Készült a TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0073 számú, „E-learning természettudományos tartalomfejlesztés az ELTE TTK-n” című projekt keretében. Konzorciumvezető: Eötvös Loránd Tudományegyetem, konzorciumi tagok: ELTE TTK Hallgatói Alapítvány, ITStudy Hungary Számítástechnikai Oktató- és Kutatóközpont Kft.

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

ÚJ SZÉCHENYI TERV

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Mincsovics M. E. Havasi Á. Haszpra T.

MATEMATIKAI PÉLDATÁR

Földtudományi szakosoknak

Tartalomjegyzék

Előszó

Ez a példatár az Eötvös Loránd Tudományegyetemen tanuló földtudományi és környezettan alapszakos hallgatók matematikaképzésének 3. és 4. félévéhez készült. Ebben a két félévben sajátítják el a hallgatók a többváltozós függvények analízisének alapjait: a metrikus tér és a normált tér fogalmát, a többváltozós függvények differenciálszámításának az alapfogalmait, a vonalintegrálhoz és a többszörös integrálokhoz kapcsolódó legfontosabb ismereteket, a komplex függvénytan elemeit, valamint a függvénysorozatok és függvénysorok alapjait. Erre a jegyzetre azért volt szükség, mert az említett szakokon tanuló hallgatóktól elvárt matematikatudás sokhelyütt meghaladja a Bolyai könyvsorozatban található feladatok nehézségét, de az alkalmazott matematikusétól természetesen elmarad. (Megjegyezzük, hogy ez az elvárás teljesen összhangban van azzal, hogy például van olyan meteorológus, akinek alig lesz szüksége matematikára, de van olyan is, aki gyakorlatilag alkalmazott matematikusként fog tevékenykedni a meteorológia területén!) Ilyen tudásszínvonalat megcélzó könyvvel pedig még nem találkoztunk. A példatárat úgy állítottuk össze, hogy pontosan kövesse a Matematika 3 és 4 tárgyak gyakorlatainak az utóbbi évek során kialakult anyagát. Ennek megfelelően a fejezetek száma megegyezik a két félév során tartott gyakorlati órák számával. Ahol szükséges, a fejezetek elején elméleti összefoglaló segíti a feladatok megoldásához szükséges ismeretek áttekintését. Ezután következnek a feladatok, az egyes gyakorlatokon belül is altémánként különbontva. Végül következnek a kidolgozott megoldások, eredmények és útmutatások. A feladatok több mint háromnegyed részéhez találunk valamit ezekben a részekben, és legtöbbször kidolgozott megoldást. Az egyes feladatoknál $\twoheadrightarrow$ jelöli, ha van hozzá kidolgozott megoldás, $\to$ jelöli, ha eredményt mellékeltünk, és a $\dashrightarrow$ szimbólum jelzi, ha útmutatást találhatunk hozzá. Mindkét fejezet közepén és végén egy-egy minta zárthelyit is talál az olvasó a zárthelyi dolgozatokra való önálló felkészüléshez. A példatár elektronikus formátuma lehetővé teszi, hogy a pirossal kiemelt utalásokra kattintva a hivatkozott szövegrészre ugorjunk. A szöveget, ahol csak lehetett, a megértést segítő ábrákkal ill. animációkkal illusztráltuk.

Természetesen ez a jegyzet sem csak saját feladatokat tartalmaz, hiszen a tárgyalt témák ősrégiek, számtalan könyv és feladatgyűjtemény foglalkozik velük, és mi is többől merítettünk. Metrikus és normált terekbe komolyabb betekintést ad [7]. Vektorterekről és lineáris leképezésekről (tisztán algebrai megközelítésben) bő ismereteket nyújt [3], jó bevezető [6], folytonos lineáris lekepezésekről pedig a már említett [7] könyvet ajánljuk. A differenciálszámítás részhez [2] nyújt jó alapokat, [7] pedig komolyabb elméleti hátteret, továbbá [1] nagyon precíz tárgyalást, [4] pedig nem csak ehhez a részhez kimeríthetetlen feladatgyűjtemény. Vonalintegrálokhoz és többszörös integrálokhoz [2] nyújt jó alapokat, [1]-től precíz tárgyalást kapunk. A komplex függvénytanba az elnyűhetetlen [9] ad komolyabb betekintést, de elsőre a gyakorlatibb és könnyebb [5]-t ajánljuk. Függvénysorozatokhoz, függvénysorokhoz, Fourier-sorokhoz pedig a [8] könyvet tudjuk ajánlani, mint „szórakoztató olvasmányt”. Bízunk benne, hogy a példatárat haszonnal forgatják majd a hallgatók és az őket felkészítő gyakorlatvezetők egyaránt. Végezetül köszönetet szeretnénk mondani mindenkinek, aki megjegyzéseivel segítette a jegyzet fejlődését, továbbá Horváth Róbertnek a stílusfile-ért (amit kicsit átalakítottunk).

Budapest, 2012.

A Szerzők

rész I

Matematika 3.

FEJEZET **1**

Metrikus tér

Kulcsszavak:

metrika, metrikus tér, környezet (gömb), belső pont, külső pont, határpont, nyílt halmaz, zárt halmaz, pontozott környezet, torlódási pont

1.1. Elméleti összefoglaló

Mindenki rendelkezik egy intuitív távolságfogalommal és ez a hétköznapokban többnyire jól is működik. A következőkben megmutatjuk, hogy lehetséges a távolság fogalmának definiálása és kezelése a matematika keretein belül is.

Ismeretes, hogy két valós szám távolságán a különbségük abszolút értékét értjük. De szeretnénk, ha nem csak számok, hanem tetszőleges (matematikailag definiálható) objektumok távolságát is tudnánk mérni. Arra törekszünk, hogy ez a fogalom rendelkezzen az intuitív távolságfogalom fontos tulajdonságaival (így nem lesz idegen) és elég általános is legyen ahhoz, hogy sok dologra lehessen használni (pl. függvények távolságának mérésére). Megjegyezzük, hogy az intuitív távolságfogalom is sokféle: nem mindegy, hogy légvonalban, vagy úton kell eljutnunk az egyik helyről a másikba és mérhetjük időben, nem csak méterben, sőt akár útiköltségben is!

Vizsgáljuk meg, hogy a valós számok esetén milyen természetes tulajdonságokkal rendelkezik a távolság fogalma! Észrevehetjük, hogy a távolság egy nemnegatív szám, amelyet két valós számhoz (azaz egy valós számpárhoz) hozzárendelünk. Két különböző szám távolsága pozitív, egy szám saját magától vett távolsága pedig nulla. Fontosnak gondoljuk továbbá, hogy egy a valós szám b valós számtól való távolsága ugyanakkora, mint a b szám a-tól való távolsága. Végül, három tetszőleges valós szám, a, b és c esetén az $|a-c|$ távolság nem lehet nagyobb, mint az $|a-b|$ és a $|b-c|$ távolságok összege. Ez alapján vezetjük be egy tetszőleges X halmazon a távolságfüggvény, más néven metrika fogalmát a következőképpen.

1.1. Definíció. Legyen X egy tetszőleges nem üres halmaz, d pedig egy $X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ függvény, amely rendelkezik a következő három tulajdonsággal:

- $d(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$
- $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in X$

- $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$ (háromszög-egyenlőtlenség).

Ekkor a d függvényt X-en értelmezett *metrikának*, a $d(x,y) \in \mathbb{R}_0^+$ számot az x elem y elemtől vett távolságának, az (X,d) rendezett párt pedig *metrikus tér*nek (rövidítve: MT) nevezzük.

Az $\mathbb{R}$ halmazon a $d(x,y) = |x-y|$ függvény valóban metrikát definiál, de nem ez az egyetlen lehetőség. Tetszőleges X halmazon a

$$d(x,y) = \begin{cases} 0\,, & \text{ha } x = y \\ 1\,, & \text{ha } x \neq y \end{cases}$$

képlet az ún. *diszkrét metrikát* definiálja. Ekkor (X,d)-t diszkrét metrikus térnek nevezzük.

Metrikus térben értelmezhetjük a környezet (gömb) fogalmát, később ennek segítségével tudjuk majd definiálni sorozatok konvergenciáját.

1.2. Definíció. Az (X,d) metrikus térben az $x_0 \in X$ elem $r > 0$ sugarú *környezet*én (vagy x_0 középpontú, r sugarú *gömb*ön) azon $x \in X$ elemek halmazát értjük, amelyekre $d(x_0,x) < r$. Jelölése: $K_r(x_0)$.

Minden metrikus térben értelmesek a környezeten alapuló (ún. topológiai) fogalmak is.

1.3. Definíció. Legyen (X,d) metrikus tér. Az $x \in X$ pont a $H \subset X$ halmaz

- *belső pont*ja, ha x-nek van olyan környezete, amely csak H-beli pontot tartalmaz. A H halmaz belső pontjainak a halmazát $\mathrm{int}H$ jelöli.
- *külső pont*ja, ha x-nek van olyan környezete, amely nem tartalmaz H-beli pontot. A H halmaz külső pontjainak a halmazát $\mathrm{ext}H$ jelöli.
- *határpont*ja, ha x minden környezetében van H-beli és nem H-beli pont is. A H halmaz határpontjainak a halmazát ∂H jelöli.

Ennek segítségével definiálhatjuk a zárt, illetve nyílt halmaz fogalmát.

1.4. Definíció. Legyen (X,d) metrikus tér. A $H \subset X$ halmaz

- *nyílt*, ha minden pontja belső pont;
- *zárt*, ha a komplementere ($H^C := X \setminus H$) nyílt halmaz.

Vegyük észre, hogy ezek nem egymást kizáró fogalmak, egy halmaz, ha nem zárt, az nem jelenti azt, hogy nyílt és viszont.

Bevezethetjük a pontozott környezet és a torlódási pont fogalmát is.

1.5. Definíció. Legyen (X, d) metrikus tér.

- Az $x_0 \in X$ elem $r > 0$ sugarú *(ki)pontozott környezet*én a $K_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ halmazt értjük.
- Az $x \in X$ pont a $H \subset X$ halmaz *torlódási pont*ja, ha x minden pontozott környezete tartalmaz H-beli pontot. A H halmaz torlódási pontjainak a halmazát H' jelöli.

Vegyük észre, hogy egy halmaz torlódási pontja nem feltétlenül eleme a halmaznak.

1.2. Feladatok

A, *metrika, MT*

1. Döntsük el, hogy a következő ρ függvények metrikát definiálnak-e $\mathbb{R}$-en! ⇢
   a, $\rho(x, y) = |x| + |y|$;
   b, $\rho(x, y) = |x - 2y|$;
   c, $\rho(x, y) = |xy|$;
   d, $\rho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$.
2. Lássuk be, hogy MT!
   a, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$; $(\mathbb{R}^n, d_k)$, $k = 1, 2, \infty$, ahol $d_k(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^k\right)^{\frac{1}{k}}$, illetve $d_\infty(x, y) = \max|x_i - y_i|$; ↠
   b, $(C\,[a, b]\,, d_\infty)$, ahol $C\,[a, b]$ az $[a, b]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények halmaza és $d_\infty(f, g) = \sup_{x\in[a,b]}|f(x) - g(x)|$;
   $(C\,[a, b]\,, d_\int)$, ahol $d_\int(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\ \mathrm{d}x$, $(a < b)$; ↠
   c, $\mathbb{R}$ ellátva a diszkrét metrikával.

B, *környezet (gömb)*

1. Ábrázoljuk az $(\mathbb{R}^2, d_k)$, $k = 1, 2, \infty$ MT-ekben a 0 középpontú 1 sugarú gömböket, vagyis $K_1(0)$-t.
2. Szemléltessük ábrával, hogy milyen függvények tartoznak bele az azonosan 0, illetve az $f(x) = x$ függvények 1 sugarú környezetébe – tehát $K_1(0)$, illetve $K_1(x)$ szemléltetése – a $(C\,[a, b]\,, d_\infty)$, illetve a $(C\,[a, b]\,, d_\int)$ MT-ben.
3. Adjunk példát olyan MT-re és környezetekre, amelyekre ⇢
   a, $K_r(x) = K_R(x)$ és $R > r$;
   b, $K_r(x) \supsetneq K_R(y)$ és $R > r$!

C, *topológiai alapfogalmak*

1. Döntsük el, hogy a $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ MT-ben a következő halmazok zártak/nyíltak-e, illetve adjuk meg a torlódási, belső, külső és határpontjaik halmazát. ↻ →

a, $\mathbb{R}$; $\emptyset$;
b, $\{1, 2, \ldots, n\}$; $\mathbb{N}$; $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$;
c, $[a, b]$; $[a, b)$; (a, b) ; $[a, \infty)$.

2. Adjuk meg az alábbi halmaz belső, külső, illetve határpontjait, és ezek alapján döntsük el, hogy a halmaz nyílt vagy zárt-e! $H_M = \{f \in C[a, b] : d(f, 0) \leq M\}$ a $(C[a, b], d_\infty)$ MT-ben.

D, Az összes eddigi fogalmat vizsgáljuk meg diszkrét metrikus térben!

1.3. Megoldások–Eredmények–Útmutatások

A/1 a–c, nem, mert sérül az első metrikatulajdonság; d, igen.

A/2/a, $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.

- $d_1(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$, mivel $|x_i - y_i| \geq 0 \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$.
  Továbbá $d_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, ugyanis nemnegatív számok összege csak úgy lehet nulla, ha mindegyik összeadandó nulla, azaz $x_i - y_i = 0 \ \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$, vagyis $x = y$.
- $d_1(x,y) = d_1(y,x)$, mivel $|x_i - y_i| = |y_i - x_i| \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$.
- $d_1(x,y) \leq d_1(x,z) + d_1(z,y) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$, mivel
  $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n}(|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i|$.
  A második lépésben az összeg minden tagjára külön alkalmaztuk az $(\mathbb{R}, |\cdot|)$-beli háromszög-egyenlőtlenséget (felhasználva, hogy $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ MT).

A d_2 metrika esetén itt csak a harmadik tulajdonságot (háromszög-egyenlőtlenség) mutatjuk meg. $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2}$$

teljesül. Ennek belátásához vezessük be a következő változókat: $x_i - z_i =: a_i$ és $z_i - y_i =: b_i$. Ekkor $x_i - y_i = a_i + b_i$, és a belátandó egyenlőtlenség:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Elég tehát megmutatni, hogy az utóbbi egyenlőtlenség igaz $\forall a_i, b_i, \ i = 1,\ldots,n$ számok esetén. Emeljünk négyzetre (mindkét oldal nemnegatív):

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}.$$

A bal oldalon elvégezve a négyzetre emelést, egyszerűsítés és 2-vel való osztás után:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Ez pedig éppen a jól ismert CBS-egyenlőtlenség (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség) (amiről tudjuk, hogy teljesül $\forall a_i, b_i, \ i = 1,\ldots,n$ esetén).

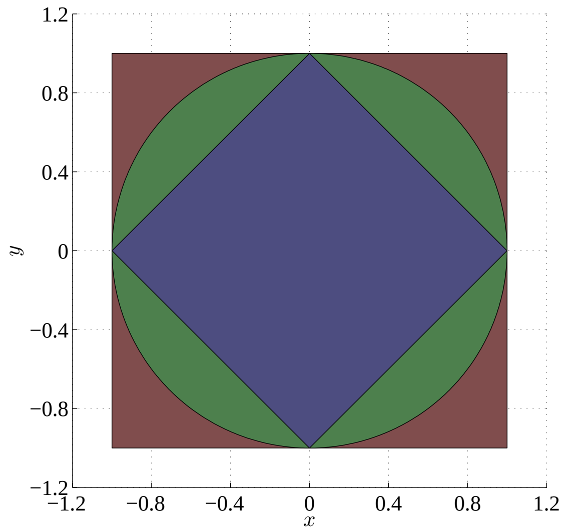
A/2/b, Megmutatjuk, hogy $(C[a,b], d_\int)$ MT.

- $d_\int(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x \geq 0 \ \forall f,g \in C[a,b]$, mert nemnegatív függvény integrálja nemnegatív. Továbbá $d_\int(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f =$

g. Tegyük fel ugyanis indirekte, hogy $f \neq g$. Ekkor $\exists x_0 \in [a,b]$, amelyben $f(x_0) \neq g(x_0)$. Ezen x_0 pontban $|f(x_0) - g(x_0)| > 0$, és mivel f és g folytonos, és így az $|f-g|$ függvény is az, tehát az $|f-g|$ függvény az x_0 valamely $K_r(x_0)$ környezetében is pozitív $\Rightarrow \int_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x > 0$, ami ellentmondás.

- $d_\int(f,g) = d_\int(g,f)\ \forall f,g \in C[a,b]$, ugyanis $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|\ \forall x \in [a,b]$.
- $d_\int(f,g) \leq d_\int(f,h) + d_\int(h,g)\ \forall f,g,h \in C[a,b]$, az $(\mathbb{R}, |\cdot|)$-beli háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva $|f(x_0)-g(x_0)| = |f(x_0)-h(x_0)+h(x_0)-g(x_0)| \leq |f(x_0) - h(x_0)| + |h(x_0) - g(x_0)|$ teljesül $\forall x_0 \in [a,b]$, amiből következik, hogy $|f(x)-g(x)| \leq |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|$. Kiintegrálva az egyenlőtlenséget és felhasználva az integrál monotonitását és additivitását, kapjuk, hogy $\int_a^b |f(x)-g(x)|\, \mathrm{d}x \leq \int_a^b (|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|)\, \mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)-h(x)|\, \mathrm{d}x + \int_a^b |h(x)-g(x)|\, \mathrm{d}x$.

B/1 A környezetek az 1.1. ábrán láthatók.



