy a vektorokkal képzett lineáris kombinációnál az sem kizárt, hogy két vektor ugyanaz (pl. A oszlopvektorai). Ezért ha ezekről a vektorokról beszélni akarunk, nem mondhatjuk, hogy halmaz.

Ehelyett:

14.1.6. Definíció. *Ha a vektortérből kiválasztunk valahány (nem feltétlenül különböző) vektort, ezt* vektorrendszernek *nevezzük.*

Ha tehát egy vektorrendszer lineáris kombinációjában minden együttható $\mathbf{0}$, akkor az összegvektor is $\mathbf{0}$. A $\mathbf{0}$ ilyen előállítását *triviális lineáris kombinációnak* nevezzük.

Felmerül a kérdés, hogy másképp kaphatunk-e $\mathbf{0}$-t lineáris kombinációként.

14.1.7. Definíció. *Ha egy vektorrendszer lineáris kombinációja csak triviális módon lehet* $\mathbf{0}$ *(azaz csak a triviális lineáris kombinációja állítja elő a nulla vektort), akkor a vektorrendszert* lineárisan függetlennek *nevezzük.*

(Történetileg úgy alakult, hogy fontos volt tudni, hogy egy vektorrendszerben szereplő vektorok „függetlenek-e” egymástól (gondoljunk az egyenletrendszer egyenleteire).)

14.1.8. Megjegyzés. *Tulajdonképpen intuitíve nem így képzelnénk a lineáris függetlenséget, hanem úgy, ahogyan az egyenleteknél:*

Akkor lineárisan független egy vektorrendszer, ha semelyik vektor nem állítható elő a többi lineáris kombinációjaként.

Szerencsénkre:

14.1.9. Állítás *A 14.1.7. és a 14.1.8. meghatározás ekvivalens.*

Bizonyítás. Ha egy vektorrendszer egy vektora előáll a többi lineáris kombinációjaként, például:

$$\mathbf{v}_n = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\mathbf{v}_{n-1},$$

akkor

$$\mathbf{0} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} + (-1)\cdot\mathbf{v}_n,$$

azaz nem triviális módon (hiszen van egy nem nulla együttható, a -1) előállítja a $\mathbf{0}$-t.

Ha pedig egy vektorrendszer nem triviális módon is előállítja a $\mathbf{0}$-t, azaz

$$\mathbf{0} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} + \alpha_n\mathbf{v}_n,$$

akkor az együtthatók között van nem nulla (például α_n), és így

$$-\alpha_n\mathbf{v}_n = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\mathbf{v}_{n-1},$$

amit a nem nulla $(-\alpha_n)$-nel osztva megkapjuk a $\mathbf{v}_n$ felírását a többi vektor lineáris kombinációjaként. □

Még egy – kevésbé szembeszökő – tulajdonság kimondható a lineárisan független vektorrendszerekre:

14.1.10. Állítás *A $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha minden olyan vektor, amely előállítható lineáris kombinációjukként, egyértelműen áll elő.*

Bizonyítás. Először is, ha kétféleképpen is előállna egy vektor, például $\mathbf{u}$, akkor azok egyenlők:

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} + \alpha_n\mathbf{v}_n = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \beta_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} + \beta_n\mathbf{v}_n.$$

Ezek különbsége $\mathbf{0}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = {} & \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} + \alpha_n\mathbf{v}_n - \\ & - (\beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \beta_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} + \beta_n\mathbf{v}_n) \\ & (\alpha_1-\beta_1)\mathbf{v}_1 + (\alpha_2-\beta_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (\alpha_{n-1}-\beta_{n-1})\mathbf{v}_{n-1} + (\alpha_n-\beta_n)\mathbf{v}_n.\end{aligned}$$

Ha most a $\mathbf{v}_i$-k függetlenek, akkor ez csak a triviális lineáris kombináció lehet, vagyis a két előállítás ugyanaz.

Ha viszont a vektorrendszer nem független, akkor kifejezhető a nulla vektor nem triviális módon is, például

$$\mathbf{0} = \gamma_1 \mathbf{v}_1 + \gamma_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \gamma_{n-1} \mathbf{v}_{n-1} + \gamma_n \mathbf{v}_n$$

és nem minden együttható 0, tehát $\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0}$, így a

$$\mathbf{u} = (\alpha_1 + \gamma_1)\mathbf{v}_1 + (\alpha_2 + \gamma_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (\alpha_{n-1} + \gamma_{n-1})\mathbf{v}_{n-1} + (\alpha_n + \gamma_n)\mathbf{v}_n.$$

kifejezés az $\mathbf{u}$ egy, az előzőtől különböző felírását adja. □

Az egyenletek esetében megneveztük (sőt, azt neveztük meg először – házihasználatú kifejezéssel), ha az egyenletek nem voltak függetlenek. Az ilyen egyenletet függőnek neveztük, ez azonban igencsak pontatlan, mert nem mondtuk meg, hogy mitől függ.

Fogalmazzuk meg, milyen az, amikor egy vektorrendszer nem független.

14.1.11. Definíció. *Ha egy vektorrendszernek van olyan nem triviális lineáris kombinációja, amely a* $\mathbf{0}$ *vektort adja, akkor a vektorrendszer* összefüggő.

14.1.12. Megjegyzés. *A lineáris függetlenség másik két (ekvivalens) meghatárázásának itt is megfelel egy-egy (ekvivalens) meghatározás:*

1. Egy vektorrendszer lineárisan összefüggő, ha van olyan vektora, amely előáll a többi lineáris kombinációjaként.

2. Egy vektorrendszer összefüggő, hogyha minden olyan vektort, amelyet előálltíthatunk a lineáris kombinációival, többféleképpen is elő tudunk állítani.

Bizonyítás. 1. Ha egy vektorrendszer lineárisan összefüggő, akkor a $\mathbf{0}$-t nem triviális módon állítja elő, vagyis van olyan vektor a felírásban, amelynek az együtthatója nem 0. Ha ez így van, akkor ezt a vektort ki lehet fejezni a többi lineáris kombinációjaként.

Másrészt, ha valamelyik vektora előáll a többi lineáris kombinációjaként, akkor a felírást átrendezve a $\mathbf{0}$-ra egy nem triviális lineáris kombinációt kapunk.

2. Ha egy vektor kétféle (különböző) módon is előáll egy vektorrendszer lineáris kombinációjaként, akkor a két felírás különbsége egyrész a nulla vektor, másrészt a vektorok egy nem triviális lineáris kombinációja. Ha egy vektorrendszer lineárisan összefüggő, akkor bármely előállított vektorhoz hozzáadva a nem triviális módon felírt $\mathbf{0}$-t, egy másik felírását kapjuk a vektornak. □

lineárisan független vektorrendszer	lineárisan összefüggő vektorrendszer
1. csak a triviális lineáris kombinációja állítja elő a **0**-t	1. nem csak a triviális lineáris kombinációja állítja elő a **0**-t
2. nincs olyan vektora, amely előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként	2. van olyan vektora, amely előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként
3. egyértelműen állít elő minden olyan vektort, amely előáll lineáris kombinációként	3. minden, lineáris kombinációként előállított vektort többféleképpen előállít

14.1. ábra. A lineárisan független és összefüggő vektorrendszerek főbb tulajdonságai és kapcsolata

A fenti tulajdonságokat egy táblázatban foglaltuk össze (14.1 ábra).

Látható, hogy a függetlenség és az összefüggés szoros kapcsolatban áll a vektorelőállítással. (Ennek történetileg az adja a jelentőségét, hogy több fizikai mennyiség is vektor jellegű, és az ilyenek jellemzéséhez, karakterizálásához, más vektorok előállításához fontos volt tudni, hogy mely vektorokra támaszkodhatunk mint „előállító” vektorok. Ezt, az „előállítást” generálásnak is szokás nevezni.) Most ezt a szemléletet készítjük elő.

Példa. 1. Összefüggő rendszert alkot például az egyetlen, nulla vektort tartalmazó vektorrendszer, hiszen a **0**-nak minden lineáris kombinációja 0, nem csak a 0-val képzett.

Egyébként egyetlen vektor másképp nem is lehet linárisan független, mert mint láttuk, $\alpha\mathbf{u}$ csak úgy lehet 0, ha $\alpha = 0$ vagy $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Ez azt is jelenti, hogy az egyetlen nem nulla vektorból álló vektorrendszer mindig lineárisan független.

2. Két vektor úgy lehet összefüggő, hogy valamelyik a másik skalárszorosa (hiszen akkor összefüggő egy vektorrendszer, ha az egyik vektor előáll a többi lináris kombinációjaként).

3. Három vektor már nagyon sokféleképpen lehet összefüggő. Ha a koordinátasíkban felveszünk három vektort, akkor biztosak lehetünk benne, hogy valamelyik felírható a másik kettő lineáris kombinációjaként – gondoljunk az erőfelbontásra.

14.1.13. Állítás *A V vektortérbeli $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorrendszer lineáris kombinációi által előállított (generált) vektorok maguk is vektorteret alkotnak, amely része a V-nek.*

Bizonyítás. Nyilván V-beli vektorok lesznek a lineáris kombinációval előállított vektorok. A test-tulajdonságok nem változnak, a V-nél szűkebb halmazon pedig minden V-re felírt műveleti tulajdonság érvényes marad.