1.1. ábra. B/1. feladat. Kék: d_1, zöld: d_2, piros: d_∞.

B/3/a, Diszkrétben;

B/3/b, $(\{3 \text{ jól megválasztott pont a síkban}\}, d_2)$.

C/1/a, $\mathbb{R}$ zárt és nyílt, $\mathbb{R}' = \operatorname{int}\mathbb{R} = \mathbb{R}, \partial\mathbb{R} = \operatorname{ext}\mathbb{R} = \emptyset$;

$\emptyset$ zárt és nyílt, $\emptyset' = \operatorname{int}\emptyset = \partial\emptyset = \emptyset$, $\operatorname{ext}\emptyset = \mathbb{R}$.

C/1/b, A $H = \{1, 2, \ldots, n\}$ halmazra $H' = \emptyset$, $\operatorname{int} H = \emptyset$, $\operatorname{ext} H = \mathbb{R} \setminus H$, $\partial H = H$. $H' \subset H \Rightarrow H$ zárt;

$\mathbb{N}' = \emptyset$, $\operatorname{int}\mathbb{N} = \emptyset$, $\operatorname{ext}\mathbb{N} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, $\partial\mathbb{N} = \mathbb{N}$. $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ zárt;

A $G = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$ halmazra $G' = \{0\}$, $\operatorname{int} G = \emptyset$, $\operatorname{ext} G = \mathbb{R} \setminus (H \cup \{0\})$, $\partial H = H \cup \{0\}$. G nem nyílt és nem zárt.

C/1/c, $[a,b]' = [a,b]$, $\operatorname{int}[a,b] = (a,b)$, $\operatorname{ext}[a,b] = \mathbb{R} \setminus [a,b]$, $\partial[a,b] = \{a,b\}$, zárt;

$[a,b)' = [a,b]$, $\operatorname{int}[a,b) = (a,b)$, $\operatorname{ext}[a,b) = \mathbb{R} \setminus [a,b]$, $\partial[a,b) = \{a,b\}$, nem zárt, nem nyílt;

$(a,b)' = [a,b]$, $\operatorname{int}(a,b) = (a,b)$, $\operatorname{ext}(a,b) = \mathbb{R} \setminus [a,b]$, $\partial(a,b) = \{a,b\}$, nyílt;

$[a,+\infty)' = [a,+\infty)$, $\operatorname{int}[a,+\infty) = (a,+\infty)$, $\operatorname{ext}[a,+\infty) = (-\infty,a)$, $\partial[a,+\infty) = \{a\}$, zárt.

FEJEZET **2**

Teljes metrikus tér

Kulcsszavak:

konvergencia, Cauchy-sorozat, teljes metrikus tér, kontrakció, fixpont, Banach-féle fixponttétel

2.1. Elméleti összefoglaló

Tetszőleges metrikus térben definiálhatjuk sorozatok konvergenciáját és a Cauchy-sorozat fogalmát. Míg ez a két fogalom a megszokott valós számsorozatok esetében (azaz a konkrét $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ MT-ben) egybeesett, itt már különválik, azaz vannak olyan metrikus terek, ahol nem minden Cauchy-sorozat konvergens. Azokat a MT-eket, ahol a két fogalom ekvivalens, teljes metrikus tereknek nevezzük.

2.1. Definíció. Az (X, d) metrikus térbeli (x_n) sorozat *konvergens*, ha $\exists a \in X$, amelyre $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n \geq N$ esetén $d(x_n, a) < \varepsilon$ (azaz $x_n \in K_\varepsilon(a)$).

Ez másképpen a $d(x_n, a)$ számsorozat nullához tartását jelenti.

2.2. Definíció. Az (X, d) metrikus térbeli (x_n) sorozat *Cauchy-sorozat*, ha $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n, m \geq N$ esetén $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

2.3. Definíció. Az (X, d) metrikus tér *teljes metrikus tér* (TMT), ha minden Cauchy-sorozata konvergens.

A TMT-ek „szebben” viselkednek. Egyenletek egyértelmű megoldhatóságának igazolására és a megoldás közelítésére TMT-ekben alkalmazható az úgynevezett Banach-féle fixponttétel.

2.4. Definíció. Az $f : X \to X$ függvényt, ahol (X, d) metrikus tér, *kontrakció*nak nevezzük, ha valamely $0 \leq q < 1$ konstanssal (ún. kontrakciószám)

$$d(f(x), f(y)) \leq q\, d(x, y)$$

teljesül minden $x, y \in X$-re.

2.5. Definíció. Az $x \in X$ pont az $f : X \to X$ függvény *fixpont*ja, ha $f(x) = x$.

2.1. Tétel. *(Banach-féle fixponttétel)*
Legyen (X, d) TMT és $f : X \to X$ kontrakció a q kontrakciószámmal. Ekkor

1. *f-nek létezik egyetlen x^* fixpontja;*
2. *tetszőleges $x_0 \in X$ esetén az $x_n = f(x_{n-1})$ iteráció tart x^*-hoz;*
3. *az n-edik iterációnak a fixponttól való távolságára érvényes a*
$$d(x^*, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$$
becslés.

2.2. Feladatok

A, *konvergencia, Cauchy-sorozat, teljes MT*

1. Vizsgáljuk meg a következő (függvény)sorozatokat Cauchy-ság illetve konvergencia szempontjából!
   a, $\left(\frac{\sin x}{n}\right)$ a $(C[0,\pi], d_\int)$, illetve a $(C[0,\pi], d_\infty)$ MT-ben; $\twoheadrightarrow$
   b,
$$f_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } \ x \in (-\infty, n-1] \cup [n+1, \infty) \\ x - (n-1), \text{ ha } x \in (n-1, n] \\ n+1-x, \text{ ha } x \in (n, n+1) \end{cases}$$
   a $(C_b(\mathbb{R}), d_\infty)$ MT-ben, ahol $C_b(\mathbb{R})$ az $\mathbb{R}$-en értelmezett korlátos, folytonos függvények halmazát jelöli;
   c, (x^n) a $(C[0,1], d_\int)$ illetve a $(C[0,1], d_\infty)$ MT-ben. $\twoheadrightarrow$ $\dashrightarrow$
2. TMT-e?
   a, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. $\circlearrowright$
   b, $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, |\cdot|)$; $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$; $([a,b], |\cdot|)$; $([a,b), |\cdot|)$; $([a,\infty), |\cdot|)$. $\twoheadrightarrow$ $\dashrightarrow$
   c, $(\mathbb{R}, d_{\operatorname{arc\,tg}})$, ahol $d_{\operatorname{arc\,tg}}(x,y) = |\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y|$. $\dashrightarrow$
   d, $\mathbb{R}$ ellátva a diszkrét metrikával.
   e, $(C[a,b], d_\infty)$ (Ezt csak kimondani!); $(C[a,b], d_\int)$. $\twoheadrightarrow$

B, *Banach-féle fixponttétel*

1. Ellenpéldákkal igazoljuk, hogy a fixponttétel feltételei – a teljesség és a $q < 1$ feltétel – lényegesek! $\dashrightarrow$
2. Az $f : [1,\infty) \to [1,\infty)$, $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ függvény kontrakció-e, és (ha igen, akkor) mi a fixpontja?
   Határozzuk meg a fixpont értékét 10^{-3}-os pontossággal! $\twoheadrightarrow$

3. Lássuk be, hogy ha $f : [a,b] \to [a,b]$, $f \in C^1\,[a,b]$, $|f'| < 1$, akkor f kontrakció! $\twoheadrightarrow$

4. Lássuk be, hogy az adott f függvény kontrakció a megadott intervallumon. Továbbá szeretnénk meghatározni az $f(x) = x$ egyenlet megoldását. Adjunk meg egy iterációs lépésszámot, amellyel már garantálni tudjuk, hogy az iterációt az adott x_0 pontból indítva a közelítés hibája 10^{-3}-nál már kisebb.

   a, $f(x) = 0.9\cos x\,,\ x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ és $x_0 = 0\,;$

   b, $f(x) = \sqrt{x+2}\,,\ x \in [0,2]$ és $x_0 = 0\,.$

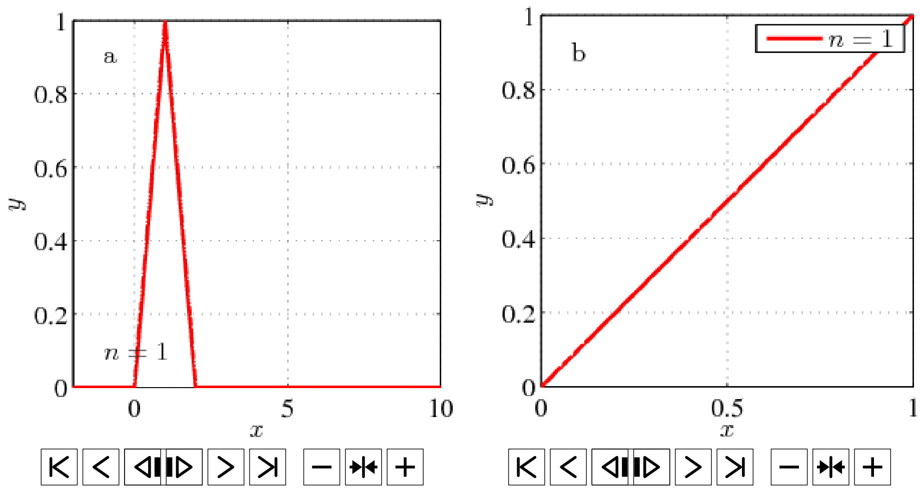
2.3. Megoldások–Eredmények–Útmutatások

A/1/a,
- A $d_\int$ metrikában: a $(\frac{\sin x}{n})$ függvénysorozat tart az azonosan nulla függvényhez, mivel
$$d_\int\left(\frac{\sin x}{n},0\right)=\int_0^\pi\left|\frac{\sin x}{n}-0\right|\;\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^\pi\sin x\;\mathrm{d}x=\frac{2}{n}\to 0\,.$$
Tehát a függvénysorozat konvergens, és így Cauchy-sorozat is.
- A d_∞ metrikában: a $(\frac{\sin x}{n})$ függvénysorozat tart az azonosan nulla függvényhez, mivel
$$d_\infty\left(\frac{\sin x}{n},0\right)=\sup_{[0,\pi]}\left|\frac{\sin x}{n}-0\right|\;\mathrm{d}x=\frac{\sin(\pi/2)}{n}=\frac{1}{n}\to 0\,.$$
Tehát a függvénysorozat konvergens, és így Cauchy-sorozat is. (Megjegyezzük, hogy ha egy sorozat konvergens a $(C[0,\pi],d_\infty)$ MT-ben, akkor konvergens a $(C[0,\pi],d_\int)$ MT-ben is.)

A/1/b A függvénysorozat tagjai a 2.1.a ábrán láthatók.

A/1/c, A $d_\int$ metrikában: az (x^n) függvénysorozat (lásd 2.1.b ábra) tart az azonosan nulla függvényhez, mivel
$$d_\int(x^n,0)=\int_0^1|x^n-0|\;\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n\;\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}\to 0\,.$$
Tehát a függvénysorozat konvergens, és így Cauchy-sorozat is.

$d_\infty(x^n,x^{2n})=\frac{1}{4}$. Lásd 2.1.b ábra.



2.1. ábra. a) A/1/b feladat és b) A/1/c feladat.

A/2/b, $([a,b],|\cdot|)$: TMT. A bizonyítás indirekt: tegyük fel, hogy nem TMT, azaz $\exists(x_n)\subset[a,b]$ Cauchy-sorozat, amely nem konvergens. Viszont vegyük észre, hogy (x_n) Cauchy-sorozat az $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ MT-ben is. Ez a tér teljes, így $\exists A \in \mathbb{R} = \lim(x_n)$. Tehát $A \notin [a,b]$, vagyis A külső pontja az $[a,b]$ halmaznak, így létezik olyan $K_r(A)$ környezet, amelyre $K_r(A) \cap [a,b] = \emptyset$. A határérték definícióját használva: az előbbi r-hez $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N$-re $x_n \in K_r(A)$, vagyis bizonyos indextől kezdve a sorozat minden eleme $K_r(A)$-beli, és így nem $[a,b]$-beli. Ez ellentmondás.

A/2/b, $([a,b), |\cdot|)$: Nem TMT. Konstruálható ugyanis olyan $[a,b)$-beli Cauchy-sorozat, amely b-hez tart, pl. az $x_n = \frac{a+nb}{n+1}$ sorozat.

A/2/c, Vizsgáljuk a következő sorozatot: $(x_n) = (n)$.

A/2/e, Belátjuk, hogy $(C[a,b], d_\int)$ nem TMT. Legyen $a = 0$, $b = 2$, a bizonyítás hasonló tetszőleges intervallum esetén. Tekintsük az alábbi függvénysorozatot:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } \ x \in [0,1] \\ nx - n, \text{ ha } x \in (1, 1+\frac{1}{n}) \\ 1, \text{ ha } x \in [1+\frac{1}{n}, 2] \end{cases}$$

Ez Cauchy-sorozat, mivel $n, m \in \mathbb{N}, n < m$ (ezt az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük) esetén

$$d_\int(f_m, f_n) = \int_0^2 (f_m(x) - f_n(x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2m} \leq \frac{1}{2n} \to 0\,.$$

Megmutatjuk, hogy ez a Cauchy-sorozat nem konvergens $(C[0,2], d_\int)$-ben. A bizonyítás indirekt: tegyük fel, hogy konvergens, azaz tart valamely $f \in C[0,2]$ függvényhez. Ez a függvény a $[0,1]$-en mindenhol nullát kell felvegyen, ugyanis felhasználva a háromszög-egyenlőtlenséget a $[0,1]$ intervallumon fennáll, hogy

$$d_\int(f, 0) \leq d_\int(f, f_n) + d_\int(f_n, 0)\,.$$

Itt a jobb oldal mindkét tagja nullához tart (a második tag konkrátan 0), tehát a bal oldal csak nulla lehet. Végül felhasználva f folytonosságát, adódik a részállítás. Hasonlóan: a határfüggvénynek az $(1,2]$-n mindenhol 1-et kell felvennie, mert az $[1,2]$ intervallumon

$$d_\int(f, 1) \leq d_\int(f, f_n) + d_\int(f_n, 1)\,,$$

ahol a jobb oldal mindkét tagja nullához tart, tehát a bal oldal 0. Végül felhasználva f folytonosságát, adódik ez a részállítás is. Így f nem lehet folytonos, ami ellentmondás.

B/1 $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, |\cdot|)$, $\frac{x}{2}$ és $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $x+1$.

B/2 Két megoldást adunk.

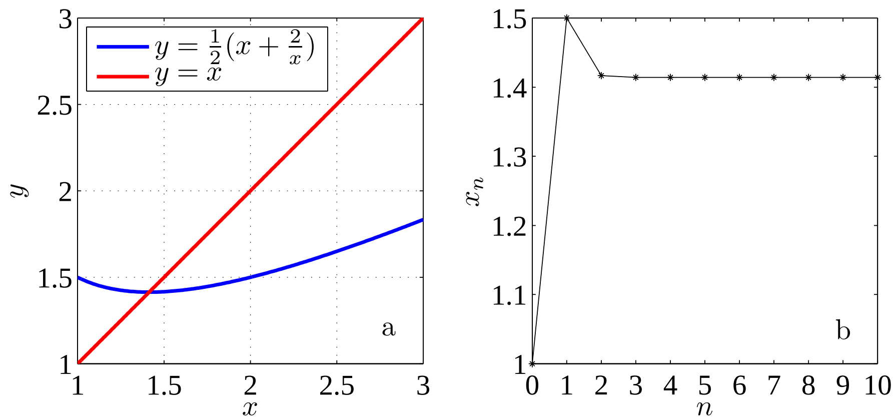
I.mo. Belátjuk, hogy f kontrakció.

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{2}\left|x + \frac{x}{2} - y - \frac{y}{2}\right| = \frac{1}{2}|x-y|\left|1 - \frac{2}{xy}\right| \leq \frac{1}{2}|x-y|\,,$$

ahol felhasználtuk, hogy $\left|1 - \frac{2}{xy}\right| \leq 1$ teljesül az $[1, \infty)$ intervallumon. Tehát $q = \frac{1}{2}$ szereposztással teljesül a kívánt kontrakciós egyenlőtlenség. Ha a fixponttétel szerinti iterációhoz az $x_0 := 1$ kezdőpontot választjuk, akkor $x_1 = f(1) = \frac{3}{2}$ (lásd 2.2. ábra). Az elégséges lépésszám kiszámítása:

$$\frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1) = \frac{1}{2^n} \leq 10^{-3} \Rightarrow n \geq 10 .$$

II.mo. (Felhasználva a B/3 feladatot.) Az $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$ deriváltfüggvény zérushelye $x = \sqrt{2}$, f' az $[1, \sqrt{2})$ intervallumon < 0, és monoton nő $\frac{1}{2}$-től 0-ig, a $(\sqrt{2}, +\infty)$ intervallumon > 0, és szigorúan monoton nő, határértéke a $+\infty$-ben $\frac{1}{2}$. $\Rightarrow$ $|f'| \leq \frac{1}{2} =: q$. Innen lásd az első megoldást.

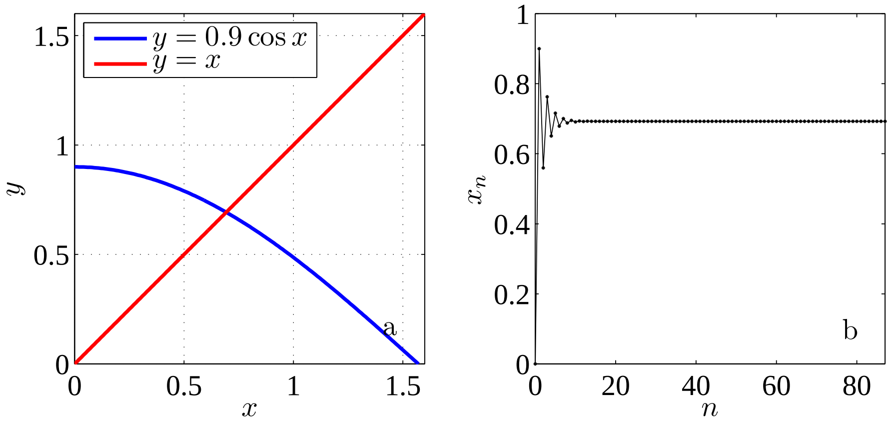


2.2. ábra. a) B/2. feladat, b) $x_0 = 1$ esetén $n = 10$ iteráció szükséges ahhoz, hogy a fixpontot 10^{-3} pontossággal meghatározzuk.

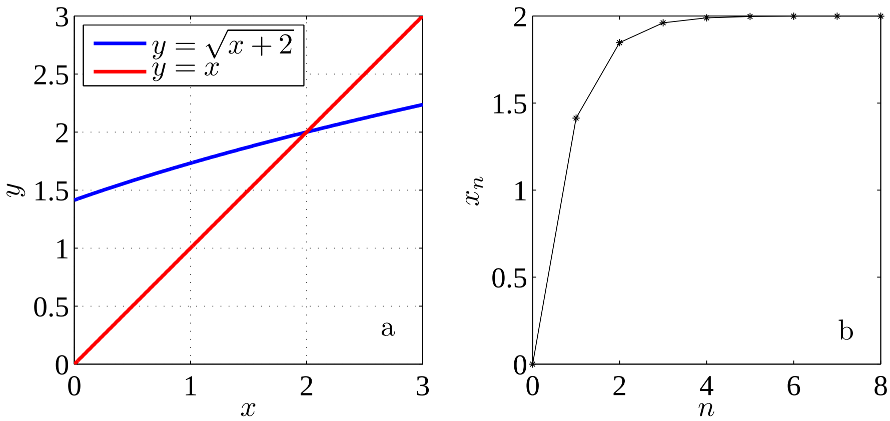
B/3 $f \in C^1[a, b] \Rightarrow$ a Lagrange-középértéktétel szerint $\forall x, y \in [a, b]$ esetén $\exists \xi \in (x, y)$: $f(x) - f(y) = f'(\xi) \cdot (x - y) \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leq \sup_{[a,b]} |f'| \cdot |x - y|$. Mivel f' folytonos az $[a, b]$-n, ezért $|f'|$ is az, amiből $\sup_{[a,b]} |f'| = \max_{[a,b]} |f'|$ következik. Ez a maximum csak 1-nél kisebb lehet, mivel $|f'| < 1$. Így f kontrakció $q = \max_{[a,b]} |f'|$ mellett.

B/4/a Lásd 2.3. ábra.

B/4/b Lásd 2.4. ábra.



2.3. ábra. a) B/4/a feladat, b) $x_0 = 0$ esetén $n = 87$ iteráció szükséges ahhoz, hogy a fixpontot 10^{-3} pontossággal meghatározzuk.



2.4. ábra. a) B/4/b feladat, b) $x_0 = 0$ esetén $n = 8$ iteráció szükséges ahhoz, hogy a fixpontot 10^{-3} pontossággal meghatározzuk.

FEJEZET **3**

Vektortér, lineáris leképezések

Kulcsszavak:

vektortér, altér, lineáris kombináció, lineáris függetlensé, generátorrendszer, bázis, dimenzió, lineáris leképezés

3.1. Elméleti összefoglaló

A távolságfogalom kiterjesztésével kapott metrikus tér elegendő keretet nyújt sorozatok konvergenciájának definiálásához, de algebrai műveleteket nem tudunk benne végezni, így még nem elegendő a differenciálszámítás bevezetéséhez. Erre a normált tér lesz alkalmas, amely a vektortér fogalmán alapul (lásd a Vektorszámítás c. tantárgyat is). A vektortér olyan halmazt jelent, amely el van látva két művelettel: összeadással és skalárral való szorzással, amelyek a geometriai vektorok körében értelmezett azonos nevű műveletek tulajdonságaival rendelkeznek. A következőkben definiáljuk a valós számtest feletti vektortér fogalmát, de megjegyezzük, hogy teszőleges test (pl. $\mathbb{C}$) esetén is működik a definíció.

3.1. Definíció. Legyen X egy tetszőleges halmaz, amelyen értelmezve van egy $\oplus : X \times X \to X$ és egy $\odot : \mathbb{R} \times X \to X$ művelet a következő tulajdonságokkal:

1. $x \oplus y = y \oplus x \quad \forall x, y \in X$
2. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) \quad \forall x, y, z \in X$
3. Létezik nullelem (nullvektor), azaz olyan $0_X \in X$ elem, amelyre $x \oplus 0_X = x \quad \forall x \in X$
4. Minden $x \in X$ elemhez létezik ellentett, azaz olyan elem (jelölje $-x$), amelyre $x \oplus (-x) = 0_X$, ahol 0_X a 3. tulajdonság szerini nullvektor.
5. $\lambda \odot (x \oplus y) = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y) \quad \forall x, y \in X$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
6. $(\lambda + \mu) \odot x = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x) \quad \forall x \in X$ és $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
7. $\lambda \odot (\mu \odot x) = (\lambda \cdot \mu) \odot x = \mu \odot (\lambda \odot x) \quad \forall x \in X$ és $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

8. $1 \odot x = x \quad \forall x \in X$

Ekkor az $(X, \oplus, \odot)$ rendezett hármast *vektortér*nek (VT) nevezzük ($\mathbb{R}$ felett), X elemeit pedig vektoroknak nevezzük.

Figyelem, a $\odot$ művelet nem a vektortér elemei közt van értelmezve!

Ha $(X, \oplus, \odot)$ egy vektortér, akkor előfordulhat, hogy az X halmaz valamely részhalmaza maga is vektorteret alkot ugyanazon műveletekkel.

3.2. Definíció. Legyen $Y \subset X$. Azt mondjuk, hogy az $(X, \oplus, \odot)$ vektortérnek *altere* $(Y, \oplus, \odot)$, ha $(Y, \oplus, \odot)$ vektortér.

Belátható: ahhoz, hogy egy vektortér részhalmazáról eldöntsük, hogy maga is vektortér-e ugyanazon műveletekkel, azaz alteret kaptunk-e, elég a két műveletre való zártságot ellenőrizni. Ha ugyanis ez teljesül, akkor a hét műveleti tulajdonság a részhalmazon automatikusan teljesül.

A továbbiakban összegyűjtjük azokat a legfontosabb fogalmakat, amelyeket vektortérben értelmezünk.

3.3. Definíció. Legyen $(X, \oplus, \odot)$ egy tetszőleges vektortér.

- Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($x_i \in X$, $i = 1, \ldots, n$) vektorok *lineáris kombináció*jának nevezzük az
$$(\alpha_1 \odot x_1) \oplus (\alpha_2 \odot x_2) \oplus \ldots \oplus (\alpha_n \odot x_n) \in X, \quad \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n$$
alakú vektort.

- Azt mondjuk, hogy az $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = F \subset X$ halmaz vektorai *lineárisan függetlenek*, ha
$$(\alpha_1 \odot x_1) \oplus (\alpha_2 \odot x_2) \oplus \ldots \oplus (\alpha_n \odot x_n) = 0_X \Leftrightarrow \alpha_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

- A $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} = G \subset X$ halmaz vektorait az $(X, \oplus, \odot)$ vektortér *generátorrendszer*ének nevezzük, ha X minden eleme előállítható G elemeinek lineáris kombinációjaként.

Értelmezni lehet végtelen sok vektor függetlenségét, illetve generátorrenszer mivoltát, de mi ezt itt nem tesszük meg, így vektortér dimenzióját is csak véges esetre definiáljuk. Ezeknek a fogalmaknak a kiterjesztését lásd a [7] könyvben.

3.4. Definíció. Lineárisan független generátorrendszert *bázis*nak nevezünk.

3.1. Lemma. *Vektortérben minden bázis azonos elemszámú.*

Így értelmes a következő definíció.

3.5. Definíció. Az $(X, \oplus, \odot)$ vektortér *dimenzió*jának nevezzük a benne lévő bázisok elemszámát. Jelölése: $\dim X$.

3.6. Definíció. Legyen $(X_1, \oplus_1, \odot_1)$ és $(X_2, \oplus_2, \odot_2)$ két vektortér. Az $f : X_1 \to X_2$ függvényt *lineáris leképezés*nek nevezzük, ha igaz rá a következő két tulajdonság:

1. $f(x_1 \oplus_1 x_2) = f(x_1) \oplus_2 f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X_1$,
2. $f(\lambda \odot_1 x) = \lambda \odot_2 f(x) \quad \forall x \in X_1, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Az $X_1 \to X_2$ képező lineáris leképezések halmazát $\mathrm{Hom}(X_1, X_2)$ jelöli. Ha $X_1 = X_2 = X$, akkor a $\mathrm{Hom}(X)$ jelölést alkalmazzuk.

Belátható, hogy egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés pontosan akkor lineáris, ha az

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots y_m)$$

jelöléssel

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

alakú, ahol a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ rögzített valós számok. Másképpen, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, ahol $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (m-szer n-es mátrix).

A későbbiekben - ha egyértelmű, hogy milyen műveletekkel - akkor használjuk a rövidített "Legyen X egy vektortér..." kifejezést, illetve a körülményes $\oplus, \odot$ műveleti jelek helyett sima $+, \cdot$ jeleket fogunk használni, amennyiben ez nem okoz félreérthetőséget.

3.2. Feladatok

A, *VT alapfogalmai* ↻

1. Lássuk be, hogy $\mathbb{R}^n$; $\mathbb{R}[x]$; $C[a, b]$ ($\mathbb{R}$ felett) VT! Hány dimenziós $\mathbb{R}^n$? (Adjunk meg egy bázist!)
2. Lineárisan függetlenek-e az alábbi függvények a $C[0, \pi]$ VT-ben?
   a, $f_1(x) = \sin x,\ f_2(x) = \cos x$
   b, $f_1(x) = \sin^2 x,\ f_2(x) = \cos^2 x,\ f_3(x) = 1$
   c, $f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = e^{2x}$ ↠
   d, $f_1(x) = 1,\ f_2(x) = x$
   e, $f_1(x) = 1,\ f_2(x) = x,\ \ldots,\ f_n(x) = x^{n-1}$
   f, $f_1(x) = 3\sin(\frac{\pi}{2} + x),\ f_2(x) = \cos x$
3. Alteret alkotnak-e $\mathbb{K}[x]$-ben a ↠

a, tizedfokú polinomok,

b, legalább tizedfokú polinomok,

c, legfeljebb tizedfokú polinomok?

Ha igen, határozzuk meg, hogy hány dimenziós az altér (egy bázis megadásával)!

B, *VT: lineáris leképezések*

1. Tekintsük az alábbi $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezéseket (másnéven operátorokat): $\circlearrowright$ $\twoheadrightarrow$

   i, identitás ii, tükrözés az origóra iii, tükrözés az $x = 0$ egyenesre

   iv, tükrözés az $x = 1$ egyenesre v, origó körüli forgatás α szöggel

   vi, x-tengelyre vetítés vii, origóból kétszeres nagyítás

   viii, eltolás az $(1, 0)$ vektorral ix, $(x, y) \mapsto (x + y, y)$

   a, Melyek lineárisak? Ha lineáris, mi a mátrixa a szokásos bázisban?

   b, Mik a sajátértékeik és sajátvektoraik?

2. Lineárisak-e a következő $X \to Y$ leképezések? (Ahol X, Y adott VT-ek.)

   a, $X = C^1[0, 2\pi]$, $Y = C[0, 2\pi]$, $Df = f'$; $\twoheadrightarrow$

   b, $X = C[a, b]$, $Y = \mathbb{R}$, $Rf = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

3.3. Megoldások–Eredmények–Útmutatások

A/2/c, Az $f_1(x) = e^x$ és $f_2(x) = e^{2x}$ függvények lineárisan függetlenek. Ehhez meg kell mutatnunk, hogy az $\alpha\, e^x + \beta\, e^{2x} = 0$ egyenlőség minden $x \in [0, \pi]$ pontban csak akkor áll fenn, ha $\alpha = \beta = 0$.
1. Az $x = 0$ pontban csak akkor áll fenn, ha $\alpha\, e^0 + \beta\, e^0 = 0$, azaz $\alpha + \beta = 0$.
2. Az $x = 1$ pontban csak akkor áll fenn, ha $\alpha\, e + \beta\, e^2 = 0$.
$\Rightarrow$ már a fenti két pontban egyszerre is csak úgy állhat fenn az egyenlőtlenség, ha α és β megoldása az $\alpha + \beta = 0\,;\ \alpha\, e + \beta\, e^2 = 0$ egyenletrendszernek. Ennek a rendszernek pedig egyetlen megoldása: $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

A/3/ab, Nem, $x^{10} - x^{10} = 0$, ami nem tizedfokú.

A/3/c, Igen, mert zárt a műveletekre. 11 dimenziós, mert $\left\{1, x, x^2, \ldots, x^{10}\right\}$ egy bázis benne.

B/1/a, iii, Az $x = 0$ egyenesre való tükrözés az $f(x, y) = (-x, y)$ leképezést jelenti. Ez lineáris, mivel

1. $f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (-(x_1 + x_2), y_1 + y_2) = (-x_1, y_1) + (-x_2, y_2) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$ teljesül $\forall\, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ esetén, illetve
2. $f(\lambda(x, y)) = f(\lambda x, \lambda y) = (-\lambda x, \lambda y) = \lambda(-x, y) = \lambda f(x, y)$ teljesül $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

Mátrixa: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

iv, Nem lineáris, mivel a $(0, 0)$ vektort nem a $(0, 0)$-ba, hanem a $(2, 0)$-ba viszi át.

vi, Az x tengelyre való vetítés az $f(x, y) = (x, 0)$ leképezést jelenti. Ez lineáris, mivel

1. $f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, 0) = (x_1, 0) + (x_2, 0) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$ teljesül $\forall\, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ esetén, illetve
2. $f(\lambda(x, y)) = f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x, 0) = \lambda(x, 0) = \lambda f(x, y)$ teljesül $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

Mátrixa: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

viii, Az $(1, 0)$ vektorral való eltolás az $f(x, y) = (x, y) + (1, 0) = (x + 1, y)$ leképezés. Ez nem lineáris, mivel $f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2) \neq f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) = (x_1 + 1, y_1) + (x_2 + 1, y_2) = (x_1 + x_2 + 2, y_1 + y_2)$. Másképp: $f((0, 0)) = (1, 0) \neq (0, 0)$.

FEJEZET **4**

Normált tér

Kulcsszavak:
normált tér, norma, ekvivalens normák, konvergens sorozat, Cauchy-sorozat, Banach-tér

4.1. Elméleti összefoglaló

A síkvektorok fontos tulajdonsága a hosszúságuk (nagyságuk). Viszont egy tetszőleges vektortér absztrakt vektorai esetén nekünk kell megmondani, hogy mit is értünk hosszúságon. Ezt a célt szolgálja a norma fogalma. Azokat a vektortereket, ahol értelmezve van ez a fogalom, normált térnek nevezzük. Mivel a hossz fogalma szoros kapcsolatban van a távolság fogalmával, így a normált teret tekinthetjük úgy is mint egy vektortér, ami egyben metrikus tér is.

A következőkben végiggondoljuk, hogy miképpen érdemes bevezetni a norma fogalmát. Ahhoz, hogy egy tetszőleges vektortérben értelmezhessük az elemek hoszúságát, gondoljuk meg, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkezik a síkvektorok hagyományos értelemben vett (Pitagorasz-tétellel számított) hosszúsága (euklideszi hosszúság).

1. A hosszúság mindig nemnegatív, és csak akkor 0, ha a nullvektorról van szó.
2. Két vektor összegének hossza nem lehet hosszabb, mint az összeadandók hosszának az összege.
3. Ha egy vektort $\lambda \in \mathbb{R}$ számmal szorzunk, akkor a vektor hossza $|\lambda|$-szorosára változik.

Ezen alapul a normált tér definíciója.

4.1. Definíció. Legyen X vektortér $\mathbb{R}$ felett. X-beli *normán* olyan $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_0^+$ függvényt értünk, amely tetszőleges $x, y, z \in X$ vektorokra és $\lambda \in \mathbb{R}$ számra eleget tesz az alábbi követelményeknek:

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0_X$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,

3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (háromszög-egyenlőtlenség).

Ekkor az $(X, \|\cdot\|)$ rendezett párt *normált tér*nek (NT), az $\|x\| \in \mathbb{R}_0^+$ számot pedig az x vektor normájának nevezzük.

Egy X vektortéren általában többféleképpen is definiálhatunk normát.

4.2. Definíció. Az $\|\cdot\|_a$ és $\|\cdot\|_b$ normát *ekvivalens normá*knak nevezzük, ha léteznek olyan c_1, c_2 pozitív konstansok, hogy $c_1\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq c_2\|x\|_a$ minden $x \in X$ esetén.

Ekkor természetesen léteznek olyan d_1, d_2 pozitív konstansok is, amelyek mellett $d_1\|x\|_b \leq \|x\|_a \leq d_2\|x\|_b$ minden $x \in X$ esetén, hiszen $d_1 = \frac{1}{c_2}$ és $d_2 = \frac{1}{c_1}$ mellett fennáll az összefüggés. Megjegyezzük, hogy véges dimenziós vektortérben minden norma ekvivalens.