Azt kell tehát csak megmutatnunk, hogy két előállított vektor összege és skalárszorosaik is előálló vektor.

Ez pedig abból következik, hogy adott vektorok lineáris kombinációinak összege és számszorosa is a vektorok lineáris kombinációja. □

14.1.14. Definíció. *Ha egy V vektortérben egy vektorrendszer előállít a lineáris kombinációival minden V-beli vektort, akkor* generátorrendszernek *nevezzük.*

14.1.15. Definíció. *A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorrendszer lineáris kombinációi által előállított vektorok összességét a vektorrendszer által* generált altérnek *nevezzük.*

14.1.16. Állítás *Egy vektortér egy részhalmaza pontosan akkor altér, ha zárt a vektorösszeadásra és zárt a skalárral való szorzásra.*

Bizonyítás. A vektortér tulajdonságok közül a testre vonatkozó tulajdonságok biztosan teljesülnek, a vektorok csoportjára a műveleti tulajdonságok (mivel a halmaz egy leszűkítéséről van szó) nem romolhatnak el – azaz biztosan teljesülnek. A külső művelet tulajdonságai sem változhatnak.

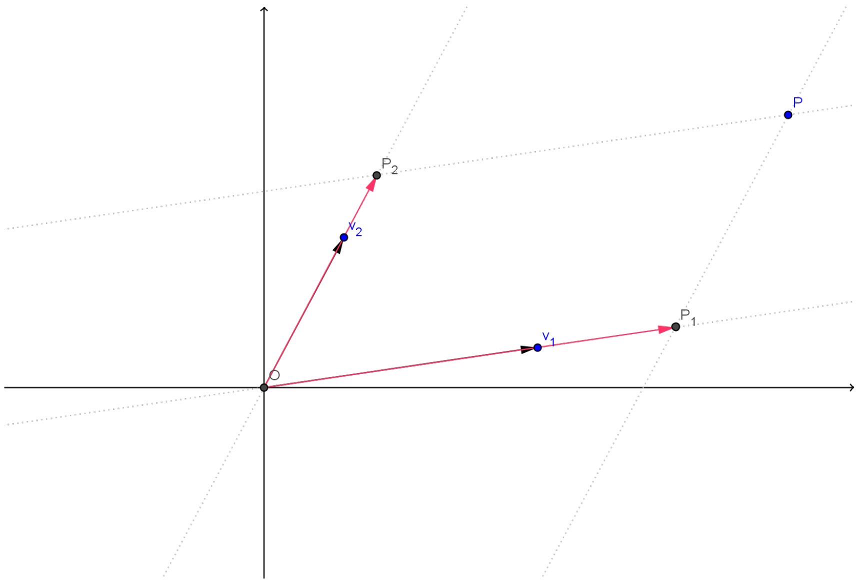
Így csak az a kérdés, hogy elvégezhetők-e a vektorokra kirótt műveletek: a skalárral való szorzás (a halmaz zárt-e a skalárral való szorzásra), és a vektorösszeadás (a halmaz zárt-e a vektorösszeadásra). □

Azt tapasztaljuk, hogy a vektortérben a lineárisan független vektorrendszer esetleg nem minden vektort generál, viszont a generátorrendszer esetleg nem egyértelműen állítja elő a vektorokat.

Szeretnénk olyan vektorrendszert alkotni, amely minden elemet egyértelműen előállít (vagyis egyrészt generátorrendszer, másrészt független).

14.1.17. Definíció. *Az olyan vektorrendszert, amely lineárisan független generátorrendszer,* bázisnak *nevezzük.*

Persze, fogalmunk sincs róla, hogy van-e ilyen.



14.2. ábra. $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ irányú összetevőkre bontjuk a P-be mutató vektort.

Példa. 1. Keressünk bázist a kétdimenziós valós fölötti koordinátasíkban – ezt ismerjük legjobban.

A fizikában megszoktuk, hogy bármely, a síkban ható erőt fel tudunk írni két erő eredőjeként. Szokás az $(1;0)$ és a $(0;1)$ vektorokat felvenni.

Kérdés, hogy függetlenek-e, illetve hogy a lineáris kombinációik minden síkvektort előállítaniak-e.

Az biztos, hogy függetlenek, mert ez két nem nulla vektor esetén azt jelenti, hogy az egyik nem skalárszorosa a másiknak. Ez pedig nyilvánvaló.

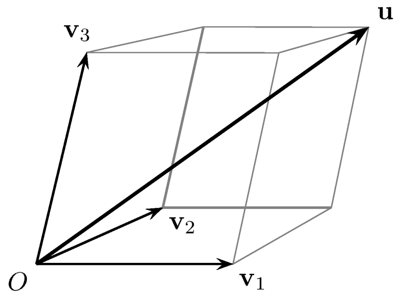
A sík tetszőleges $(x;y)$ koordinátájú pontja is felírható a megfelelő lineáris kombinációval, hiszen $x(1;0)+y(0;1)=(x;y)$. x és y éppen a felírandó pont helyvektorának két koordinátája.

2. Más bázist is kereshetünk a síkban.

Egy vektor ($\mathbf{v}_1$) nyilván nem elég, mert egy vektor skalárszorosai egy egyenesre illszekednek.

Ez azt jelenti, hogy fel kell vennünk még egy vektort. A második vektor nyilván nem eshet egy egyenesbe $\mathbf{v}_1$-gyel, hiszen akkor előállítaná $\mathbf{v}_1$.

Vegyünk fel tehát egy vektort, amely nem esik egy egyenesbe a $\mathbf{v}_1$-vel, legyen ez a $\mathbf{v}_2$ (14.2 ábra).



14.3. ábra. $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ irányú összetevőkre bontjuk az $\mathbf{u}$ vektort.

Ezek nyilván függetlenek, és a szokásos paralelogrammaszabállyal tetszőleges vektort fel tudunk bontani velük párhuzamos összetevőkre, amit a következő animáció segítségével kipróbálhatunk:

www.cs.elte.hu/~kfried/algebra2/sikbazis.html

Vajon véletlen-e, hogy a síkban nincs egyelemű bázis, viszont a kételemű független vektorok bázist alkotnak? És mi a helyzet térben?

3. A térben két vektor nem alkot bázist, mert – ahogy az imént láttuk – két független vektor síkot generál. Három független vektorösszetevőkre viszont minden vektor felbontható, ha olyan papralelepipedon átlójaként képzeljük el a felírandó vektort, amelyek élei párhuzamosak a felvett vektorokkal (14.3 ábra).

Nézzük általánosan a kérdést.

Vegyük a V vektorteret, és próbáljunk meg létrehozni benne egy bázist, azaz olyan H vektorrendszert, amely lineárisan független és generátorrendszer is. Ha V nem csak a $\mathbf{0}$ vektorból áll, akkor beválaszthatunk H-ba egy nem nulla $\mathbf{h}_1$ vektort, ami így nyilván független lesz.

Ha most a H (egyetlen vektorból álló) vektorrendszer generátorrendszer is, akkor készen vagyunk: van egy lineárisan független generátorrendszer.

Ha viszont H nem generátorrendszer, akkor van olyan vektor a V-ben, amely nem áll elő a H-beli vektor lineáris kombinációjaként. Ekkor beválasztunk egy ilyet ($\mathbf{h}_2$) a H vektorrendszerbe. Mivel ez, a másodikként választott vektor nem állt elő H-beli vektorok lineáris kombinációjaként, H továbbra is független vektorok lesznek a vektorrendszerben.

Ha H eddigi két vektora generálja V-t, akkor készen vagyunk, mert egy független vektorokból álló generátorrendszert hoztunk létre. Ha viszont nem generálja, akkor van olyan vektor a V-ben, amely nem áll elő H-beliek lineáris kombinációjaként. Egy ilyen, elő nem álló ($\mathbf{h}_3$) vektort hozzávéve H-hoz, ismét független vektorrendszert kapunk. (Ha ugyanis van olyan lineáris kombinációja a H-beli vektoroknak, amely $\mathbf{0}$, akkor $\mathbf{h}_3$ együtthatója csakis 0 lehet, különben kifejezhető lenne a többi vektorral, viszont a többi vektor lineárisan független volt, tehát csak a triviális lineáris kombinációjuk lehet $\mathbf{0}$.)

A H vektorrendszer vektoronkénti bővítését addig végezzük, amíg generátorrendszert nem kapunk.

(Mi most csak olyan vektorterekkel foglalkozunk, amelyekben van véges elemű bázis. A vektorterekre adott példák közül például sem a sorozatok, sem a polinomok nem ilyenek – sem a sorozatok, sem a polinomok vektorterével nem foglalkozunk.)

14.1.18. Definíció. *A V vektortér egy bázisának az elemszámát a V* dimenziójának *nevezzük.*

Persze azt még nem tudjuk, hogy jogosan tesszük-e ezt, ehhez szükséges lenne tudni, hogy minden bázisnak ugyanannyi az elemszáma.

14.1.19. Tétel (kicserélési tétel) *A V végesdimenziós vektortérben egy lineárisan független vektorrendszernek nem lehet több eleme, mint egy generátorrendszernek.*

Bizonyítás. (Első.) Legyen $F = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k)$ egy tetszőleges lineárisan független vektorrendszer, és $G = (\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n)$ egy tetszőleges generátorrendszer.

Az $\mathbf{f}_1$ vektor helyett egy G-beli vektort akarunk betenni az F rendszerbe úgy, hogy az így kapott vektorrendszer továbbra is független legyen.

> Ha $\mathbf{g}_j, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$ összefüggő, az azt jelenti, hogy *nem triviális módon* előállítja a $\mathbf{0}$-t. Ha ebben a felírásban a $\mathbf{g}_j$ együtthatója 0 lenne, akkor F (és így $\mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$) függetlensége miatt a többi együttható is az, vagyis *triviális lenne* a felírás.
>
> Ebből az következik, hogy $\mathbf{g}_j$ együtthatója nem lehet 0, tehát $\mathbf{g}_j$ felírható $\mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$ lineáris kombinációjaként.
>
> Ha pedig az $\mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$ lineáris kombinációival *minden* G-beli vektort elő tudnánk állítani, akkor $\mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$ is generátorrendszer lenne, mert a lineáris kombinációi lineáris kombinációival előállítana minden olyan elemet, amit a G – tehát mindent.
>
> Ekkor persze $\mathbf{f}_1$-et is, de ez már ellentmondás, mert akkor F összefüggő lenne.

Eszerint *van* olyan $\mathbf{g}_j$ vektor, amelyet nem állít elő az $\mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$ vektorrendszer. Így $\mathbf{g}_j, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$ lineárisan független.

Ezt a lépést nemcsak $\mathbf{f}_1$-re, hanem lépésenként minden vektorra meg tudjuk csinálni. Az kizárt, hogy kétszer ugyanazt a $\mathbf{g}_j$ vektort behozzuk, mert az azt jelentené, hogy összefüggő lett a vektorrendszer. (Márpedig vektort minden $\mathbf{f}_i$ helyére be tudunk illeszteni.)

Végül olyan vektorrendszer lesz az F helyén, amelyben csupa G-beli elemek lesznek. Ez egyszersmind azt is jelenti, hogy F-nek nem lehet több eleme, mert akkor nem minden F-beli elemet tudtunk volna lecserélni.

Azaz $k \leq n$. $\square$

Bizonyítás. (Második.)

Írjuk fel az F rendszer vektorait a G generátorrendszer lineáris kombinációjaként.

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1 &= \alpha_{11}\mathbf{g}_1 + \alpha_{12}\mathbf{g}_2 + \ldots + \alpha_{1n}\mathbf{g}_n \\
\mathbf{f}_2 &= \alpha_{21}\mathbf{g}_1 + \alpha_{22}\mathbf{g}_2 + \ldots + \alpha_{2n}\mathbf{g}_n \\
&\vdots \\
\mathbf{f}_k &= \alpha_{k1}\mathbf{g}_1 + \alpha_{k2}\mathbf{g}_2 + \ldots + \alpha_{kn}\mathbf{g}_n
\end{aligned}$$

Ez ugyan nem egyenletrendszer (az ismeretlenek nem számok, hanem vektorok), de van együtthatómátrixa

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots & \alpha_{kn} \end{bmatrix}, \tag{14.1}$$

és most úgyis erről akarunk következtetéseket levonni.

Mivel az F rendszer független, ezért a felírt egyenletek függetlenek (nincs olyan sora, amely a többi lineáris kombinációjaként előállna), így az együtthatómátrix sorai is függetlenek.

Gondoljunk most a (14.1) alatti mátrixra úgy, mint egy lineáris egyenletrendszer mátrixa. A Gauss-elimináció alapján tudjuk, hogy csak akkor lehet minden sora független, ha legfeljebb annyi az egyenlet, mint az ismeretlen, vagyis az oszlopok száma legfeljebb annyi, mint a sorok száma. Röviden ha $k \leq n$, és éppen ezt akartunk bizonyítani. $\square$

14.1.20. Következmény. *Eszerint egy vektortérben (amelyben van véges elemű bázis) bármely két bázisnak ugyanannyi eleme van.*

Bizonyítás. Ha B_1 és B_2 a két bázis, akkor mivel minden bázis egyszerre generátorrendszer és lineárisan független, ezért B_1 elemszáma nem lehet nagyobb B_2-énél, és B_2 elemszáma nem lehet nagyobb B_1-énél. Az elemszámaik így egyenlők. □

14.1.21. Következmény. *Egy n-dimenziós vektortérben legalább $n+1$ vektor nem lehet lineárisan független, legfeljebb $n-1$ elem nem lehet generátorrendszer.*

14.1.22. Megjegyzés. *Véges dimenziós vektrotér például a valós számtest felett a számmal való szorzás és a komponensenként vett összeadás műveletére: a sík (kétdimenziós), a tér (háromdimenziós), a rendezett számpárok (kétdimenziós) [emiatt például a komplex számok is], a rendezett számhármasok (háromdimenziós), a rendezett szám-n-esek stb.*

Végtelen dimenziós vektorterekkel is találkoztunk már. Ilyenek például a valós számsorozatok (sorozatok számszorosát, összegét értelmeztük például analízisben).

A példák közül a 8. (162) is véges dimenziós (a dimenziószám annyi, ahány eleme van a jelsorozatnak), de vehetünk végtelen jelsorozatot (mint egy sorozat), és akkor már az is végtelen dimenziós.

14.1.23. Tétel *Két T feletti, ugyanannyi (de véges) dimenziós vektortér izomorf.*

14.1.24. Megjegyzés. *Emlékeztetünk, hogy az izomorfia művelettartó bijektív leképezés, vagyis olyan egy-egy értelmű megfeleltetés, amelyben a megfelelő elemeken elvégzett művelet eredménye ugyanaz, mint az elemeken elvégzett műveletnek megfelelő elem. (1.1 ábra)*

Bizonyítás. Vegyünk fel mindkét vektortérben egy-egy bázist ($\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ és $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$), és feleltessük meg azokat egymásnak rögzített (amúgy tetszőleges) sorrendben. Mivel a báziselemszám ugyanannyi, a megfeleltetés egy-egyértelmű.

A bázis elemeivel minden vektor egyértelműen kifejezhető:

$$\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n,$$

a neki megfeleltetett elem (a másik vektortérben az ugyanolyan együtthatókkal képezett)

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{f}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{f}_n$$

lesz, és ezzel a művelettartást is biztosítjuk (vektorösszeg képe a vektorok képének összege, vektor skalárszorosának képe a kép skalárszorosa).

Vagyis ezzel megadtunk egy művelettartó bijekciót a két vektortér között. □

14.1.25. Definíció. *Egy rögzített bázisban megadott vektor felírásában a bázisvektorok együtthatói a vektor* koordinátái*.*

14.2. A vektortér és a lineáris egyenletrendszer kapcsolata

Ha egy komplex vagy valós együtthatós n egyenletből álló, n ismeretlenes lineáris egyenletrendszer

$$A\mathbf{x} = \mathbf{c}$$

alakú, akkor – mint korábban többször is megfogalmaztuk – azt keressük, hogy vannak-e olyan x_1, x_2, …, x_n együtthatók, amelyekre az A oszlopvektorainak ezen együtthatókkal képezett lineáris kombinációja éppen $\mathbf{c}$.

Ez viszont éppen azt jelenti, hogy azt akarjuk tudni, hogy az A oszlopainak generált alterében benne van-e a $\mathbf{c}$ vektor.

Tudjuk, hogy ha A oszlopainak vektorrendszere az egész vektorteret generálja – azaz bázis, akkor létezik egyértelmű megoldás, mert minden vektort egyértelműen állít elő, így $\mathbf{c}$-t is.

Ha A oszlopainak vektorrendszere nem bázis, akkor is lehet, hogy előállítja a $\mathbf{c}$-t (ha $\mathbf{c}$ benne van az oszlopvektorok által generált altérben), akkor viszont nem egyértelmű a megoldás, egészen pontosan végtelen sok megoldás van. (Hiszen A oszlopvektorai előállítják a $\mathbf{0}$ vektort – mégpedig végtelen sokféleképpen, mert bármelyik előállításnak bármelyik számszorosa is előállítás –, és ezt hozzáadva egy lineáris kombinációhoz egy újabb felírást kapunk.)

Abban az esetben, amikor A oszlopainak vektorrendszere nem bázis, az is lehet, hogy a $\mathbf{c}$ nincs benne az általuk generált altérben, és ekkor nincs megoldása a lineáris egyenletrendszernek.

Feladatok

1. Igazolja, hogy ha egy legalább kételemű lineárisan független vektorrendszerből elhagyunk egy elemet, akkor független vektorrendszert kapunk.

2. Igazolja, hogy ha egy vektortér generátorrendszeréhez hozzáveszünk egy elemet, akkor összefüggő rendszert kapunk.

3. Igazolja, hogy ha egy véges, de legalább kétdimenziós vektortérben

   (a) egy bázishoz hozzáveszünk egy elemet, akkor összefüggő vektorrendszert kapunk.