Az $(X, \|\cdot\|)$ normált téren a $d(x,y) = \|x-y\|$ függvény metrikát definiál, így a konvergens sorozat és a Cauchy-sorozat fogalma átvihető normált térre is.

4.3. Definíció. Az $(X, \|\cdot\|)$ normált térbeli (x_n) sorozat

- *konvergens*, ha $\exists a \in X$, amelyre $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n \geq N$ esetén $\|x_n - a\| < \varepsilon$. (Ez másképpen az $\|x_n - a\|$ számsorozat nullához tartását jelenti.)
- *Cauchy-sorozat*, ha $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n, m \geq N$ esetén $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Metrikus terek mintájára itt is megkülönböztetjük a teljes normált tereket.

4.4. Definíció. Az $(X, \|\cdot\|)$ normált tér *Banach-tér* (BT), ha teljes, vagyis ha minden Cauchy-sorozata konvergens.

4.2. Feladatok

A, *norma, NT*

1. Tekintsük $\mathbb{R}^2$-et, mint $\mathbb{R}$ feletti vektorteret. Normát definiálnak-e a következő hozzárendelések? $\dashrightarrow$

   a, $(x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{2}|x_1| + 2|x_2|$;

   b, $(x_1, x_2) \mapsto |x_2|$.

2. Mutassuk meg, hogy NT!

   a, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_k)$, $k = 1, 2, \infty$, ahol $\|x\|_k = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^k\right)^{\frac{1}{k}}$, illetve $\|x\|_\infty = \max|x_i|$; $\twoheadrightarrow$

b, $(C\,[a,b]\,, \|\cdot\|_\infty)$, ahol $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$;
$(C\,[a,b]\,, \|\cdot\|_\int)$, ahol $\|f\|_\int = \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$, $(a<b)$. ↠

B, *norma, ekvivalens normák*

1. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges NT minden x, y elemére teljesül az alábbi egyenlőtlenség!
$$\|x-y\| \geq |\|x\| - \|y\||\ .$$
⇢

2. Bizonyítsuk be, hogy minden $x \in \mathbb{R}^n$-re teljesül, hogy

   a, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty$;
   b, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$;
   c, $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$!

3. Lássuk be, hogy a $C\,[a,b]$ VT-en $\|\cdot\|_\infty$ és $\|\cdot\|_\int$ nem ekvivalens normák!

C, *konvergencia, véges dimenzió, Banach-tér*

1. Konvergensek-e az $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ NT-ben a következő sorozatok? ↠

   a, $\left(\left(\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right)\right)$;
   b, $\left(\left(\frac{1}{n}, n\right)\right)$;
   c, $\left(\left(\frac{\sin n}{n}, \frac{n^2-1}{n^2+1}\right)\right)$.

2. BT-e?

   a, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_k)$, $k = 1, 2, \infty$;
   b, $(C\,[a,b]\,, \|\cdot\|_\infty)$;
   c, $(C\,[a,b]\,, \|\cdot\|_\int)$.

4.3. Megoldások–Eredmények–Útmutatások

A/1/a, Igen.

A/1/b, Nem, mert sérül az első normatulajdonság.

A/2/a, A $k = \infty$ eset:

- $\max_{i\in\{1,\dots,n\}} |x_i| \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, és $= 0 \Leftrightarrow x_i = 0\ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
- $\max_{i\in\{1,\dots,n\}} |\lambda\, x_i| = \max_{i\in\{1,\dots,n\}}(|\lambda|\, |x_i|) = |\lambda|\ \max_{i\in\{1,\dots,n\}} |x_i|\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- $\max_{i\in\{1,\dots,n\}} |(x + y)_i| = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} |x_i + y_i| \leq \max_{i\in\{1,\dots,n\}}(|x_i| + |y_i|) \leq \max_{i\in\{1,\dots,n\}} |x_i| + \max_{i\in\{1,\dots,n\}} |y_i|\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$, ahol a második lépésben felhasználtuk az $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ NT-beli háromszög-egyenlőtlenséget.

A/2/b, $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$-re mutatjuk meg.

- $\max_{[a,b]} |f| \geq 0\ \forall f \in C[a, b]$ és $= 0 \Leftrightarrow f = 0$. (Ha f nem lenne minden pontban nulla, akkor $|f|$ maximuma pozitív lenne.)
- $\max_{[a,b]} |\lambda\, f| = \max_{[a,b]}(|\lambda|\, |f|) = |\lambda|\ \max_{[a,b]} |f| \quad \forall f \in C[a, b], \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- $\max_{[a,b]} |f + g| \leq \max_{[a,b]}(|f| + |g|) \leq \max_{[a,b]} |f| + \max_{[a,b]} |g| \quad \forall f, g \in C[a, b]$. Az első lépésben azt használtuk ki, hogy ha minden $x \in [a, b]$ helyen igaz $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ (ami persze igaz, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ NT-beli háromszög-egyenlőtlenség), akkor a maximumukra is igaz az egyenlőtlenség.

B/1 Tudjuk, hogy $\|a + b\| \geq \|a\| + \|b\|$. Először $a := x - y$, $b := y$, majd $a := y - x$, $b := x$.

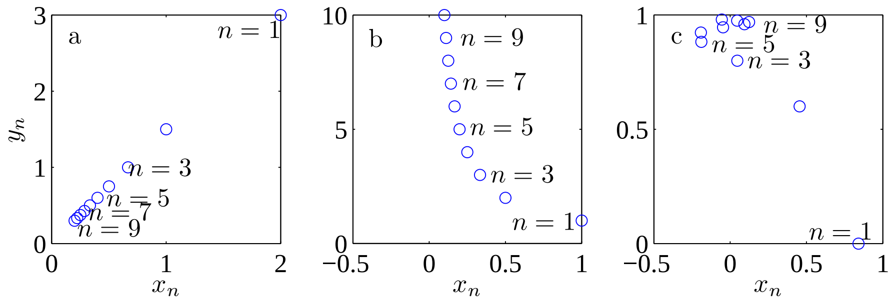
B/2/a, $\max_{i\in\{1,\dots,n\}} |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n \cdot \max_{i\in\{1,\dots,n\}} |x_i|$, hiszen egyetlen koordináta abszolút értéke nem lehet nagyobb, mint az összes koordináta abszolút értékének az összege, és az utóbbi nem lehet nagyobb, mint a legnagyobb tag szorozva a tagok számával.

C/1/a, A sorozatot lásd a 4.1.a ábrán. Három megoldást mutatunk.

- Tart a $(0, 0)$-hoz, ugyanis $\left\|\left(\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right) - (0, 0)\right\|_2 = \left\|\left(\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right)\right\|_2 = \sqrt{\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{n} \to 0$.
- Mivel $\mathbb{R}^2$ véges dimenziós, így rajta minden norma ekvivalens. A konvergenciát vizsgálhatjuk tetszőleges (az eredetivel ekvivalens) norma szerint. Válasszuk a $\|\cdot\|_\infty$ normát! Ekkor
$\left\|\left(\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right) - (0, 0)\right\|_\infty = \max\left\{\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right\} = \frac{3}{n} \to 0$.
- A véges dimenziót kihasználva, elegendő a koordináta-sorozatok konvergenciáját vizsgálni. Tehát konvergens, mivel koordinátánként konvergens: $\left(\frac{2}{n}\right) \to 0$, $\left(\frac{3}{n}\right) \to 0 \Rightarrow \left(\left(\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right)\right) \to (0, 0)$.

C/1/b, Nem konvergens, mert a második koordinátasorozata nem az (lásd 4.1.b ábra): $(n) \to +\infty$.

C/1/c, A sorozatot lásd a 4.1.c ábrán. Konvergens, mivel koordinátánként konvergens: $\left(\frac{\sin n}{n}\right) \to 0$ ($(\sin n)$ korlátos, $\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$), $\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right) \to 1$ (osszuk a számlálót és a nevezőt is n^2-tel) $\Rightarrow \left(\left(\frac{\sin n}{n}, \frac{n^2-1}{n^2+1}\right)\right) \to (0, 1)$



4.1. ábra. a) C/1/a feladat, b) C/1/b feladat, c) C/1/c feladat.

FEJEZET **5**

Normált terek – folytonos lineáris leképezések

Kulcsszavak:
folytonos leképezés, folytonos lineáris leképezés, korlátos leképezés

5.1. Elméleti összefoglaló

A normált terek között ható leképezések differenciálszámításában szükségünk lesz a folytonos lineáris leképezés fogalmára.

5.1. Definíció. Legyenek X, Y normált terek. Az $A : X \to Y$ leképezés *folytonos* az $x_0 \in X$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz $\exists \delta > 0$, hogy $\|x - x_0\|_X < \delta$ esetén $\|A(x) - A(x_0)\|_Y < \varepsilon$. Az $A : X \to Y$ leképezés folytonos, ha $\forall x_0 \in X$-ben folytonos.

Belátható, hogy egy lineáris leképezés pontosan akkor folytonos, ha folytonos a 0_X-ben. Az $X \to Y$ folytonos lineáris leképezések halmazát $\mathrm{Lin}(X, Y)$ jelöli. Ha $X = Y$, akkor a $\mathrm{Lin}(X)$ jelölést alkalmazzuk. Ha X véges dimenziós, akkor $\mathrm{Hom}(X) = \mathrm{Lin}(X)$, vagyis ebben az esetben egy lineáris leképezés mindig folytonos is. Így tehát speciálisan minden $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés automatikusan folytonos is.

5.2. Definíció. Egy $A : X \to Y$ leképezést *korlátos*nak nevezünk, ha korlátos halmazt korlátos halmazba visz.

5.1. Lemma. *Az $A : X \to Y$ lineáris leképezés korlátos, ha létezik $K \geq 0$ konstans, melyre $\|Ax\|_Y \leq K\|x\|_X$ teljesül $\forall x \in X$-re.*

5.2. Tétel. *Egy lineáris leképezés pontosan akkor folytonos, ha korlátos.*

Belátható, hogy a $\mathrm{Lin}(X, Y)$ halmaz a pontonkénti összeadás és skalárral való szorzás műveletével ellátva vektorteret alkot. Ezen a vektortéren is értelmezhetünk normát a következőképpen:

5.3. Definíció. Az $A \in \mathrm{Lin}(X, Y)$ *leképezés (indukált) normáján* az

$$\|A\| := \sup_{x \in X, x \neq 0_X} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

valós számot értjük.

Megmutatható, hogy

$$\|A\| = \sup_{x \in X, x \neq 0_X} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x \in X, \|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y .$$

Illetve $\|A\| = \inf\{K > 0 :$ ahol K az 5.1. lemma szerinti állandó.$\}$ Az $\|A\|$ norma tehát a lehetséges legnagyobb nyújtás mértékét fejezi ki.

5.2. Feladatok

A, *linearitás, folytonosság, korlátosság*

1. Lássuk el $\mathbb{R}^2$-t a $\|\cdot\|_\infty$ normával. A 3/B/1 feladat operátorai közül melyek korlátosak illetve melyek folytonosak?
2. Vizsgáljuk meg a következő $X \to Y$ operátorokat, ahol X, Y NT-ek, hogy lineárisak, korlátosak illetve folytonosak-e?
   a, X, Y tetszőleges NT, $b \in Y$, $Ax = b$; ↠
   b, $X = Y = (\mathbb{R}, |\cdot|), Ix = x$; ↠
   c, $X = Y = (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$, $Af = af$, ahol $a \in C[a, b]$ rögzített;
   d, $X = (C^1[0, 2\pi], \|\cdot\|_\infty)$, $Y = (C[0, 2\pi], \|\cdot\|_\infty)$, $Df = f'$; ↠
   e, $X = (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$, $Y = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $Rf = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$;
   f, $X = (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$, $Y = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $Sf = \sup_{x \in [0,1]} f(x)$; ↠
   g, $X = (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$, $Y = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $Nf = f(0)$. ↠

B, *operátornorma*

1. Tekintsük az A/ rész példáit. Amelyik leképezés ezek közül folytonos lineáris, ott határozzuk meg a leképezés normáját! ↠

C, *mátrixnorma*

1. Az alábbi esetekben hogyan határozhatjuk meg egy lineáris leképezés normáját, ha adott a mátrixa?
   a, $A : (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$;
   b, $A : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$;
   c, $A : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$.

5.3. Megoldások–Eredmények–Útmutatások

AB/2/a,

- A akkor és csak akkor lineáris, ha $b = 0$. Ugyanis
1. $b = A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) = b + b \Leftrightarrow b = 0$; illetve 2. $b = A(\lambda x) = \lambda A(x) = \lambda b \Leftrightarrow b = 0$.
- A korlátos, ugyanis minden korlátos halmaz (sőt, minden halmaz) képe az egyelemű $\{b\}$ halmaz, ami korlátos (mert minden elemére teljesül, hogy a normája $\leq K := \|b\|$).
- A folytonos. Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy bármely $x_0 \in X$ és $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$: $\|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon$, ha $\|x - x_0\|_X < \delta$. A $\delta = 1$ választás jó lesz, hiszen $\|Ax - Ax_0\|_Y = \|b - b\|_Y = 0$.

Ha $b = 0$, akkor az A (azonosan 0) leképezés normája:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X=1} \|0\|_Y = 0 .$$

AB/2/b, Vegyük észre, hogy ez a megszokott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ függvény!

- I lineáris, ugyanis
1. $I(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 = I(x_1) + I(x_2)$; illetve 2. $I(\lambda x) = \lambda x = \lambda I(x)$.
- I folytonos, hiszen a NT-ek beli folytonosság definíciójának speciális eseteként kapjuk a valós, egyváltozós függvények folytonossági definícióját, így az identitás folytonos leképezés ($\delta := \varepsilon$).
- I korlátos, mert lineáris és folytonos. Figyelem, az két különböző fogalom, hogy *korlátos* egy leképezés, illetve hogy *korlátos értékkészletű*!

Az I leképezés normája:

$$\|I\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ix\|_Y = \sup_{|x|=1} |x| = 1 .$$

A/2/d,

- D lineáris leképezés, mivel $\forall f, g \in C^1[0, 2\pi]$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén
1. $D(f + g) = (f + g)' = f' + g' = Df + Dg$, illetve 2. $D(\lambda f) = (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda Df$.
- D nem korlátos, mert van olyan halmaz, ami korlátos, de a képe nem az. Tekintsük ugyanis az $f_n(x) = \sin nx$, $n \in \mathbb{N}^+$ függvények halmazát. Ez a halmaz korlátos, mivel $\|f_n\|_\infty = \max_{[0,2\pi]} |\sin nx| = 1$. Viszont $\|Df_n\|_\infty = \|f_n'\|_\infty = \|n \cos nx\|_\infty = \max_{[0,2\pi]}(|n \cos nx|) = n \to \infty$. D tehát ezt a korlátos halmazt nem korlátosba viszi át $\Rightarrow$ D nem korlátos.
- D nem folytonos, mert lineáris és nem korlátos.

A/2/f,

- S nem lineáris, ugyanis legyen pl. $f(x) = x$ és $g(x) = -x$. Ekkor $S(f + g) = S(x - x) = S(0) = \sup_{[0,1]}(0) = 0 \neq Sf + Sg = \sup_{[0,1]} x + \sup_{[0,1]}(-x) = 1 + 0 = 1$.

- S korlátos, ugyanis minden korlátos halmaz képe korlátos. Ennek igazolásához tekintsünk egy $H \subset C[0,1]$ tetszőleges korlátos halmazt. Ez azt jelenti, hogy $\exists K \in \mathbb{R}^+ : \forall f \in H$-ra $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f| \leq K$ teljesül. Következésképpen $K \geq \sup_{[0,1]} |f| \geq |\sup_{[0,1]} f| = \|Sf\|$ is teljesül, viszont ez éppen a halmaz képének korlátosságát jelenti.
- S folytonos. Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy bármely $f_0 \in C[0,1]$ és $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$: $\|Sf - Sf_0\| = |\sup_{[0,1]} f - \sup_{[0,1]} f_0| < \varepsilon$, ha $\|f - f_0\|_X = \sup_{[0,1]} |f - f_0| < \delta$ $(f \in C[0,1])$. $\delta := \varepsilon$ választás jó lesz, hiszen $|\sup_{[0,1]} f - \sup_{[0,1]} f_0| \leq \sup_{[0,1]} |f - f_0|$.

AB/2/g,

- N lineáris, ugyanis $\forall f, g \in C[0,1]$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén 1. $N(f+g) = (f+g)(0) = f(0) + g(0) = Nf + Ng$, illetve 2. $N(\lambda f) = (\lambda f)(0) = \lambda f(0) = \lambda N f$.
- N korlátos, ugyanis ha $H \subset C[0,1]$ korlátos halmaz, akkor $\exists K \in \mathbb{R}^+$: $\sup_{[0,1]} |f| \leq K$. Ekkor $|f(0)| \leq K \Rightarrow H$ képe is korlátos.
- Mivel N lineáris és korlátos, így folytonos is.

N normája:

$$\|N\| = \sup_{f \in X, f \neq 0} \frac{\|Nf\|_Y}{\|f\|_X} = \sup_{f \in C[0,1], f \neq 0} \frac{|Nf|}{\sup_{[0,1]} |f|} = \sup_{f \in C[0,1], f \neq 0} \frac{|f(0)|}{\sup_{[0,1]} |f|} = 1\,,$$

ugyanis a hányados minden $f \in C[0,1]$ függvényre nyilván kisebb, mint 1, és egy olyan f függvényre a legnagyobb, amelyre $|f|$ a szupremumát a 0-ban veszi fel (pl. az azonosan 1 függvény a $[0,1]$ intervallumon), ebben az esetben pedig a hányados 1 és így a szuprémum is.

1. minta zárthelyi

1. Metrikát definiálnak-e $\mathbb{R}$-en? (1+3 p)

   a, $d_a(x, y) = |xy|$;

   b,
   $$d_b(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ ha } x = y \\ |x| + |y|, \text{ ha } x \neq y \end{cases} .$$

2. Tekintsük az $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ MT-et és benne a következő halmazt: $H = \{(-2)^n : n \in \mathbb{N}\} \cup (-2, 2)$. Adjuk meg a torlódási, belső, külső és határpontjainak halmazát, döntsük el, hogy nyílt-e, zárt-e a halmaz! *Itt elegendő az eredményt megadni, indoklás nem szükséges!* (6 p)

3. A Banach-féle fixponttétel alkalmazásával szeretnénk közelíteni az $x = \frac{1}{2}e^{-x}$ egyenlet megoldását. Mi a teendő, ha azt szeretnénk garantálni, hogy a hiba kisebb legyen, mint 10^{-3}? (6 p)

4. Tekintsük $\mathbb{R}^2$-et, mint $\mathbb{R}$ feletti vektorteret. Normát definiálnak-e a következő hozzárendelések? (3+2 p)

   a, $(x_1, x_2) \mapsto |x_1| + |x_2|$; b, $(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2$.

5. Konvergensek-e az $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ NT-ben a következő sorozatok? (1.5+1.5 p)

   a, $((\frac{1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}))$;

   b, $(((-1)^n, 1))$.

6. Tekintsük a következő hozzárendeléssel megadott $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operátorokat: (3+3+2 p)
   i, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 + x_2)$; ii, $(x_1, x_2) \mapsto (1, 0)$.

   a, Lineárisak-e?

   b, Ha igen, mik a sajátvektorai és a hozzájuk tartozó sajátértékei? Mi a mátrixa a szokásos bázisban? *Itt elegendő az eredményt megadni, indoklás nem szükséges!*

   c, $\mathbb{R}^2$-et ellátjuk a $\|\cdot\|_\infty$ normával. Amelyik leképezés lineáris, ott adjuk meg az indukált normáját! *Elég rajzzal indokolni!*

7. Vizsgáljuk meg a következő $X \to Y$ – ahol X, Y NT-ek – operátorokat, hogy lineárisak, korlátosak illetve folytonosak-e? Ha korlátos és lineáris, akkor mi a normája? (3+5 p)

   a, $X = Y = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $f(x) = x^2$;

   b, $X = (\{(x_n) : \exists \lim x_n\}, \|\cdot\|_\infty)$, ahol $\|(x_n)\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}^+\}$, $Y = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $L(x_n) = \lim x_n$.

FEJEZET **7**

Normált terek – határérték, folytonosság

Kulcsszavak:

határérték, folytonosság, átviteli elv, parciális deriváltak

7.1. Elméleti összefoglaló

Kiterjesztjük a határérték és a folytonosság fogalmát normált térből normált térbe képező függvényekre.

7.1. Definíció. Legyenek X és Y normált terek, $D(f) \subset X$, $f : D(f) \to Y$, és $x_0 \in D(f)'$. Ekkor az $a \in Y$ elem az f függvény x_0-beli *határértéke*, ha $\forall \varepsilon > 0$ számhoz $\exists \delta > 0$, hogy $x \in D(f)$ és $\|x - x_0\|_X < \delta$ esetén $\|f(x) - a\|_Y < \varepsilon$. Jelölése: $\lim_{x_0} f = a$.

7.2. Definíció. Legyenek X és Y normált terek, $D(f) \subset X$, $f : D(f) \to Y$, és $x_0 \in D(f)$. Az f függvény *folytonos* az x_0 pontban, ha $\forall \varepsilon > 0$ számhoz $\exists \delta > 0$, hogy $x \in D(f)$ és $\|x - x_0\|_X < \delta$ esetén $\|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon$.

Ezen két fogalom kapcsolatát a következő lemma írja le.

7.1. Lemma. *Legyenek X és Y normált terek, $D(f) \subset X$, $f : D(f) \to Y$ és $x_0 \in D(f) \cap D(f)'$. Ekkor f pontosan akkor folytonos az x_0-ban, ha létezik x_0-ban határértéke, és az egyenlő az $f(x_0)$ helyettesítési értékkel.*

A határérték vizsgálatában sok esetben jól használható az alábbi tétel (ún. *átviteli elv*), amely a függvény határértékének a vizsgálatát visszavezeti sorozatok határértékeinek vizsgálatára.

7.2. Tétel. *Legyenek X és Y normált terek, $D(f) \subset X$, $f : D(f) \to Y$ és $x_0 \in D(f)'$. Ekkor a következő két állítás ekvivalens.*

1. $\lim_{x_0} f = a$.
2. $\lim f(x_n) = a$ *teljesül* $\forall (x_n)$ *sorozatra, melyre* $x_n \in D(f)$, $x_n \neq x_0$ *és* $\lim x_n = x_0$.

Legyenek X és Y normált terek. Ekkor bevezetjük a következő jelölést: $D(f) \subset X$, $f : D(f) \to Y$, helyett röviden csak $f : X \hookrightarrow Y$-t fogunk írni.

Ha $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$, akkor az egyváltozós függvények deriváltját általánosítva értelmezzük az ún. parciális deriváltakat. Speciálisan, legyen $f : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}$, és (x_0, y_0) belső pontja $D(f)$-nek. Ekkor, ha a rögzített $y = y_0$ pont esetén létezik és véges a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

határérték, illetve a rögzített $x = x_0$ pont esetén létezik és véges a

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

határérték, akkor ezeket az f függvény (x_0, y_0) pontbeli, x ill. y változó szerinti parciális deriváltjainak nevezzük. (Hasonlóan, ha $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$, akkor az x_i változó szerinti parciális derivált értelmezéséhez a függvény összes többi változóját rögzítjük.) Jelölésük: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ill. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. A parciális deriváltak azt mutatják meg, hogy az (x_0, y_0) pontban az x ill. az y tengellyel párhuzamos irány mentén milyen meredek a függvény. Ha egy $T \subset D(f)$ tartományban léteznek a parciális deriváltak, akkor azt a függvényt, amely minden $(x, y) \in T$ ponthoz hozzárendeli az x (ill. y) szerinti parciális deriváltat, az f függvény x (ill. y) szerinti parciális deriváltfüggvényének nevezzük. Amennyiben ezek is parciálisan differenciálhatók, képezhetjük mindkét változó szerint újabb parciális deriváltjaikat. Így a másodrendű parciális deriváltakat kapjuk. Ezek jelölése:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} =: \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} =: \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} =: \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} =: \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

A középsők az ún. vegyes parciális deriváltak.

7.2. Feladatok

A, *NT: függvények határértéke*

1. Lássuk el $\mathbb{R}^2$-et az euklideszi normával és $\mathbb{R}$-t pedig az $|\cdot|$ normával. Van-e határértéke az alábbi $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ függvényeknek a $(0,0)$ pontban? - - →

   a, $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$;

   b, $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$;

   c, $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

B, *NT: folytonosság (általános eset, nemlineáris leképezések esete)*

1. Lássuk el $\mathbb{R}^2$-et az euklideszi normával és $\mathbb{R}$-t pedig az $|\cdot|$ normával. Folytonosak-e az alábbi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények a $(0,0)$ pontban? - - →

   a,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & , \text{ha } (x, y) = (0,0), \\ \frac{xy^2}{x^3+y^3} & , \text{egyébként}; \end{cases}$$

b,

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{, ha } (x,y)=(0,0), \\ \frac{2xy^2}{x^2+y^4} & \text{, egyébként ;} \end{cases}$$

2. Lássuk el $\mathbb{R}^2$-et az euklideszi normával és $\mathbb{R}$-t pedig az $|\cdot|$ normával. Folytonos-e az alábbi $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény az $(1,1)$ pontban? $\dashrightarrow$

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{, ha } (x,y)=(1,1), \\ \frac{2(x-1)(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2} & \text{, egyébként .} \end{cases}$$

C, *NT: parciális deriváltak*

1. Határozzuk meg az alábbi $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ függvények parciális deriváltjait!

   a, $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$;

   b, $g(x,y)=x^y$, $(x\in\mathbb{R}^+)$;

   c, $h(x,y,z)=x^{y^z}$, $(x,y\in\mathbb{R}^+)$;

   d, $k(x,y)=\arcsin\frac{x}{y}$.

2. Mutassuk meg, hogy az alábbi függvénynek léteznek a parciális deriváltjai a $(0,0)$ pontban, pedig láttuk, hogy nem folytonos ott (lásd A/1/a,)!

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{, ha } (x,y)=(0,0), \\ \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{, egyébként .} \end{cases}$$

3. Mutassuk meg, hogy az alábbi függvény vegyes parciális deriváltjai megegyeznek! $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\ln(x+e^y)$, $(x\in\mathbb{R}^+)$.

4. Számítsuk ki a következő parciális deriváltakat!

   a, $\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}(x\ln xy)$;

   b, $\frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}(e^{xyz})$.

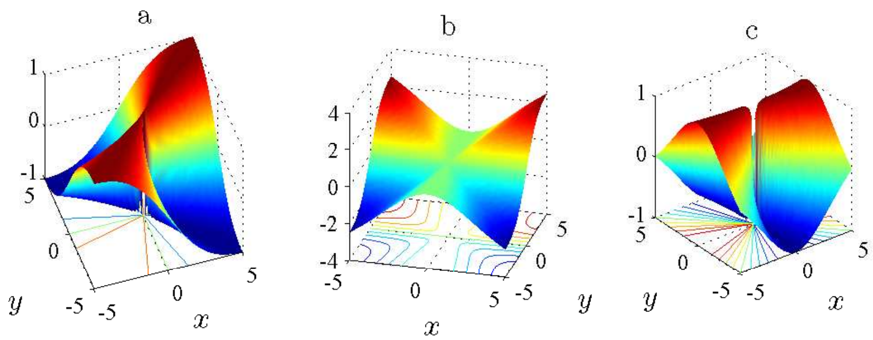
5. Tekintsük a $v:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $v(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ függvényt! Igazoljuk, hogy $\Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$!

7.3. Megoldások–Eredmények–Útmutatások

A/1/a, Nincs, közeledjünk mx egyenesek mentén, vagy térjünk át polárkoordinátákra (7.1.a ábra).

A/1/b, Van, térjünk át polárkoordinátákra (7.1.b ábra).

A/1/c, Nincs, közeledjünk mx egyenesek mentén, vagy térjünk át polárkoordinátákra (7.1.c ábra).

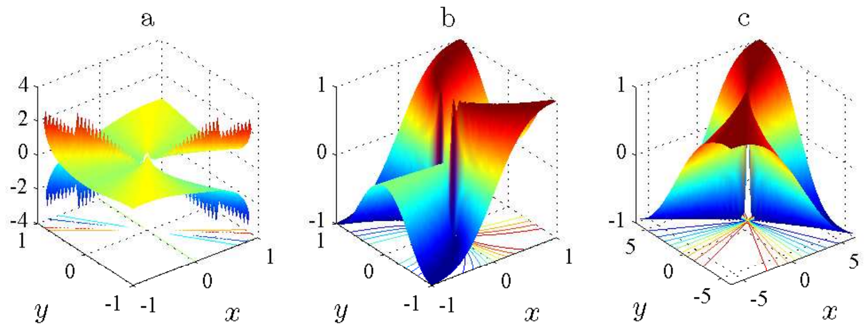


7.1. ábra. a) A/1/a feladat, b) A/1/b feladat, c) A/1/c feladat.

B/1/a, Nem, térjünk át polárkoordinátákra (7.2.a ábra).

B/1/b, Nem, közeledjünk $\sqrt{x}$ mentén, vagy térjünk át polárkoordinátákra (7.2.b ábra).

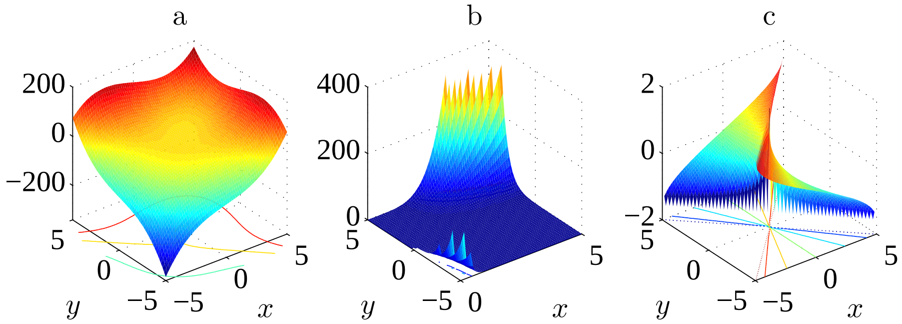
B/2 Alkalmazzuk a következő helyettesítést: $z := x - 1$, $w := y - 1$ és utána lásd A/1/a (7.2.c ábra).



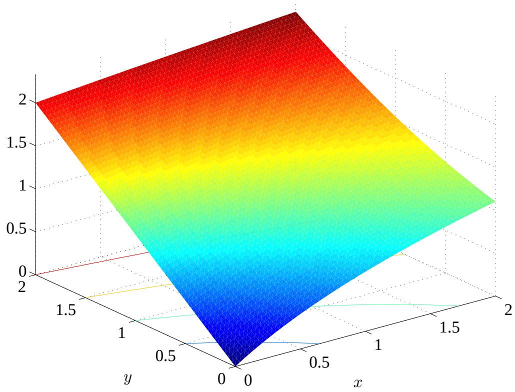
7.2. ábra. a) B/1/a feladat, b) B/1/b feladat, c) B/2. feladat.

C/1 Lásd 7.3. ábra.

C/3 Lásd 7.4. ábra.



7.3. ábra. a) C/1/a feladat, b) C/1/b feladat, c) C/1/d feladat.



7.4. ábra. C/3. feladat.

FEJEZET 8

Normált terek – differenciálszámítás I.

Kulcsszavak:

kisrendű függvény, differenciálhatóság, derivált, Jacobi-mátrix, érintő

8.1. Elméleti összefoglaló

A derivált fogalmát kiterjesztjük tetszőleges normált térből normált térbe képező függvényekre.

Vegyük észre, hogy a valós függvények deriváltjának

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

definíciója nem vihető át egy az egyben $f : X \hookrightarrow Y$ függvényekre, ahol X és Y tetszőleges normált terek, ugyanis normált terekben nem értelmeztük az osztás műveletét. Egy valós f függvény x_0-beli deriváltjának létezése azonban ekvivalens a következővel:

$$\exists a \in \mathbb{R} : \quad \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{|x - x_0|} \to 0, \text{ ha } x \to x_0.$$

Ezt az a számot az f függvény x_0-beli deriváltjának nevezzük, és az $f'(x_0)$ szimbólummal jelöljük. Kicsit másképpen megfogalmazva, létezik olyan a valós szám, amelyre az $r(x) := f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)$ függvény a) értelmezve van x_0 egy környezetében, b) $r(x_0) = 0$, és c) $\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{|x - x_0|} = 0$. Azaz $\exists a \in \mathbb{R}$, hogy x_0 valamely $K(x_0)$ környezetében $f(x) - f(x_0) = a(x - x_0) + r(x)$, ahol r x_0-ban rendelkezik a fenti a), b) és c) tulajdonsággal (ún. x_0-ban kisrendű függvény). A fenti észrevétel lehetőséget ad a derivált fogalmának kiterjesztésére.

8.1. Definíció. Legyenek X és Y normált terek. Az $r : X \hookrightarrow Y$ függvény *kisrendű* az $x_0 \in X$ pontban, ha

a) r értelmezve van x_0 egy $K(x_0)$ környezetében;

b) $r(x_0) = 0$;

c) $\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{\|x - x_0\|} = 0$.

8.2. Definíció. Legyenek X és Y normált terek, $D(f) \subset X$, $f : D(f) \to Y$, $x_0 \in \mathrm{int} D(f)$. Azt mondjuk, hogy f *(totálisan) differenciálható* x_0-ban, ha $\exists K(x_0) \subset D(f)$ környezet, melyre

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + r(x)$$

egyenlőség teljesül $\forall x \in K(x_0)$ esetén, ahol $A \in \mathrm{Lin}(X, Y)$, és $r : X \hookrightarrow Y$ x_0-ban kisrendű függvény.
Ekkor az $A \in \mathrm{Lin}(X, Y)$ elemet az f függvény x_0-beli *derivált*jának nevezzük, és $f'(x_0)$-val jelöljük.

Általánosítjuk az érintő fogalmát is.

8.3. Definíció. Legyenek X és Y normált terek. Az $f : X \hookrightarrow Y$ x_0-ban differenciálható függvény x_0-beli *érintő*jének nevezzük az $s(x) = A(x - x_0) + f(x_0)$ függvényt, ahol $x \in K(x_0)$.

A gyakorlatban igen fontos az a speciális eset, amikor $X = \mathbb{R}^n$, és $Y = \mathbb{R}^m$.