   (b) egy bázisból elhagyunk egy elemet, független vektorrendszert kapunk

4. Határozza meg, hogy az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}^4$ vektortérben adott vektorrendszerek hány dimenziós alteret generálnak! (Segítség: nyilván annyit, amennyi maximális független vektor kiválasztható közülük.)

   (a) $X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$

   (b) $X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $X_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

15. Homogén lineáris leképezések

Az imént beláttuk, hogy két véges, egyenlő dimenziójú, ugyanazon test fölötti vektortér között létesíthető izomorfizmus.

Általában is érdekes kérdés, hogy vektorterek között vagy egy vekortéren belül milyen műveletartó leképezések létezhetnek.

15.1. Homogén lineáris leképezés definíciója és tulajdonságai

15.1.1. Definíció. *Ha V és W két, T feletti vektortér, akkor a $\varphi\colon V \to W$ leképezést homogén lineáris leképezésnek nevezzük, ha φ műveletartó:*

$$\varphi(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \varphi(\mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{w}) \tag{15.1}$$

és

$$\varphi(\alpha\mathbf{v}) = \alpha\varphi(\mathbf{v}). \tag{15.2}$$

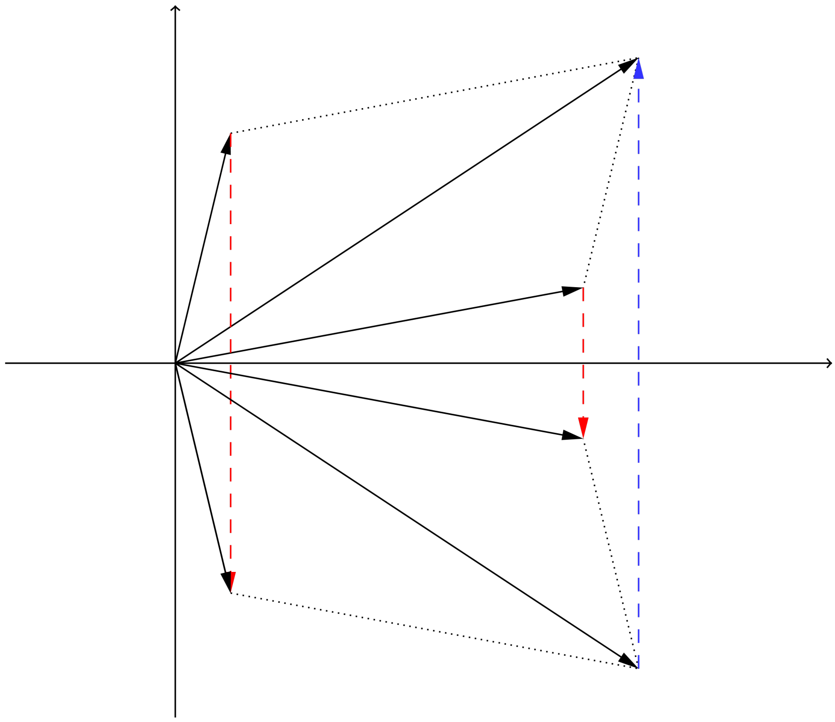
Példa. 1. Homogén lineáris leképezés a sík valós feletti vektorterén az origó körüli tetszőleges α szögű elforgatás. (A vektortér vonatkozásában a vektor fogalmat a geometriai helyvektor értelemben használjuk.)

Két vektor összegének α szögű elforgatottja ugyanaz, mint az α szögű elforgatottak összege;

egy vektor skalárszorosának elforgatottja ugyanaz, mint az elforgatott ugyanolyan skalárszorosa.

2. A sík mint valós feletti kétdimenziós vektortér homogén lineáris leképezése az origón átmenő tengelyre (például az x tengelyre vonatkozó) tükrözés is. Ezt szemlélteti az 15.1. ábra, és ugyanez kipróbálható a

www.cs.elte.hu/~kfried/algebra2/izompl1.html animáción is: vektorösszeg x tengelyre vonatkozó tükörképe a tükörképek összege.



15.1. ábra. Összeg tükörképe a tükörképek összege

Két vektor összegének tükörképe a tükörképeik összege, illetve vektor skalárszorosának tükörképe a tükörkép ugyanolyan skalárszorosa. Ezt a 15.2. ábra szemlélteti, a

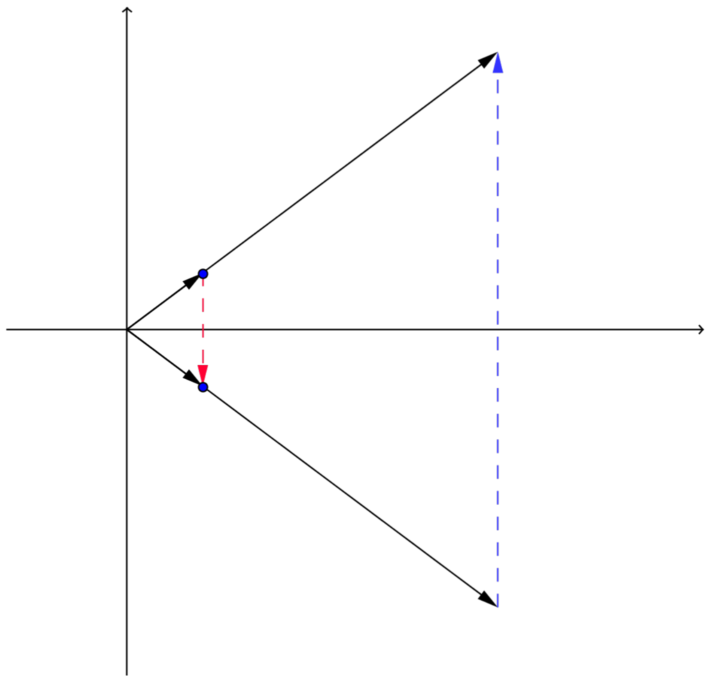
www.cs.elte.hu/~kfried/algebra2/izompl2.html

animáción pedig nyomon lehet követni: vektor skalárszorosának x tengelyre vonatkozó tükörképe a tükörkép ugyanolyan skalárszorosa

3. Az x tengelyre való merőleges vetítés is homogén lineáris leképezés: vektorösszeg vetülete a vetületeik összege, vektor skalárszorosának vetülete a vetület ugyanolyan skalárszorosa.

4. A nyírás is homogén lineáris leképezés. A nyírás során az $(x; y)$ koordinátájú ponthoz az $(x + y; y)$ koordinátájú pontot rendeljük. Olyan ez, mintha minél távolabb kerülve az x tengelytől (y irányban), annál jobban „eldőlnének” a vektorok, ahogyan a haj (vagy egymásra rétegezett papírok) nyírása során az összefogott szálak egyre távolabbra tolódnának el az olló nyomásának hatására. (A hozzárendelést a 15.3 ábra szemlélteti, a leképezés hatását a

www.cs.elte.hu/~kfried/algebra2/nyiras.html



15.2. ábra. Skalárszoros tükörképe a tükörkép ugyanolyan skalárszorosa

animáción próbálhatja ki.)

15.1.2. Megjegyzés. *A definícióból következik, hogy az egyik vektortér* $\mathbf{0}$ *vektorának a képe a másik vektortér* $\mathbf{0}$ *vektora. (Legyen például* $\alpha = 0$ (15.2)*-ben.)*

Erre a tulajdonságra utal a homogén szó.

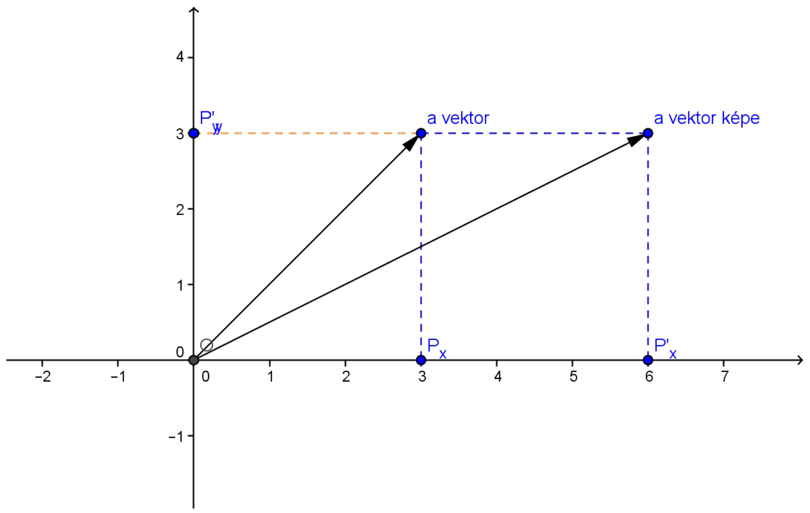
15.1.3. Definíció. *Ha* V *és* W *ugyanaz a vektortér, akkor homogén lineáris transzformációról beszélünk.*

A síknak egy egyenesére vonatkozó tükrözése például a sík homogén lineáris transzformációja.

15.1.4. Tétel (kiterjesztési tétel) *Ha* V *és* W *két* T *feletti vektortér,* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *bázis* V*-ben, és* $\varphi\colon V \to W$ *a báziselemekhez rendre hozzárendeli a* W *vektortér* $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ *elemeit, akkor pontosan egy olyan homogén lineáris leképezés van, amely ugyanezeket az elemeket rendeli az* $\mathbf{e}_i$ *báziselemekhez.*

Bizonyítás. Legyen az $\mathbf{u} \in V$ vektor (egyértelmű) előállítása az $\mathbf{e}_i$ bázisban:

$$\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n$$



15.3. ábra. Nyírás

Ekkor $\mathbf{u}$ φ szerinti képe – ha azt akarjuk, hogy homogén lineáris leképezés legyen – nem lehet más, mint

$$\alpha_1\mathbf{f}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{f}_n.$$

Vagyis ha ez valóban homogén lineáris leképezést határoz meg, akkor az csak ez lehet, vagyis egyértelmű.

Be kell még látnunk, hogy φ valóban homogén lineáris leképezés.

Legyen $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ két V-beli vektor, $\alpha \in T$. Írjuk fel $\mathbf{u}$-t és $\mathbf{v}$-t az $\mathbf{e}$ bázisban:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n\\ \mathbf{v} &= \beta_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \beta_n\mathbf{e}_n.\end{aligned}$$

Először igazoljuk, hogy $\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v})$.

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \varphi(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n + \beta_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \beta_n\mathbf{e}_n) =\\ &= \varphi((\alpha_1+\beta_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (\alpha_n+\beta_n)\mathbf{e}_n) =\\ &= (\alpha_1+\beta_1)\mathbf{f}_1 + \ldots + (\alpha_n+\beta_n)\mathbf{f}_n =\\ &= \alpha_1\mathbf{f}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{f}_n + \beta_1\mathbf{f}_1 + \ldots + \beta_n\mathbf{f}_n =\\ &= \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v}).\end{aligned}$$

Ezek szerint teljesül a (15.1) tulajdonság.

Most pedig igazoljuk, hogy $\varphi(\alpha\mathbf{u}) = \alpha\varphi(\mathbf{u})$. Mivel

$$\alpha(\mathbf{u}) = \alpha(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n) = (\alpha\alpha_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (\alpha\alpha_n)\mathbf{e}_n,$$

így

$$\varphi(\alpha(\mathbf{u})) = (\alpha\alpha_1)\mathbf{f}_1 + \ldots + (\alpha\alpha_n)\mathbf{f}_n = \alpha(\alpha_1\mathbf{f}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{f}_n) = \alpha(\varphi(\mathbf{u})),$$

tehát valóban fennáll a (15.2) tulajdonság. □

15.1.5. Definíció. *Azoknak a V-beli vektoroknak a halmaza, amelyek φ szerinti képe a W-beli* $\mathbf{0}$*, a φ* magterének *nevezzük. Jelölése:* $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Az, hogy ezt magtérnek nevezzük, azt sugallja, hogy ez a V vektortér egy altere. Azért ezt be kellene bizonyítani:

15.1.6. Állítás $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *a V altere.*

Bizonyítás. Elég azt bizonyítanunk, hogy ha $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, akkor $\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{0}$ – ez a (15.1) tulajdonságból közvetlenül következik –, valamint hogy $\varphi(\alpha\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, ami pedig a (15.2) tulajdonságból. □

15.1.7. Definíció. *Azokat a W-beli vektorokat, amelyek valamely V-beli vektor φ szerinti képeként állnak elő, a leképezés* képterének *nevezzük. Jele:* $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Most is be kell bizonyítanunk, hogy jogos a „tér" megnevezés:

15.1.8. Állítás $\mathrm{Im}(\varphi)$ *altér W-ben.*

Bizonyítás. Ha $\mathbf{u}'$ és $\mathbf{v}'$ két vektor az $\mathrm{Im}(\varphi)$-ben, akkor vannak olyan $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok, amelyek képe éppen az a két vektor. Az összegük képe (15.1) miatt pedig éppen a képeik összege, így az is eleme $\mathrm{Im}(\varphi)$-nek.

Ha pedig $\mathbf{u}$ képe $\mathbf{u}'$, akkor az $\alpha\mathbf{u}'$-t az $\alpha\mathbf{u}$ képeként kaphatjuk meg a (15.2) tulajdonság miatt. □

15.1.9. Tétel *Ha $\varphi\colon V \to W$ homogén lineáris leképezés, akkor a magtere és képtere dimenziójának összege a V dimenziójával egyenlő.*

Bizonyítás. Készítsünk először egy bázist $\mathrm{Ker}(\varphi)$-ben. Egészítsük ki V-beli bázissá.

Amit kapunk, egy V-beli bázis, amelynek a kezdőelemei (például az első k) $\mathrm{Ker}(\varphi)$-ből vannak:

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$$

Legyen az $\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ vektorok képe W-ben $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n-k}$.

Belátjuk, hogy a bázis további (k-nál nagyobb indexű) elemeinek képe bázist alkot az $\mathrm{Im}(\varphi)$-ben.

1. A képek lineárisan függetlenek: Tegyük fel ugyanis, hogy a képek egy nem triviális lineáris kombinációja előállítja a W-beli $\mathbf{0}$-t.

$$\alpha_1\varphi(\mathbf{e}_{k+1}) + \dots + \alpha_1\varphi(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}$$

Ekkor

$$\varphi(\alpha_1\mathbf{e}_{k+1} + \dots + \alpha_1\mathbf{e}_n) = \mathbf{0},$$

tehát $\alpha_1\mathbf{e}_{k+1} + \dots + \alpha_1\mathbf{e}_n$ benne van a $\mathrm{Ker}(\varphi)$-ben, így előállna a bázis első k elemének lineáris kombinációjaként. A kettő különbsége $\mathbf{0}$ lenne – nem triviális módon elő tudnánk állítani a V-beli nulla vektort a báziselemekkel. Ez azonban lehetetlen.

2. Minden $\mathrm{Im}(\varphi)$-beli elem előáll $\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ képei lineáris kombinációjaként. Legyen ugyanis $\mathbf{w}' \in \mathrm{Im}(\varphi)$, ekkor – mivel $\mathbf{w}'$ valamely elem képeként előáll, például $\mathbf{w} \in V$ képeként –, írjuk fel az $\mathbf{e}$ bázisban ezt a $\mathbf{w}$-t:

$$\gamma_1\mathbf{e}_1 + \dots + \gamma_k\mathbf{e}_k + \gamma_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \dots + \gamma_n\mathbf{e}_n$$

Ennek φ szerinti képe – mivel az első k elem képe $\mathbf{0}$, éppen

$$\gamma_{k+1}\varphi(\mathbf{e}_{k+1}) + \dots + \gamma_n\varphi(\mathbf{e}_n).$$

Eszerint $\mathbf{w}'$ valóban előáll a $(k+1)$-től n-ig terjedő indexű elemek képei lineáris kombinációjaként.

Vagyis tényleg igaz, hogy $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(V)$.

Azt is beláttuk, hogy az $\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ vektorok által generált altér ugyanannyi (véges) dimenziós, mint $\mathrm{Im}(\varphi)$, vagyis a két altér izomorf. $\square$

15.2. A homogén lineáris leképezés és a mátrixok kapcsolata

Láttuk, hogy ha ismerjük egy $V \to W$ homogén lineáris leképezés egy bázis vektoraihoz rendelt értékeit, akkor minden V-beli vektor képét meg tudjuk határozni.

Rendelje hozzá φ a bázisvektorokhoz rendre a következő W-beli, $\mathbf{f}$ bázisban felírt vektorokat:

$$\begin{bmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{12}\\ \vdots\\ \alpha_{1k}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\alpha_{21}\\ \alpha_{22}\\ \vdots\\ \alpha_{2k}\end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix}\alpha_{n1}\\ \alpha_{n2}\\ \vdots\\ \alpha_{nk}\end{bmatrix}$$

Ha most $\mathbf{v} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \beta_n\mathbf{e}_n$, akkor $\varphi(\mathbf{v}) = \beta_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \ldots + \beta_n\varphi(\mathbf{e}_n)$. Ez viszont nem más, mint a fenti oszlopvektorok β_i együtthatókkal vett lineáris kombinációja. Eszerint ha az oszlopvektorokat egy mátix oszlopainak tekintjük, akkor $\varphi(\mathbf{v})$ a $\mathbf{v}$ komponenseiből álló oszlopvektorral vett szorzazta.

Ez pedig azt jelenti, hogy ha a bázisvektorok képét mint oszlopvektorokat egy mátrixba írjuk, akkor tetszőleges vektor képét megkaphatjuk, ha megszorozzuk ezt a mátrixot a vektorral.