8.1. Tétel. *Ha $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ differenciálható az $x_0 \in \mathrm{int} D(f)$ pontban, akkor*

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \partial_2 f_1(x_0) & \dots & \partial_n f_1(x_0) \\ \partial_1 f_2(x_0) & & & \partial_n f_2(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) & \dots & \dots & \partial_n f_m(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \tag{8.1}$$

ahol f_i, $i = 1, 2, \dots, m$ jelöli f i-edik koordináta-függvényét.
A (8.1) mátrixot az f függvény Jacobi-mátrix*ának nevezzük.*

8.2. Tétel. *Az $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ függvény (folytonosan) differenciálható az $x_0 \in \mathrm{int} D(f)$ pontban, ha minden koordináta-függvényének létezik mindegyik változó szerinti parciális deriváltja az x_0 pontban, és azok folytonosak is ebben a pontban.*

8.2. Feladatok

A, *NT: differenciálhatóság*

1. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y$ és $x_0 = (1, 2)$. Mutassuk meg a definíciót használva, hogy $f'(x_0) = (2, 1)$. $\twoheadrightarrow$
2. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (xy, x - y)$ és $x_0 = (2, 4)$. Számítsuk ki a Jacobi-mátrixot az x_0 helyen, és mutassuk meg a definíciót használva, hogy ez egyenlő $f'(x_0)$-lal! $\twoheadrightarrow$
3. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2 + y^2, xy)$ és $x_0 = (1, 1)$. Számítsuk ki a Jacobi-mátrixot az x_0 helyen, és mutassuk meg a definíciót használva, hogy ez egyenlő $f'(x_0)$-lal!

4. A definíció összhangban van az 1D-beli definícióval: Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a következő:

   a, $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$. Mutassuk meg a definíciót használva, hogy $f'(x_0) = 4$. $\twoheadrightarrow$

   b, $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$. Mutassuk meg a definíciót használva, hogy $f'(x_0) = 12$.

5. Határozzuk meg az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x^2 y, y + z)$ függvény deriváltját a $(0, 1, 2)$ helyen! $\twoheadrightarrow$

6. Adjunk példát olyan függvényre, mely minden irányból folytonos a $(0, 0)$ pontban, sőt ott minden irányban differenciálható, de (totálisan) nem differenciálható! $\dashrightarrow$

7. Mutassuk meg, hogy az alábbi függvény folytonos a $(0, 0)$ pontban, ott minden irányban differenciálható, de (totálisan) nem differenciálható! $\twoheadrightarrow$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

B, *érintősík*

1. Tekintsük a $z = 2x^2 - 3y^2$ egyenlet által meghatározott felületet! Mi ezen felület $P(-2, 1, 5)$ pontbeli érintősíkjának egyenlete? $\twoheadrightarrow$

2. Számítsuk ki közelítőleg a megadott kifejezések értékét a megadott függvények adott pontjában vett érintősíkjának segítségével! $\twoheadrightarrow$

   a, $e^{0,05} \sin(\frac{\pi}{2} - 0,1) \approx ?\,;\ f(x, y) = e^x \sin y\,;\ (0, \frac{\pi}{2})\,;$

   b, $\sin(\frac{\pi}{2} - 0,1) \cos(\frac{\pi}{2} - 0,2) \approx ?\,;\ f(x, y) = \sin x \cos y\,;\ (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\,.$

8.3. Megoldások–Eredmények–Útmutatások

A/1, $f'(x_0, y_0)$-ra egyetlen lehetséges jelölt van, mégpedig $(\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0))$, f (x_0, y_0) pontbeli Jacobi-mátrixa. Ebben az esetben $(\partial_x f, \partial_y f) = (2x, 1)$, vagyis $(\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0)) = (2, 1)$.
A differenciálhatósághoz még ellenőriznünk kell, hogy az $r(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - f'(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)^T$ függvény kisrendű-e (x_0, y_0)-ban.
Vagyis

- $r(x_0, y_0) = (0, 0)\,;$ illetve
- $\lim_{(x_0,y_0)} \frac{r(x,y)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|} = 0$ teljesül-e.

$$r(x, y) = x^2 + y - 3 - (2, 1) \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix} = x^2 - 2x + 1\,.$$

- $r(1, 2) = (0, 0)$ (hiszen r így lett megkonstruálva)
- A véges dimenziót ($\dim \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim \mathbb{R} = 1$) kihasználva tetszőleges normákat választhatunk. Válasszuk most a következőket: $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, illetve $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

$$\lim_{(1,2)} \frac{r(x, y)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|_2} = \lim_{(1,2)} \frac{\left|x^2 - 2x + 1\right|}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}} = \lim_{(1,2)} \frac{(x - 1)^2}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}}$$

A $z := x - 1$, $w := y - 2$ helyettesítéssel

$$\lim_{(1,2)} \frac{(x - 1)^2}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}} = \lim_{(0,0)} \frac{z^2}{\sqrt{z^2 + w^2}}\,.$$

Polárkoordinátákra áttérve a hányados $r \cos^2 \varphi$, ami tart a 0-hoz.

Tehát az r függvény valóban kisrendű.

A/2, f Jacobi-mátrixa $J_f(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow J_f(2, 4) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
Ellenőrizzük, hogy az

$$r(x, y) = f(x, y) - f(2, 4) - J_f(2, 4) \cdot (x - 2, y - 4)^T =$$

$$\begin{pmatrix} xy \\ x - y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy - 4x - 2y + 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

függvény kisrendű-e $(2, 4)$-ben, azaz

- $r(x_0, y_0) = (0, 0)\,;$ illetve
- Euklideszi normát választva és a koordinátafüggvények konvergenciáját vizsgálva:

$$\lim_{(2,4)} \left| \frac{xy - 4x - 2y + 8}{\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2}} \right| = \lim_{(2,4)} \left| \frac{(x - 2)(y - 4)}{\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2}} \right|,$$

$z := x-2$, $w := y-4$ helyettesítéssel adódik, hogy a határérték 0 (lásd 7. fejezet A/1/a). A másik koordinátafüggvény 0, így ott automatikusan adódik a 0-hoz tartás.

Tehát r kisrendű, így a fenti Jacobi-mátrix valóban f deriváltja a megadott pontban.

A/4/a, Az $r(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = x^2 - 4(x-2) - 4 = (x-2)^2$ függvény kisrendű az $x_0 = 2$-ben, ugyanis 2-ben 0-t vesz fel, illetve $\frac{(x-2)^2}{|x-2|} = |x-2| \to 0$, ha $x \to 2$.

A/5, $J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow J_f(0,1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. A Jacobi-mátrix koordinátafüggvényei pedig folytonosak a $(0,1,2)$ pontban (persze nem csak ott), ami biztosítja az ebben a pontban való differenciálhatóságot. Tehát $f'(0,1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

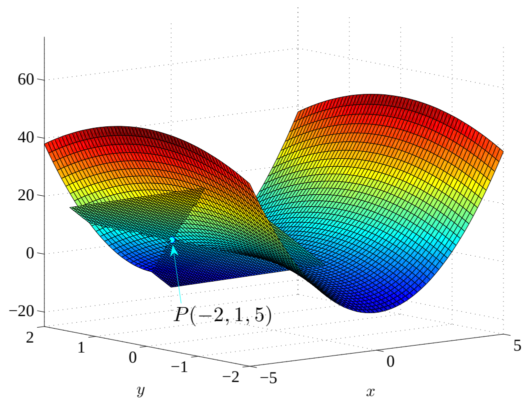
A/6, Legyen $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{azon } (x,y) \text{ pontokban, amelyekre } x>0 \text{ és } y=x^2, \\ 0 & \text{egyébként}. \end{cases}$

A/7,
- f folytonos a $(0,0)$-ban, mivel határértéke a $(0,0)$-ban 0, azaz éppen a $(0,0)$-beli helyettesítési érték (lásd 7.Gy/A/1/b,).
- Differenciálható minden irányban: az α irányszögű – vagyis az $l(t) = (t\cos\alpha, t\sin\alpha)$ egyenletű – egyenes mentén az iránymenti derivált $(f\circ l)'(0) = \cos\alpha\sin^2\alpha$.
- Ebből $\alpha = 0$-ra kapjuk az x szerinti parciális deriváltat: $\partial_x f(0,0) = 0$, és $\alpha = \frac{\pi}{2}$-re az y szerintit: $\partial_y f(0,0) = 0$. Ha tehát f differenciálható, akkor $f'(0,0) = (0,0)$ lehet csak. Az $r(x,y) = f(x,y) - f(0,0) - f'(0,0)\cdot(x,y)^T = f(x,y)$ függvény azonban nem kisrendű a nullában, ugyanis az $r(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ függvény nem tart 0-hoz (polárkordinátákra való áttéréssel adódik) $\Rightarrow f$ nem differenciálható a $(0,0)$-ban.

B/1, Az $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2$ függvény $P(-2,1)$-beli érintősíkját kell meghatározni. f differenciálható, hiszen az elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak. $f'(x,y) = (4x, -6y) \Rightarrow f'(-2,1) = (-8,-6)$. Az érintősík egyenlete $s(x,y) = f(x_0,y_0) + f'(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0)^T$, vagyis $s(x,y) = 5 + (-8,-6)\cdot(x+2, y-1)^T = -8x-6y-5$. (Lásd 8.1. ábra.)

B/2/a, f differenciálható, mert az elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak.
$f'(x,y) = (e^x\sin y, e^x\cos y) \Rightarrow f'(0,\frac{\pi}{2}) = (1,0)$.
Az érintősík egyenlete: $s(x,y) = f(0,\frac{\pi}{2}) + f'(0,\frac{\pi}{2})\cdot(x-0, y-\frac{\pi}{2})^T = x+1$.
$e^{0,05}\sin(\frac{\pi}{2} - 0,1) = f(0,05; \frac{\pi}{2} - 0,1) \approx s(0,05; \frac{\pi}{2} - 0,1) \approx 0,05 + 1 = 1,05$.

B/2/b, f differenciálható, mert az elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak.
$f'(x,y) = (\cos x\cos y, -\sin x\sin y) \Rightarrow f'(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) = (0,-1)$
$s(x,y) = f'(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\cdot(x-\frac{\pi}{2}, y-\frac{\pi}{2})^T + f(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) = -y + \frac{\pi}{2}$.
$\sin(\frac{\pi}{2} - 0,1)\cos(\frac{\pi}{2} - 0,2) \approx -(\frac{\pi}{2} - 0,2) + \frac{\pi}{2} = 0,2$.



8.1. ábra. B/1. feladat. A függvény és a $P(-2, 1, 5)$ pontbeli érintősík.

FEJEZET 9

Normált terek – differenciálszámítás II.

Kulcsszavak:
kompozíció differenciálása, iránymenti derivált, implicit alakban megadott függvény differenciálása

9.1. Elméleti összefoglaló

Normált térből normált térbe képező függvények kompozíciójának a differenciálására a láncszabályt alkalmazhatjuk:

9.1. Tétel. *Legyenek X, Y, Z normált terek. Ha $g : X \hookrightarrow Y$ differenciálható x_0-ban és $f : Y \hookrightarrow Z$ differenciálható $g(x_0)$-ban, akkor $f \circ g : X \hookrightarrow Z$ differenciálható x_0-ban, és*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \circ g'(x_0) \in \mathrm{Lin}(X, Z).$$

Egy speciális kompozíciófüggvény deriváltján alapul az iránymenti derivált fogalma.

9.1. Definíció. Legyenek X, Y normált terek, $f : X \hookrightarrow Y$, továbbá a és e olyan X-beli elemek, amelyekre $a \in \mathrm{int}D(f)$, és $\|e\| = 1$.

- Az $l(t) = a + te$, $l : \mathbb{R} \hookrightarrow X$, $D(l) = \{t \in \mathbb{R} : a + te \in D(f)\}$ függvényt az *a ponton átmenő, e irányú X-beli egyenes*nek nevezzük.
- Azt mondjuk, hogy az f függvény az a pontban e irányban differenciálható, ha az $f \circ l : \mathbb{R} \hookrightarrow Y$ függvény differenciálható a $t = 0$ pontban. Az $(f \circ l)'(0)$ deriváltat az f függvény *a pontbeli e irányú iránymenti derivált*jának nevezzük, és jelölésére a $\partial_e f(a)$ szimbólumot alkalmazzuk.

9.2. Tétel. *Legyenek X, Y normált terek, $f : X \hookrightarrow Y$ adott függvény, $a \in \mathrm{int}D(f)$ és $e \in X$, $\|e\| = 1$ adott vektorok. Ha f differenciálható a-ban (azaz létezik $f'(a) \in \mathrm{Lin}(X, Y)$), akkor tetszőleges e esetén létezik $\partial_e f(a) \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}, Y)$, és $\partial_e f(a) = f'(a) \circ e$.*

9.2. Feladatok

A, *kompozíció differenciálása*

1. Legyenek X, Y normált terek, illetve $\lambda \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg a definíciót használva, hogy ha $f : X \to Y$ differenciálható az $x_0 \in X$ helyen, akkor λf is differenciálható az x_0 helyen és $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.
2. Számítsuk ki $(f \circ g)'(t)$-t kétféleképpen!
   a, Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2 - 6x$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (3 \operatorname{ch} t, 5 \operatorname{sh} t)$. $\twoheadrightarrow$
   b, Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (-\sin t, 3 \cos t)$. $\rightarrow$

B, *iránymenti derivált*

1. Számítsuk ki az $f(x, y) = xy$ függvény alábbi irányok szerinti deriváltjait az $(1, 1)$ pontban. $\twoheadrightarrow$
   a, $e_1 = (1, 0)$; $e_2 = (0, 1)$;
   b, $e_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$; $e_4 = (1, 1)$.
   Melyik irányban lesz az f függvény deriváltja maximális illetve minimális?
2. Tekintsük a $z = 8 - 4x^2 - 2y^2$ egyenlet által meghatározott domborzatot! Melyik irányban fog elindulni ezen domborzat $P(1, 1, 2)$ pontjából az odahullott csapadék? $\twoheadrightarrow$

C, *parciális deriváltat tartalmazó egyenletek, implicit alakban megadott függvény differenciálása*

1. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényre és $u(x, y) = yf(x^2 - y^2)$ függvényre $y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = xu$! $\twoheadrightarrow$
2. Mutassuk meg, hogy az $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ függvényre a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ egyenl?ség teljesül! Keressünk további olyan u függvényeket, melyekre az egyenl?ség szintén teljesül! $\twoheadrightarrow$
3. Oldjuk meg a következő egyenleteket!
   a, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$; $\twoheadrightarrow$
   b, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
4. Határozzuk meg $y'(0)$-t az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ implicit alakban megadott függvényre. $\twoheadrightarrow$

9.3. Megoldások–Eredmények–Útmutatások

A/2/a, 1. $(f\circ g)(t) = f(3\operatorname{ch} t, 5\operatorname{sh} t) = 9-16\operatorname{sh}^2 t - 18\operatorname{ch} t \Rightarrow (f\circ g)'(t) = -32\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t - 18\operatorname{sh} t$.

2. $f'(x,y) = (2x-6, -2y)$, $f'(g(t)) = (6\operatorname{ch} t-6, -10\operatorname{sh} t)$, $g'(t) = (3\operatorname{sh} t, 5\operatorname{ch} t)$.

$$(f\circ g)'(t) = f'(g(t))\cdot g'(t) = (6\operatorname{ch} t-6, -10\operatorname{sh} t)\cdot\begin{pmatrix} 3\operatorname{sh} t \\ 5\operatorname{ch} t\end{pmatrix} = -32\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t - 18\operatorname{sh} t\,.$$

Lásd 9.1. ábra bal oldali oszlopának képei.

A/2/b, $(f\circ g)'(t) = -16\sin t\cos t + 9\cos^2 t - 9\sin^2 t$. Lásd 9.1. ábra jobb oldali oszlopának képei.

B/1/a, f differenciálható, mert az elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak. $f'(x,y) = (y,x) \Rightarrow f'(1,1) = (1,1)$.

$$\partial_{e_1} f(1,1) = f'(1,1)\cdot e_1 = (1,1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1\,;\quad \partial_{e_2} f(1,1) = f'(1,1)\cdot e_2 = (1,1)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1\,.$$

Lásd 9.2. ábra.

B/1/b, $\partial_{e_3} f(1,1) = (1,1)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T = \frac{2}{\sqrt{2}} = \partial_{e_4} f(1,1)$ (ugyanis e_4 normálva e_3).
Az iránymenti derivált maximális az $(1,1)$ irányban (a gradiensvektor iránya), minimális a vele éppen ellentétes $(-1,-1)$ irányban, ugyanis két adott hosszúságú vektor szorzata akkor maximális, ha a közbezárt szögük 0, illetve minimális, ha a közbezárt szög π. Lásd 9.2. ábra.