15.2.1. Definíció. *Ha $\varphi\colon V \to W$ homogén lineáris leképezés, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ bázis V-ben, akkor az $\mathbf{e}_i$ vektorokból álló mátrixot a φ leképezés $\mathbf{f}$ bázisban felírt márixának nevezzük.*

15.2.2. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy a felírás függ a bázisoktól.*

Az imént megfogalmazottakat foglalja össze a következő tétel:

15.2.3. Tétel *Ha $\varphi\colon V \to W$ homogén lineáris leképezés, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ bázis V-ben, akkor tetszőleges V-beli vektor képet megkaphatjuk, ha a leképezés mátrixával balról megszorozzuk a vektor mátrixát. (Minden mátrixfelírás ugyanabban a V-beli bázisban értendő.)*

A dolog megfordítva is működik, vagyis ha van egy mátrix, akkor gondolhatunk rá úgy, mint egy homogén lineáris leképezés mátrixa. Tudjuk ugyan, hogy ez csak a bázisvektorokon felvett értékeket tartalmazza, de – mint láttuk – ez egyértelműen meghatározza a leképezést.

Most felmerül a kérdés hogy ha a leképezések kapcsolatba hozhatók a mátrixokkal, kapcsolatba hozhatók a vektorterekkel, és a mátrixokat és a vektorokat már egyszer kapcsolatba hoztuk a lináris egyenletrendszerekkel, akkor hogyan köthetők a homogén lineáris leképezések a lineáris egyenletrendszerekhez.

15.3. A homogén lineáris leképezések kapcsolata a lineáris egyenletrendszerekkel

A kapcsolatot megtalálhatjuk a közös felírásban, a mátrix alakban. A lineáris egyenletrendszer $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ alakjából arra következtetünk, hogy keressük, hogy az a homogén lineáris leképezés, amelynek a mátrixa A, melyik vektort viszi $\mathbf{c}$-be. Meg kellene keresnünk tehát a leképezés inverzleképezését.

Ahogy korábban is tettük, megelégszünk egy kicsit kevesebbel.

Tételezzük fel, hogy W azonos V-vel, vagyis φ transzformáció. Ezzel garantáljuk, hogy a leképezés mátrixa négyzetes lesz.

Fogalmazzuk meg, hogy ekkor mi szerepel az **e**-**f** bázispárban.

A leképezés során az egyik bázis elemeit átvisszük egy másik bázis elemeibe. Ha ez a leképezés egy-egy értelmű, vagyis létezik inverzleképezése, akkor az történik, hogy a vektortér vektorait az egyik bázis helyett egy másik bázisban írjuk fel. Ez a leképezés úgynevezett *bázisáttérés* vagy *bázistranszformáció*.

Ennek a problémának a megoldása is végső soron egy lineáris egyenletrendszer megoldásához vezet (invertáljuk a mátrixot), ennek az eljárásnak a neve elemi bázistranszformáció. Jogosan használtuk tehát az egyenletrendszer megoldásakor az *elemi bázistranszformáció* elnevezést.

Ezt az eljárást itt most nem részletezzük.

15.4. Néhány konkrét transzformáció mátrixa

A síkban és a térben felvett szokásos Descartes koordináta-rendszer x pozitív féltengelye irányába mutató egységvektort jelölje $\mathbf{i}$, az y tengelyen hasonlóan felvett vektort $\mathbf{j}$, a z tengelyen pedig $\mathbf{k}$.

$\mathbf{i}$, és $\mathbf{j}$ az x-y sík, a három vektor együtt a tér bázisát alkotja. Ezt a bázist nevezzük sztenderd (szokásos) bázisnak.

Példa. Vizsgáljuk meg a sík x tengelyre vonatkozó tükrözésének mátrixát a sztenderd bázisban.

Az $\mathbf{i}$ vektor képe az $\mathbf{i}$ marad, a $\mathbf{j}$ képe a $-\mathbf{j}$. Eszerint a leképezés mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ellenőrizzük, hogy tetszőleges $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektornak mi lesz a képe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix},$$

ami valóban a vektor x tengelyre vonatkozó tükörképe.

Példa. Milyen síktranszformáció rendel az **i** vektorhoz **j**-t, és a **j**-hez **i**-t? Írjuk fel a mátrixát!

Mivel az **i** és a **j** helyet cserél, lehet, hogy ez egy olyan tengelyre vonatkozó tükrözés, amely a két vektor által bezárt szöget felezi (vagyis az $x = y$ egyenes).

A mátrixa $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Vizsgáljuk meg, hogy akkor mi lesz a tetszőleges $(x; y)$ vektor képe.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix},$$

azaz ez a transzformáció valóban felcseréli a koordinátákat, tehát az $x = y$ tengelyre vonatkozó tükrözés.

Példa. Állapítsuk meg, hogy a

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix-szal adott leképezés milyen síkbeli transzfomációhoz tartozik.

Mivel a tetszőleges (x, y) koordinátájú ponthoz a

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ 0 \end{bmatrix}$$

algebrai vektort rendeli, azaz beleképezi a vektorokat az x tengelybe, mégpedig a nullától olyan távolságra, amennyi a koordinátái összege.

Ilyen leképezést „név szerint” nem ismerünk, de mégis van, hiszen most adtuk meg.

Egyébként pedig egy nyírás és egy x tengelyre vonatkozó merőleges vetítés egymás utánja.

A nyírás mátrixa $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, az x tenglyre vetítésé $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. A két mátrix fordított irányban vett szorzata éppen az általunk felírt $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix.

Nem nehéz belátni, hogy ez nem is véletlen.

Ha a mátrixokat M-mel, illetve M_1, M_2-vel jelöljük, akkor – mivel a vektor képe egy mátrixszorzással kapható –, $M = M_2M_1$, és így $M\mathbf{v} = (M_2M_1)\mathbf{v} = M_2(M_1\mathbf{v})$.

15.5. Homogén lineáris leképezések szorzata, skalárszorosa, összege

15.5.1. Következmény. *Két leképezés szorzatának mátrixa a leképezések mátrixának szorzata. (Mégpedig úgy, hogy az előbb elvégzendő leképezés mátrixa szerepel jobb oldalon.)*

A fenti összefüggés alapján definálhatjuk két leképezés szorzatát.

Definíció. Homogén lineáris leképezéseknek definiálható az összege, skalárral vett szorzata: $(\varphi + \psi)\mathbf{v} = \varphi(\mathbf{v}) + \psi(\mathbf{v})$, $(\lambda\varphi)(\mathbf{v}) = \varphi(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\varphi(\mathbf{v}))$.

A T fölötti V vektorteret önmagába vivő homogén lineáris leképezései gyűrűt alkotnak.

Feladatok

1. Adja meg a sztenderd bázisban a sík következő leképezéseinek mátrixát!
   (a) Az x tengelyre vonatkozó tükrözés.
   (b) Az y tengelyre vonatkozó tükrözés.
   (c) Az $x = -y$ egyenesre mint tengelyre vonatkozó tükrözés.
   (d) Az origó körüli 30°-os elforgatás.
   (e) Az origó körüli 60°-os elforgatás.
   (f) Az x tengelyre való merőleges vetítés.
2. Adja meg a sztenderd bázisban a tér következő leképezéseinek mátrixát!
   (a) Az x-y síkra vonatkozó tükrözés.

(b) Az x-z síkra vonatkozó tükrözés.

(c) Az y-z síkra vonatkozó tükrözés.

(d) Az x tengely körüli 90°-os (pozitív irányú) elforgatás.

(e) Az $x = y$ egyenletű síkra vonatkozó tükrözés.

(f) Az y-z síkra való merőleges vetítés.

(g) Az y tengelyre való merőleges vetítés.

3. Az alábbiakban megadjuk a $\mathbb{R}$ feletti sík egy-egy transzformációjának sztenderd bázisában felírt a mátrixát! Határozza meg, hogy mi a leképezés szerinti képe egy tetszőleges $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektornak.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

4. Az alábbiakban megadjuk a $\mathbb{R}$ feletti tér egy-egy transzformációjának sztenderd bázisában felírt a mátrixát! Határozza meg, hogy mi a leképezés szerinti képe egy tetszőleges $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ vektornak.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Írja fel a sík origó körüli 90°-kal történő elforgatásának mátrixát, emelje négyzetre. Melyik síkbeli transzformáció mátrixát kapta?

6. Írja fel a síknak az $x = y$ egyenesre mint tengelyre történő tükrözés, valamint az y tengelyre vonatkozó tükrőzés mátrixát. Szorozza össze a két mátrixot mindkét irányból. Melyik síkbeli transzformáció mátrixát kapta a két esetben?

7. Jelölje A a sík az y tengelyre vonatkozó merőleges vetítésének mátrixát, B pedig az origó körüli 90°-kal történő elforgatásának mátrixát Szorozza A-t balról B-vel, majd a kapott szorzatot ismét balról A-val. (ABA)

   Melyik síkbeli transzformáció mátrixát kapta?

   Mi történik, ha BAB sorrendben végzi el a szorzást?

8. Határozza meg az előző feladatokban szereplő összes homogén lineáris leképezés magterét, képterét, valamint ezek dimenzióját.