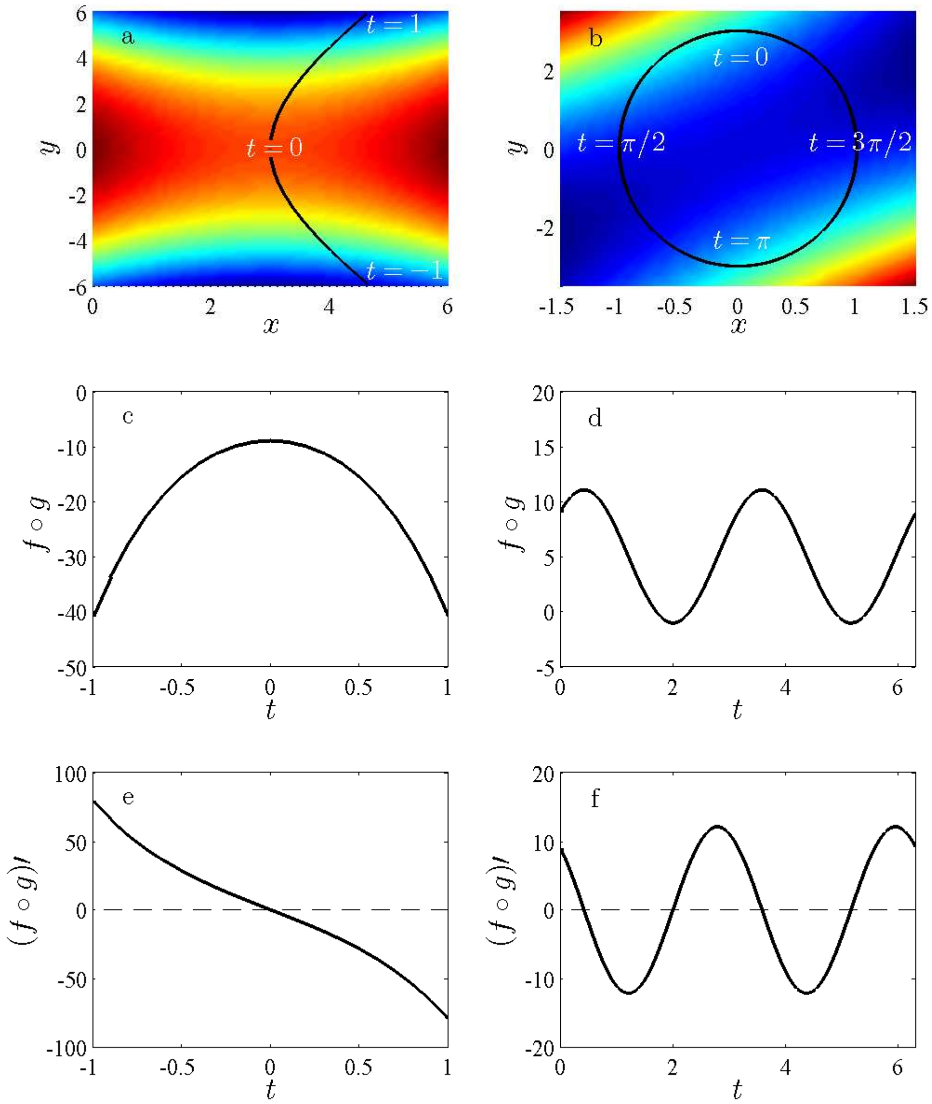
B/2, A kérdés átfogalmazható a következőképpen: az $f(x,y) = 8-4x^2-2y^2$ függvény $(x_0,y_0) = (1,1)$ pontjában melyik irányban a legkisebb az iránymenti derivált? $f'(x,y) = (-8x,-4y) \Rightarrow f'(1,1) = (-8,-4)$. Így, felhasználva a B/1/b, feladat megoldásánál használt indoklást, adódik, hogy a $(8,4)$ vektor (normálva: a $(\frac{8}{\sqrt{80}}, \frac{4}{\sqrt{80}})$) vektor irányában indul el a csapadék. Lásd 9.3. ábra.

C/1, $\frac{\partial u}{\partial x} = yf'(x^2-y^2)\cdot 2x\,;\ \frac{\partial u}{\partial y} = f(x^2-y^2) + yf'(x^2-y^2)\cdot(-2y)\,.$ Innen pedig behelyettesítéssel adódik az állítás.

C/2, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,.$ Hasonlóképpen adódik, hogy $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,.$ Majd behelyettesítve adódik az állítás.
További példák: $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} + ax + by + c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$ tetszőleges konstansok, $u(x,y) = xy$, $u(x,y) = e^x\cos y$ stb. (Az ilyen függvényeket *harmonikus függvényeknek* nevezzük.)

C/3/a, Jelölje $v(\xi,\eta)$ azt az $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvényt, amelyre $u(x,t) = v(x-t, x+t)$ minden $(x,t)\in\mathbb{R}^2$ pontban. Azaz, ha bevezetjük a $g(x,t) = (x-t, x+t)$ segédfüggvényt, akkor $u(x,t) = (v\circ g)(x,t)$.
Ekkor a parciális deriváltakat kétféleképpen kiszámítva:

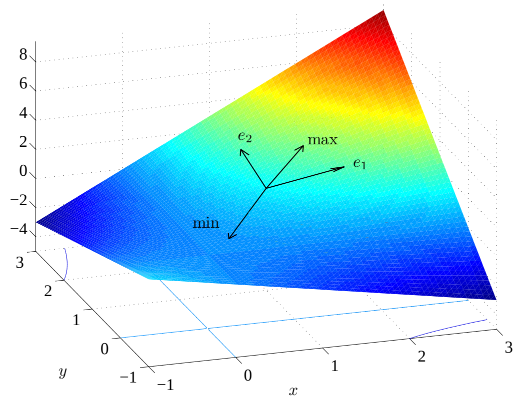
$$u'(x,t) = (\partial_x u(x,t), \partial_t u(x,t))\,.$$



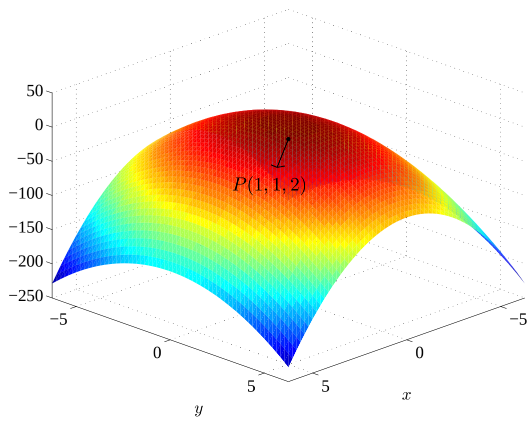
9.1. ábra. Bal oldal: A/2/a feladat, jobb oldal: A/2/b feladat: a) és b) $f(x, y)$ (színes felszín) és $g(t)$ (fekete görbe) függvények, c) és d) a kompozíciófüggvények (azaz milyen értékeket vesz fel f a g út mentén), e) és f) a kompozíciófüggvény deriváltja (vagyis hogyan változik f a g út mentén).

Másrészről

$$u'(x, t) = (v \circ g)'(x, t) = v'(g(x, t)) \cdot g'(x, t) \, .$$



9.2. ábra. B/1. feladat: a nyilak az e_1 és e_2 irányokba mutató, illetve a maximális és minimális iránymenti deriváltakat jelzik.



9.3. ábra. B/2. feladat: a $P(1,1,2)$ pontból a csapadék a nyíllal jelzett irányba fog elindulni.

A jobb oldalon az első tényező: $v'(\xi,\eta) = (\partial_\xi v(\xi,\eta), \partial_\eta(\xi,\eta))$, vagyis $v'(g(x,t)) = (\partial_{x-t} v(x-t,x+t), \partial_{x+t}(x-t,x+t))$.

A második tényező: $g'(x,t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

A mátrixszorzást elvégezve

$$u'(x,t) = (\partial_{x-t} v(x-t,x+t) + \partial_{x+t} v(x-t,x+t), -\partial_{x-t} v(x-t,x+t) + \partial_{x+t} v(x-t,x+t))\,.$$

Az $u'(x,t)$-re kapott két kifejezés összehasonlításából $\partial_x u(x,t) = \partial_{x-t} v(x-t,x+t) + \partial_{x+t} v(x-t,x+t)$, $\partial_t u(x,t) = -\partial_{x-t} v(x-t,x+t) + \partial_{x+t} v(x-t,x+t)$. Ezzel a $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$ differenciálegyenlet v-vel kifejezve az alábbi alakban írható fel:

$\partial_{x-t}v(x-t,x+t) = -\partial_{x-t}v(x-t,x+t)$, vagyis

$$\partial_{x-t}v(x-t,x+t) = 0\,.$$

Ez azt jelenti, hogy v olyan függvény, amely csak a második változójától függ. Tehát az egyenlet megoldása $v(x-t,x+t) = k(x+t)$, ahol $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tetszőleges differenciálható függvény. $\Rightarrow$ Az eredeti egyenlet megoldása: $u(x,t) = k(x+t)$, ahol $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tetszőleges differenciálható függvény.

C/4, Deriváljuk az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ egyenlet mindkét oldalát: $\frac{2x}{a^2}+\frac{2y\cdot y'(x)}{b^2}=0$. Fejezzük ki $y'(x)$-et: $y'(x) = -\frac{2xb^2}{a^2 2y}$. Az x helyére 0-t, y helyére $y(0)=|b|$-t írva $y'(0)=0$ (lásd 9.4. ábra, zöld szín az $(x,y)=(0,-2)$ és $(0,2)$ pontokban).

9.4. ábra. C/4. feladat $a=3$ és $b=2$ paraméterekkel. A színek $y'(x)$ értékét jelzik.

FEJEZET **10**

Normált terek – differenciálszámítás III.

Kulcsszavak:
szélsőérték, Taylor-sor, Taylor-polinom

10.1. Elméleti összefoglaló

Normált térből $\mathbb{R}$-be képező függvényekre általánosítható a lokális szélsőérték és a Taylor-sor fogalma.

10.1. Definíció. Az $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ függvénynek *lokális minimuma* (*maximuma*) van az $a \in D(f)$ pontban, ha van olyan $r > 0$, hogy $f(x) \geq f(a)$ $(f(x) \leq f(a))$ minden $x \in D(f) \cap K_r(a)$ pontra.

10.2. Definíció. Az $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ függvénynek *szigorú lokális minimuma* (*maximuma*) van az $a \in D(f)$ pontban, ha van olyan $r > 0$, hogy $f(x) > f(a)$ $(f(x) < f(a))$ minden a-tól különböző $x \in D(f) \cap K_r(a)$ pontra.

Az $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ függvények esetére megfogalmazunk két feltételt a lokális szélsőérték létezésére.

10.1. Tétel. *Ha f differenciálható az a pontban, és f-nek a-ban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a) = 0$.*

10.2. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható az $a \in \operatorname{int}D(f)$ pontban. Ha $f'(a) = 0$, és $f''(a)$ pozitív (negatív) definit, akkor f-nek szigorú lokális minimuma (maximuma) van a-ban. Ha $f''(a)$ indefinit, akkor a-ban nincs lokális szélsőérték.*

Emlékeztetőül, egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot pozitív (negatív) definit mátrixnak nevezünk, ha minden $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ vektorra $\langle Ax, x\rangle > 0$ $(\langle Ax, x\rangle < 0)$. Az A mátrix indefinit, ha $\langle Ax, x\rangle$ egyes x vektorokra pozitív, másokra negatív. Ha A szimmetrikus, akkor Sylvester tétele értelmében A pontosan akkor pozitív definit, ha az összes bal felső sarokaldeterminánsa pozitív, és pontosan akkor negatív definit, ha a bal felső sarokaldeterminánsok váltakozó előjelűek úgy, hogy az első sarokaldetermináns (azaz a bal felső elem) negatív. Megjegyezzük, hogy Young tétele értelmében ha f vegyes parciális deriváltjai mindkét sorrendben léteznek és folytonosan az a pont környezetében, akkor ebben az a pontban a vegyes parciális deriváltak egyenlők, így az $f''(a)$ mátrix szimmetrikus.

Általánosítjuk a Taylor-formulát $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ függvényekre, ahol X normált tér.

10.3. Tétel. *Legyen $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ (X normált tér), és $x \in X$ olyan pont, amelyre az $[a, x]$ szakasz benne van $D(f)$-ben. Tegyük fel, hogy f $m+1$-szer differenciálható az $[a, x]$ szakasz minden pontjában. Ekkor létezik η az $[a, x]$ szakasz belsejében, hogy*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{m+1}(\eta)}{(m+1)!}(x-a)^{m+1}.$$

Itt $(x-a)^k$ azt az X^k-beli vektort jelöli, amelynek minden komponense $(x-a)$-val egyenlő.

10.3. Definíció. A $p(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ függvényt az *f függvény a középpontú m-edfokú Taylor-polinom*jának nevezzük.

Fontos speciális esetként felírjuk egy $f : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}$ függvény (x_0, y_0) pont körüli másodfokú Taylor-polinomját:

$$p(x, y) = f(x_0, y_0) + f'(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x - x_0)^2 +$$
$$\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y - y_0)^2.$$

10.2. Feladatok

A, *szélsőérték*

1. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$. Határozzuk meg f"$(0, 0)$-t! ↠
2. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + y^3$. Határozzuk meg f"$(1, 1)$-t! ↠
3. Tekintsük a $z = 4x^2 + 2y^2 - 8$ egyenlet által meghatározott domborzatot! Ezen domborzat melyik pontjában fog összegyűlni a környezetében lehullott csapadék? ↠
4. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$. Van-e f-nek lokális szélsőértékhelye? ↠
5. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

   a, $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 6xy + 10x - 6y + 25$;
   b, $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 6xy - 6y + 25$. ↠

   Keressük meg f lokális szélsőértékhelyeit.

6. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$. Mi a legnagyobb értéke f-nek a $H = \{(x, y) : 0 \le x \le \pi/2,\ 0 \le y \le \pi/2\}$ halmazon? $\twoheadrightarrow$

B, *Taylor-sor*

1. Számítsuk ki közelítőleg az $e^{0,05} \sin(\frac{\pi}{2} - 0,1)$ kifejezés értékét Taylor-polinom segítségével! $\twoheadrightarrow$
   a, Használjunk elsőfokú Taylor-polinomot. Mi a geometriai jelentése az elsőfokú Taylor-polinomnak?
   b, Használjunk másodfokú Taylor-polinomot.

10.3. Megoldások–Eredmények–Útmutatások

A/1, A másodrendű parciális deriváltak folytonosak, így f'' létezik. $f'(x,y)=(y,x)$,

$$f''(x,y)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\Rightarrow f''(0,0)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

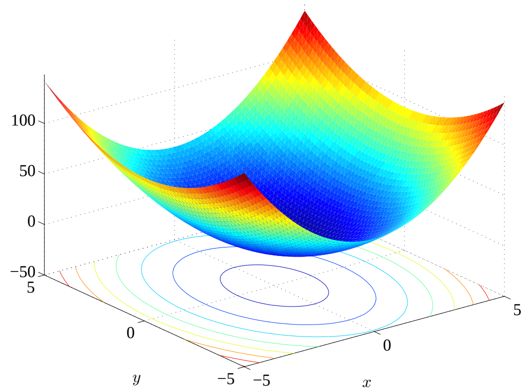
A/2, A másodrendű parciális deriváltak folytonosak, így f'' létezik. $f'(x,y)=(3x^2,3y^2)$,

$$f''(x,y)=\begin{pmatrix}6x&0\\0&6y\end{pmatrix}\Rightarrow f''(1,1)=\begin{pmatrix}6&0\\0&6\end{pmatrix}.$$

A/3, Az $f(x,y)=4x^2+2y^2-8$ függvény minimumhelyét keressük.
f az egész $\mathbb{R}^2$-n kétszer differenciálható (végtelen sokszor is). Szélsőértékhelye csak ott lehet, ahol 0 a deriváltja (gradiense). $f'(x,y)=(8x,4y)=(0,0)$, ha $x=0$, $y=0$. Számítsuk ki ebben a pontban a második deriváltat!

$$f''(x,y)=\begin{pmatrix}8&0\\0&4\end{pmatrix}=f''(0,0).$$

A mátrix mindkét bal felső sarokaldeterminánsa pozitív $(8>0;\ 8\cdot 4>0)\Rightarrow$ $f''(0,0)$ pozitív definit mátrix $\Rightarrow$ a $(0,0)$ szigorú lokális minimumhely, tehát itt fog összegyűlni a környezetében lehullott csapadék (10.1. ábra).

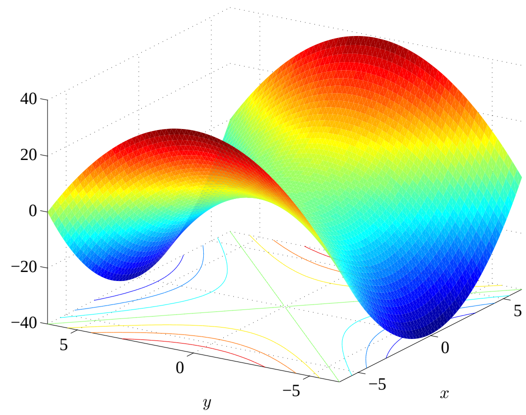


10.1. ábra. A/3. feladat.

A/4, f kétszer differenciálható (végtelen sokszor is). $f'(x,y)=(2x,-2y)=(0,0)$, ha $(x,y)=(0,0)$, tehát csak itt lehet lokális szélsőértékhelye f-nek.

$$f''(x,y)=\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}=f''(0,0).$$

Ennek a mátrixnak a determinánsa negatív, tehát indefinit $\Rightarrow$ a $(0,0)$ nem lokális szélsőértékhely, így f-nek nincs lokális szélsőértékhelye (10.2. ábra). (Az indoklás eleje elhagyható, mert f'' nem függ x,y-tól.)

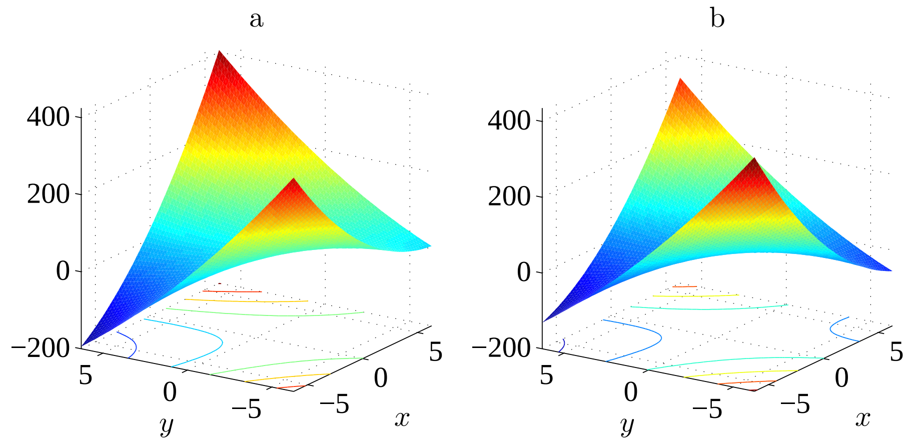


10.2. ábra. A/4. feladat: a $(0,0)$ nem szélsőértékhely, hanem nyeregpont.