16. A könyvhöz kapcsolódó programok

1. www.cs.elte.hu/~kfried/algebra2/MultiplyScalar.jar
Mátrix skalárral való szorzása (3×3-as mátrix)

2. www.cs.elte.hu/~kfried/algebra2/MatrixAddition.jar
Mátrixösszeadás (3×3-as mátrixok)

3. www.cs.elte.hu/~kfried/algebra2/MatrixMultiplication
Mátrixszorzás (3×3-as mátrixok)

4. www.cs.elte.hu/~kfried/algebra2/MatrixBiMul.jar
Mátrixszorzás (különböző méretű mátrixok: 3×2-es és 2×3-as)

5. www.cs.elte.hu/~kfried/algebra2/MatrixTranspose.jar
Mátrixtranszponálás (3×3-as mátrix)

6. www.cs.elte.hu/~kfried/algebra2/MatrixDeterminant.jar
Mátrix determinánsa (3×3-as mátrix)

7. www.cs.elte.hu/~kfried/algebra2/MatrixInvert.jar
Mátrix-inverz (3×3-as mátrix)

8. www.cs.elte.hu/~kfried/algebra2/Equations.jar
Egyenletrendszer-megoldás (3×3-as mátrixú)

17. A könyvhöz tartozó tesztkérdések

1. Hány nem komplex szám szerepel az alábbiak között? $1+i$, i, 1, 0, $-1+2i$
   (a) 0
   (b) 1
   (c) 2
   (d) 3
2. Mit nem értelmeztünk a komplex számok körében?
   (a) Az összeadást.
   (b) A szorzást.
   (c) A négyzetgyökvonást.
   (d) A rendezést.
3. Milyen feltétellel lehet egy nem valós komplex szám és egy valós szám összege valós?
   (a) Semmilyen körülmények között sem lehet valós.
   (b) Ha az egyik a 0.
   (c) Csak ha az egyik a másik ellentettje.
   (d) Ha az egyik a másik reciproka.
4. Milyen feltétellel lehet egy nem valós komplex szám és egy valós szám szorzata valós?
   (a) Ha az egyik az 1.

(b) Csak ha az egyik a másik ellentettje.
(c) Ha az egyik a másik reciproka.
(d) Ha az egyik a 0.

5. Lehet-e két komplex szám összege valós?

   (a) Nem, mert komplex számok összege komplex.
   (b) Ha egyik sem 0.
   (c) Csak ha az egyik a másik ellentettje.
   (d) Nagyon sok esetben lehet.

6. Lehet-e két komplex szám szorzata valós?

   (a) Nem, mert komplex számok szorzata komplex.
   (b) Csak ha az egyik az 1.
   (c) Csak ha az egyik a másik ellentettje.
   (d) Nagyon sok esetben lehet.

7. Az alábbiak közül melyik $1 + i$ négyzete?

   (a) $2i$
   (b) $2 + 2i$
   (c) $2 - 2i$
   (d) $-2 - 2i$

8. Van-e olyan komplex szám, amely önmagával vett szorzata (azaz a négyzete) -5?

   (a) Nem, mert negatív szám nem lehet semminek sem a négyzete.
   (b) Igen, mert minden valós számnak van valós négyzetgyöke, és akkor az komplex.
   (c) Igen, mert minden komplex szám valamely komplex számnak és annak ellentettjének is a négyzete.
   (d) Nem, mert nincs olyan a és b, amelyre $(a + b \cdot i)^2$ egyenlő lenne (-5)-tel.

9. Egy komplex szám négyzetgyöke $1 - 2i$. Melyik a másik négyzetgyöke?

(a) $-1-2i$

(b) $-1+2i$

(c) nincs ilyen

(d) $1+2i$

10. Az alábbiak közül melyik a $-5-12i$ négyzetgyöke?

    (a) Nincs négyzetgyöke, mert negatív.

    (b) $2+3i$

    (c) $-3+2i$

    (d) $2-3i$

11. Melyik nagyobb i vagy $-2i$?

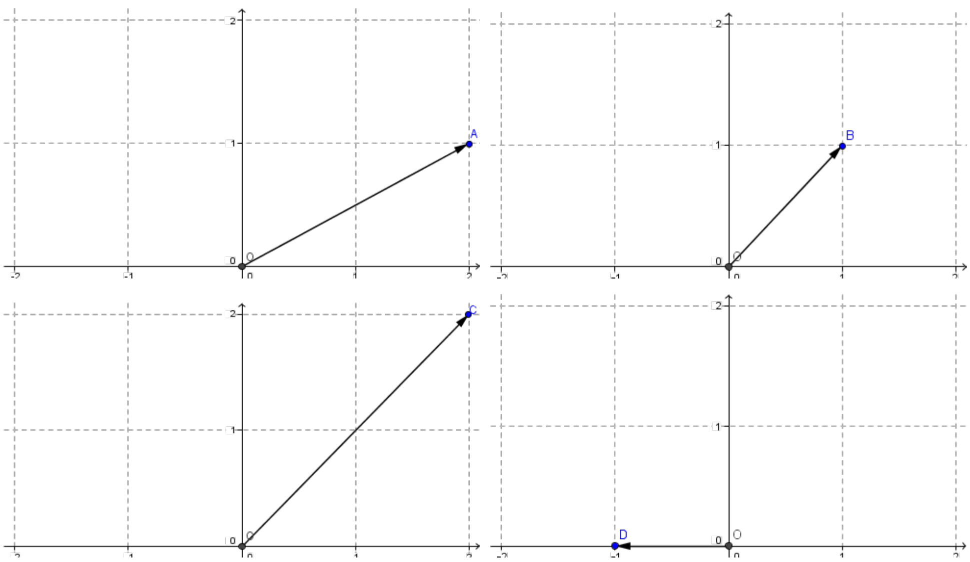
    (a) $-2i$

    (b) i

    (c) egyenlők

    (d) nem összehasonlíthatók

12. Állítsa abszolút értékeik szerint csökkenvő sorrendbe a négy szemléltetett (A, B, C, D) komplex számot!



    (a) $A > B > C = D$

(b) $D > A > B > C$
(c) $D > B > A > C$
(d) $D > B > C > A$

13. Állítsa az előző számok legkisebb nemnegatív argumentumait növekvő sorrendbe! Hogyan következnek egymás után?

(a) $\mathrm{arc}(D) < \mathrm{arc}(A) < \mathrm{arc}(B) < \mathrm{arc}(C)$
(b) $\mathrm{arc}(A) < \mathrm{arc}(B) < \mathrm{arc}(C) < \mathrm{arc}(D)$
(c) $\mathrm{arc}(A) < \mathrm{arc}(C) = \mathrm{arc}(B) < \mathrm{arc}(D)$
(d) $\mathrm{arc}(A) < \mathrm{arc}(C) < \mathrm{arc}(B) < \mathrm{arc}(D)$

14. Milyen geometriai alakzatot határoznak meg azok a komplex számok, amelyek abszolút értéke legfeljebb 2?

(a) zárt félegyenes
(b) egyenes
(c) zárt félsík
(d) zárt körlap

15. Milyen geometriai alakzatot határoznak meg azok a komplex számok, amelyek arkusza $\frac{\pi}{3}$?

(a) zárt félegyenes
(b) egyenes
(c) zárt félsík
(d) zárt körlap

16. Milyen geometriai alakzatot határoznak meg azok a komplex számok, amelyek abszolút értéke π?

(a) zárt félegyenes
(b) egyenes
(c) zárt félsík
(d) körvonal

17. Melyik komplex szám trigonometrikus alakja a $2 \cdot \left(\sin\frac{\pi}{3} - i\cos\frac{\pi}{3}\right)$?

(a) $1+\sqrt{3}i$
(b) $\sqrt{3}+i$
(c) $1-\sqrt{3}i$
(d) $\sqrt{3}-i$

18. Az alábbiak közül melyik komplex szám algebrai alakja $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$?

(a) $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$
(b) $\sin\frac{\pi}{4}+i\cos\frac{\pi}{4}$
(c) $\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}$
(d) $\sin\frac{\pi}{4}-i\cos\frac{\pi}{4}$

19. Mennyi $\sqrt{\frac{1+i}{1-i}}$?

(a) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i$
(b) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(i+1)$
(c) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(i-1)$
(d) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(-i)$

20. Az alábbiak közül melyik polinomnak van pontosan egy gyöke a komplex számhalmazon?

(a) $x-2$
(b) x^2+2
(c) x^3-2
(d) x^3-1

21. Melyik polinom osztója az alábbiak közül az x^2+2x+2 polinomnak?

(a) Nincs osztója.

(b) $x - i$

(c) $x - 1 + i$

(d) $x + 1 - i$

22. Hányadfokú nem lehet egy hatodfokú és egy negyedfokú polinom legnagyobb közös osztója?

    (a) ötödfokú

    (b) negyedfokú

    (c) harmadfokú

    (d) elsőfokú

23. A -2, -1, 0 és 1 konstansok közül melyiket írhatjuk az $x^2 + x + a$ polinomban a helyére úgy, hogy az egészek felett felbontható polinomot kapjunk?

    (a) -2 és -1

    (b) -1 és 0

    (c) 0 és -2

    (d) 1 és -1

24. Hányadfokú nem lehet két másodfokú polinom összege?

    (a) 2-nél magasabb fokú

    (b) Másodfokú

    (c) Elsőfokú

    (d) Nulladfokú

25. Hányadfokú lehet két elsőfokú polinom szorzata?

    (a) 2-nél magasabb fokú

    (b) Másodfokú

    (c) Elsőfokú

    (d) Nulladfokú

26. Mennyi a harmadfokú tag együtthatója az $x^3 + x^2 + x + 1$ és az $5x + 1$ polinomok szorzatpolinomjában?

(a) 5
(b) 3
(c) 6
(d) 0

27. Mennyi a tagok maximális száma, ha összeszorzunk egy harmadfokú és egy negyedfokú polinomot?

    (a) 13
    (b) 12
    (c) 7
    (d) 8

28. Az alábbiak közül melyik szükséges feltétele annak, hogy két polinom szorzata 0 legyen?

    (a) Mindkettő a nulla polinom legyen.
    (b) Azonos legyen a fokszámuk.
    (c) Az egyik a nulla polinom legyen.
    (d) Az egyik osztója legyen a másiknak.

29. Az alábbiak közül melyikről tudható, hogy nem osztója 20-adfokú polinomnak?

    (a) $x^2 + x + 1$
    (b) $x - 1$
    (c) $x^5 + 1$
    (d) $x^3 - x^2 + x - 1$

30. Az alábbiak közül melyik polinom racionálisok feletti irreducibilitása állapítható meg a Schönemann–Eisenstein kritérium alapján?

    (a) $x^9 + 2x^3 + 4$
    (b) $2x^8 + 2x^4 + 4$
    (c) $4x^6 + 2x^5 + 2$
    (d) $x^7 + 2x^6 + 2$

31. Az alábbiak közül melyik racionális szám jöhet szóba az $4x^4-3x^3-2x^2+1$ polinom gyökeként?

(a) 4

(b) -2

(c) 2

(d) $-\dfrac{1}{4}$

32. Mi lesz a törtszorzója a $\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{5}$ polinomnak megfeleltetett primitív polinomnak?

(a) $\dfrac{1}{120}$

(b) $\dfrac{1}{60}$

(c) $\dfrac{3}{20}$

(d) $\dfrac{1}{20}$

33. Ha a $\dfrac{24}{5}x^3+\dfrac{12}{10}x^2-\dfrac{8}{3}x+\dfrac{4}{5}$ polinomot felírjuk egy racionális szám és egy primitív polinom szorzataként, akkor az alábbiak közül melyik lesz a primitív polinomban a legmagasabb fokú tag?

(a) $24x^3$

(b) $36x^3$

(c) $72x^3$

(d) $96x^3$

34. Ha a $\dfrac{24}{5}x^3+\dfrac{12}{10}x^2-\dfrac{8}{3}x+\dfrac{4}{5}$ polinomot felírjuk egy racionális szám és egy primitív polinom szorzataként, akkor az alábbiak közül melyik lesz a primitív polinomban az elsőfokú tag?

(a) $20x$

(b) $40x$

(c) $8x$

(d) az előzőek egyike sem.

35. Az $\left.\begin{array}{rcl} 3x + 6y &=& 2 \\ x - 2y &=& 5 \end{array}\right\}$ egyenletrendszer megoldásszáma

(a) 0

(b) 1

(c) végtelen sok.

(d) nem határozható meg.

36. Egy n egyenletből álló, n ismeretlenes lineáris egyenletrendszernek

(a) mindig van egy egyértelműen meghatározott megoldása.

(b) mindig n megoldása van.

(c) legfeljebb n megoldása van.

(d) 0, 1 vagy végtelen sok megoldása lehet.

37. Ha A és B két 2×2-es mátrix, akkor az $A+B$ és a $B+A$ összegmátrixok

(a) soha nem egyenlők.

(b) mindig egyenlők.

(c) lehetnek egyenlők.

(d) különböző méretű mátrixok.

38. Ha A és B két 2×2-es mátrix, akkor az AB és a BA szorzatmátrixok...

(a) soha nem egyenlők.

(b) mindig egyenlők.

(c) lehetnek egyenlők.

(d) különböző méretű mátrixok.

39. Csak akkor lehet az A és a B mátrixokat összeadni és összeszorozni is, ha

(a) ugyanolyan a méretük.

(b) A sorszáma megegyezik B oszlopszámával.

(c) A oszlopszáma megegyezik B sorszámával.

(d) ugyanolyan méretű négyzetes mátrixok.

40. Ha A és B olyan mátrixok, hogy létezik az AB szorzatmátrix, akkor $(AB)^T \ldots$

    (a) egyenlő $A^T \cdot B^T$-tal.

    (b) egyenlő $(BA)^T$-tal.

    (c) egyenlő $B^T \cdot A^T$-tal.

    (d) nem feltétlenül létezik.

41. Egy 4×4-es mátrix determinánsának kiszámításához kiszámítandó szorzatok száma

    (a) 4

    (b) 16

    (c) 24

    (d) 256

42. A 4×4-es mátrix determinánsának kiszámításakor az alábbi szorzatok közül melyik kap negatív előjelet?

    (a) $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$

    (b) $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$

    (c) $a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$

    (d) $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

43. Ha egy 3×3-as mátrixot megszorzok k-val, akkor a kapott mátrix determinánsa

    (a) az eredeti mátrix determinánsának k^3-szöröse lesz.

    (b) az eredeti mátrix determinánsának $3k$-szorosa lesz.

    (c) az eredeti mátrix determinánsának $k!$-szorosa lesz.

    (d) az eredeti mátrix determinánsának k-szorosa lesz.

44. Melyik állítás nem igaz az alábbiak közül?

    (a) Bármely két 2-dimenziós vektortér izomorf.

    (b) Ha két vektortér izomorf, akkor egyenlő a dimenziójuk.

    (c) Ha egy vektortérben van kételemű bázis, akkor az a vektortér kétdimenziós.

(d) Ha egy valós feletti vektortérnek van kételemű bázisa, akkor az a vektortér izomorf a szokásos (euklideszi) síkkal.

45. Melyik állítás nem igaz az alábbiak közül?

   (a) Ha egy vektorrendszer összefüggő, akkor lehet, hogy eleme a nullvektor.
   (b) Ha egy vektorrendszernek eleme a nullvektor, akkor az összefüggő vektorrendszer.
   (c) Egy bázisnak nem lehet eleme a nullvektor.
   (d) Egy generátorrendszernek nem lehet eleme a nullvektor.

46. Melyik nem igaz az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszerre?

   (a) Ha A oszlopai által generált altérnek eleme a $\mathbf{b}$, akkor az egyenletrendszer megoldható.
   (b) Ha A nem invertálható, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.
   (c) Ha A reguláris, akkor egyetlen megoldása van.
   (d) Gauss-eliminációval meghatározható a megoldásai száma.

47. A sík O körüli $-\dfrac{\pi}{2}$ szögű elforgatásának mátrixa a szokásos $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ bázisban

   (a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
   (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
   (c) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
   (d) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

48. A tér x tengely körüli π szögű elforgatásának mátrixa a szokásos $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázisban

   (a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

49. Az $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix melyik síkbeli transzformáció mátrixának felírása a szokásos $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ bázisban?

   (a) x tengely irányú nyírás.

   (b) y tengely irányú nyírás.

   (c) x tengelyre vonatkozó tükrözés.

   (d) y tengelyre vonatkozó tükrözés.

50. A $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ mátrix melyik térbeli transzformáció mátrixának felírása a szokásos $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázisban?

   (a) x tengely irányú (-2)-szeres nagyítás.

   (b) y tengely irányú (-2)-szeres nagyítás.

   (c) z tengely irányú (-2)-szeres nagyítás.

   (d) O középpontú (-2)-szeres nagyítás.

A tesztkérdések megoldása

1. (a) 2. (d) 3. (a) 4. (d) 5. (d) 6. (d) 7. (a) 8. (c) 9. (b) 10. (d)
11. (d) 12. (c) 13. (c) 14. (d) 15. (a) 16. (d) 17. (d) 18. (d) 19. (b) 20. (a)
21. (d) 22. (a) 23. (c) 24. (a) 25. (b) 26. (c) 27. (d) 28. (c) 29. (d) 30. (d)
31. (d) 32. (b) 33. (b) 34. (d) 35. (a) 36. (d) 37. (b) 38. (c) 39. (d) 40. (c)
41. (c) 42. (c) 43. (a) 44. (a) 45. (d) 46. (b) 47. (b) 48. (d) 49. (b) 50. (d)

Irodalomjegyzék

[1] Fried Ervin: Algebra I: Elemi és lineáris algebra, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2000

[2] Freud Róbert: Lineáris algebra, ELTE Eötvös Kiadó, 2007

[3] Rózsa Pál: Bevezetés a mátrixelméletbe, TypoTeX kiadó, 2009

[4] Szalay Mihály: Lineáris algebra előadás informatikus hallgatóknak

[5] Fagyejev–Szominszkij: Felsőfokú algebrai példatár, TypoTeX, 2000

Tárgymutató

Tartalomjegyzék

Video az elemi bázistranszformációhoz: http://www.cs.elte.hu/~kfried/algebra2/ELBT.avi