A/5/b, f kétszer differenciálható (végtelen sokszor is). $f'(x,y) = (4x+6y, 2y+6x-6) = (0,0)$, ha $x = \frac{9}{7}$ és $y = -\frac{6}{7}$.

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

mindenhol, így a $(\frac{9}{7}, -\frac{6}{7})$ pontban is. Mivel a mátrix determinánsa negatív, nincs lokális szélsőértékhely ebben a pontban, így f-nek nincs lokális szélsőértékhelye (10.3.b ábra). (Az indoklás eleje itt is elhagyható.)

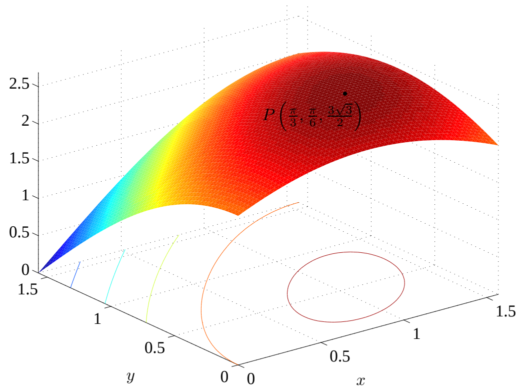


10.3. ábra. a) A/5/a feladat, b) A/5/b feladat.

A/6, f kétszer differenciálható (végtelen sokszor is). Az f függvény a $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és zárt halmazon van értelmezve, így felveszi a maximumát (és minimumát). Szélsőértékhelye vagy olyan belső pontban van, amely lokális szélsőértékhely, vagy a peremen.

- Vizsgáljuk meg először, hogy H belsejében hol nulla f deriváltja: $f'(x,y) = (\cos x - \sin(x-y), -\sin y + \sin(x-y)) = (0,0)$, ha x és y kielégíti a $\cos x - \sin(x-y) = 0$ és $-\sin y + \sin(x-y) = 0$ egyenleteket. A két egyenletből $\cos x = \sin y \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin y$. Ez kétféleképpen lehetséges: 1.) $\frac{\pi}{2} - x = y + 2k\pi$; 2.) $\frac{\pi}{2} - x = \pi - y + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Mindkét egyenletből x-et kifejezve és visszahelyettesítve az eredeti első vagy második egyenletbe egyetlen olyan megoldást kapunk, amely a H belsejében van, ez a $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ pont. Itt a függvényérték $f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,6$ (lásd 10.4. ábra).
- Vizsgáljuk meg a perempontokat is! A perem négy szakaszból áll.
  1. $x = 0$, $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Itt $f(x,y) = f(0,y) = \sin 0 + \cos y + \cos(-y) = 2\cos y$ maximuma 2.
  2. $y = 0$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Itt $f(x,y) = f(x,0) = \sin x + 1 + \cos x$ maximuma az $x = \frac{\pi}{4}$ helyen van, értéke $\frac{2}{\sqrt{2}} + 1 \approx 2,41$ (egyváltozós függvény szélsőértékhelye ott lehet, ahol a deriváltja 0).
  3. $x = \frac{\pi}{2}$, $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Itt $f(x,y) = f(\frac{\pi}{2}, y) = 1 + \cos y + \sin y \Rightarrow y = \frac{\pi}{4}$, az értéke annyi, mint az előző pontban.
  4. $y = \frac{\pi}{2}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$: itt a maximum 2.

A fentiek közül a legnagyobb értéket f a $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ pontban veszi fel, tehát itt van a maximuma (10.4. ábra).



10.4. ábra. A/6. feladat

B/1/a, Legyen $f(x,y) = e^x \sin y$, mely végtelen sokszor differenciálható. Közelítsük az $(x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{2})$ körüli elsőfokú Taylor-polinomjával (ez nem más, mint a függvény érintősíkja).
$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \partial_1 f(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + \partial_2 f(x_0,y_0) \cdot (y - y_0)$.
Itt $\partial_1 f(x,y) = e^x \sin y \Rightarrow \partial_1 f(0, \frac{\pi}{2}) = 1$; $\partial_2 f(x,y) = e^x \cos y \Rightarrow \partial_1 f(0, \frac{\pi}{2}) = 0$.
Alkalmazva a közelítést az $(x,y) = (0,05; \frac{\pi}{2} - 0,1)$ pontban:
$e^{0,05} \sin(\frac{\pi}{2} - 0,1) \approx e^0 \sin\frac{\pi}{2} + 1 \cdot 0,05 + 0 = 1,05$.

B/1/b,

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \partial_1 f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \partial_2 f(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)+$$
$$\frac{1}{2}\left(\partial_1^2 f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + 2\partial_{12} f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0) + \partial_2^2 f(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2\right).$$

$\partial_1^2 f(x,y) = e^x \sin y,\ \partial_{12} f(x,y) = e^x \cos y,\ \partial_2^2 f(x,y) = -e^x \sin y \Rightarrow$
$e^{0,05}\sin(\frac{\pi}{2}-0,1) \approx 1,05+\frac{1}{2}\left(e^0\sin(\frac{\pi}{2})0,05^2 + 2e^0\cos(\frac{\pi}{2})0,05(-0,1) - e^0\sin(\frac{\pi}{2})(-0,1)^2\right) =$
$1,04625\,.$

FEJEZET **11**

Normált terek – integrálszámítás I.

Kulcsszavak:

szakaszonként sima út, ívhossz

11.1. Elméleti összefoglaló

11.1. Definíció. Legyen X normált tér. Az $r : [a, b] \to X$ függvényt *szakaszonként sima út*nak nevezzük, ha
a) r folytonos,
b) r szakaszonként folytonosan differenciálható, azaz létezik olyan $\tau = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, hogy r-nek az összes $[t_{i-1}, t_i]$ intervallumra való leszűkítése folytonosan differenciálható ($i = 1, \ldots, n$).

Sima út ívhosszát a következőképpen lehet definiálni.

11.2. Definíció. Egy $r : [a, b] \to X$ szakaszonként sima út *ívhossz*án az

$$l(r) := \int_a^b \|r'(t)\| \mathrm{d}t$$

valós számot értjük.

Speciálisan, ha az $X = \mathbb{R}^n$ vektorteret az euklideszi normával látjuk el, akkor $X = \mathbb{R}^2$ esetén

$$l(r) = \int_a^b \sqrt{(r_1'(t))^2 + (r_2'(t))^2} \mathrm{d}t,$$

ill. $X = \mathbb{R}^3$ esetén

$$l(r) = \int_a^b \sqrt{(r_1'(t))^2 + (r_2'(t))^2 + (r_3'(t))^2} \mathrm{d}t.$$

Ha egy szakaszonként differenciálható $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvény grafikonjának a hosszúságát szeretnénk valamely $[a, b]$ intervallumon kiszámítani, akkor ezt az $r : x \mapsto (x, f(x))$

$\mathbb{R}^2$-beli szakaszonként sima út ívhossza adja meg, azaz

$$l(r) = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

11.2. Feladatok

A, *ívhossz*

1. Számítsuk ki a következő $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ görbe ívhosszát! $r(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$, $t \in [0, 1]$.
2. Számítsuk ki a következő $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ görbe ívhosszát! $r(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^{-t})$, $t \in [0, \infty)$.
3. Számítsuk ki a következő $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ görbe ívhosszát! $r(t) = (a(t\sin t + \cos t), a(\sin t - t\cos t))$, $t \in [0, t_0]$.
4. Számítsuk ki a következő görbe ívhosszát!

   a, $y = x^{3/2}$, $x \in [0, 4]$;

   b, $y = x^2$, $x \in [0, x_0]$.
5. Számítsuk ki az egységsugarú kör kerületét!
6. Legyen $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [0, \varphi_0]$. Igazoljuk, hogy

$$l(r) = \int_0^{\varphi_0} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

7. Számítsuk ki így is az egységsugarú kör kerületét!
8. Számítsuk ki a következő görbe ívhosszát! $r(\varphi) = a\varphi$, $\varphi \in [0, \pi/2]$. (Archimédeszi spirális)

11.3. Megoldások–Eredmények–Útmutatások

A/1 Az r görbe a 11.1.a ábrán látható.

A/2, $r: \ x(t) = e^{-t}\cos t, \ y(t) = e^{-t}\sin t, \ z(t) = e^{-t}, \ t \in [0, \infty)$ jelölésekkel

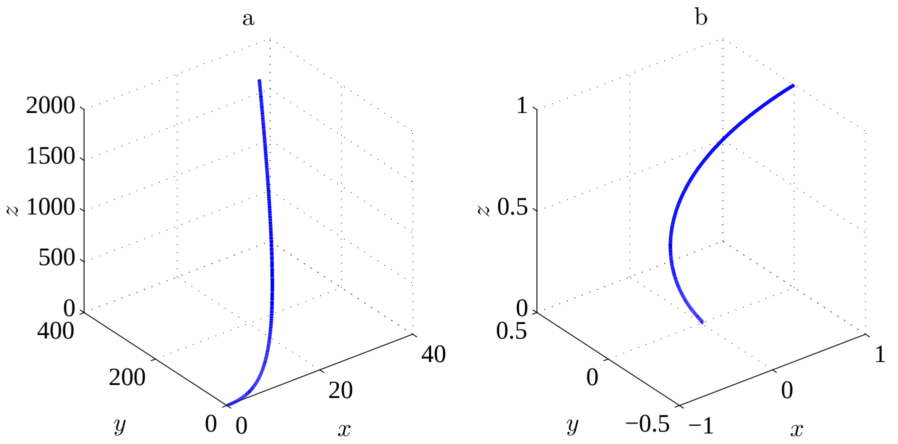
$$l(r) = \int_0^\infty \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\ \mathrm{d}t = \lim_{s\to\infty} \int_0^s \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\ \mathrm{d}t$$

$x'(t) = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t, \ y'(t) = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t, \ z'(t) = -e^{-t}$

Ebből $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 = 3e^{-2t} \Rightarrow$

$$l(r) = \lim_{s\to\infty} \int_0^s \sqrt{3e^{-2t}}\ \mathrm{d}t = \sqrt{3} \lim_{s\to\infty} \int_0^s e^{-t}\ \mathrm{d}t = \sqrt{3} \lim_{s\to\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^s = \sqrt{3} \lim_{s\to\infty} (-e^{-s}+1) = \sqrt{3}\,.$$

(Lásd 11.1.b ábra.)



11.1. ábra. r görbe: a) A/1. feladat, b) A/2. feladat.

A/3, $x'(t) = a(\sin t + t\cos t - \sin t) = at\cos t\,; \ y'(t) = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t\,.$

$$l(r) = \int_0^{t_0} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^{t_0} \sqrt{a^2t^2\cos^2 t + a^2t^2\sin^2 t}\ \mathrm{d}t = |a| \int_0^{t_0} t\ \mathrm{d}t = |a|\frac{t_0^2}{2}.$$

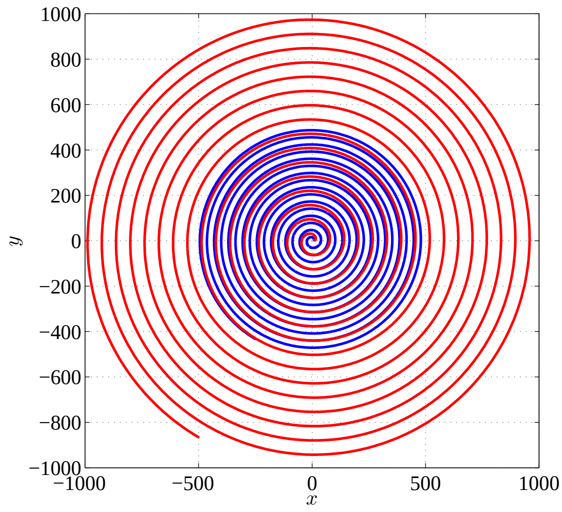
Lásd 11.2. ábra.

A/4/a,

$$l(r) = \int_0^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ \mathrm{d}x = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'\right)^2}\ \mathrm{d}x = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\ \mathrm{d}x =$$

$$\int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{8}{27}\left(\sqrt{1000} - 1\right)\,.$$

A/4/b, $l(r) = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + (2x)^2} = \frac{1}{8}(2\,\mathrm{arsh}(2x_0) + \mathrm{sh}(2\,\mathrm{arsh}(2x_0)))$. $2x =: \mathrm{sh}\,t$ helyettesítéssel, felhasználva az integrálás során, hogy $\mathrm{ch}^2\,t = \frac{1+\mathrm{ch}(2t)}{2}$.



11.2. ábra. A/3. feladat. Kék: $a = 5$, piros: $a = 10$ paraméterrel.

A/5, A körvonal első síknegyedbe eső darabját az $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [0,1]$ függvény adja meg. Ennek a darabnak az ívhossza

$$l(r) = \int_0^1 \sqrt{1 + \left[\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\right]^2}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\, \mathrm{d}x =$$
$$\arcsin 1 - \arcsin 0 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}\,.$$

A teljes ívhossz ennek négyszerese, azaz 2π.

A/6, $r : \varphi \mapsto (x(\varphi), y(\varphi)) = (r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)$, $\varphi \in [0, \varphi_0]$.
$x'(\varphi) = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi$,
$y'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi$,
$(x'(\varphi))^2 = (r'(\varphi))^2\cos^2\varphi - 2r'(\varphi)r(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi + (r(\varphi))^2\sin^2\varphi$,
$(y'(\varphi))^2 = (r'(\varphi))^2\sin^2\varphi + 2r'(\varphi)r(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi + (r(\varphi))^2\cos^2\varphi$.
Ebből $(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 = (r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2$, és így

$$l(r) = \int_0^{\varphi_0} \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2}\, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\varphi_0} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\, \mathrm{d}\varphi\,.$$

A/7, Az egységkörre $r(\varphi) = 1$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ $\Rightarrow r'(\varphi) = 0\,.$

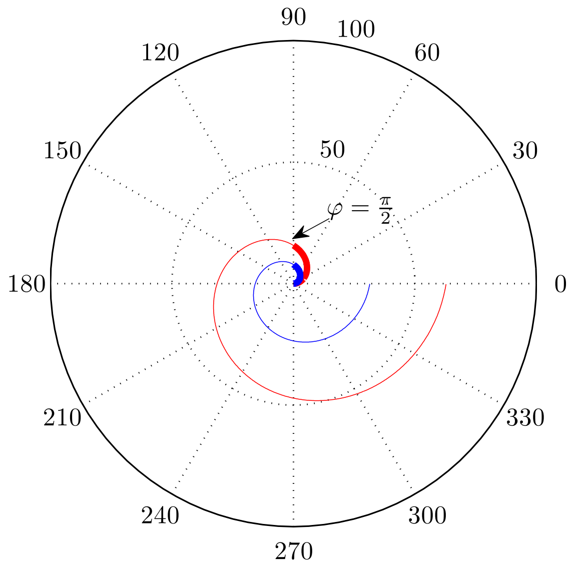
$$l(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{1^2 + 0^2}\, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} 1\, \mathrm{d}\varphi = 2\pi\,.$$

A/8, $r'(\varphi) = a\,,$

$$l(r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\ \mathrm{d}\varphi = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\varphi^2}\ \mathrm{d}\varphi = a\int_0^{\operatorname{arsh}\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}\,\operatorname{ch} t\ \mathrm{d}t =$$

$$a\int_0^{\operatorname{arsh}\frac{\pi}{2}} \operatorname{ch}^2 t\ \mathrm{d}t == a\int_0^{\operatorname{arsh}\frac{\pi}{2}} \frac{1+\operatorname{ch}(2t)}{2}\ \mathrm{d}t = \frac{a}{2}\left[t + \frac{\operatorname{sh}(2t)}{2}\right]_0^{\operatorname{arsh}\frac{\pi}{2}} = \frac{a}{4}\operatorname{sh}\left(2\operatorname{arsh}\frac{\pi}{2}\right).$$

(Lásd 11.3. ábra.)



11.3. ábra. A/8. feladat $a = 5$ (kék) és $a = 10$ (piros) paraméterrel.

2. minta zárthelyi

1. Határozzuk meg a következő határértéket!

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x^2+y^2}\,.$$

(3 p)

2. Határozzuk meg az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

függvény elsőrendű parciális deriváltjait! (3 p)

3. Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x+y,xy)$. A definíciót használva határozzuk meg $f'(0,1)$-t! (8 p)

4. Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\ln(x-y)$. Adjuk meg az f függvény $(2,1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét! (3 p)

5. Tekintsük az $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x^2-y^2+z^2$, illetve a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $g(t)=(\sin t,1,\cos t)$ függvényeket. Határozzuk meg mind a kétféleképpen az $f\circ g$ kompozíciófüggvény deriváltját! (5 p)

6. Az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ függvény által meghatározott felület $(-1,-1,1)$ pontjában mely irányban 0 az iránymenti derivált? (4 p)

7. Határozzuk meg az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=3x-x^3-y^2$ függvény lokális szélsőértékhelyeit! (7 p)

8. Számítsuk ki az $r(t)=(\cos t,\sin t,t)$ térgörbe ívhosszát a $t\in[0,2\pi]$ intervallumon! (3 p)

rész II

Matematika 4.

Normált terek – integrálszámítás II.

Kulcsszavak:
másodfajú vonalintegrál, primitív függvény, Newton–Leibniz-formula, csillagszerű halmaz

13.1. Elméleti összefoglaló

13.1. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ tartomány, $r : [a, b] \to H$ szakaszonként sima út, $f : H \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Ekkor az $\int_a^b \langle f(r(t)), r'(t)\rangle \, \mathrm{d}t \in \mathbb{R}$ számot *az f függvény r útra vonatkoztatott (másodfajú) vonalintegrálján*ak nevezzük. Jelölése: $\int_r f$.

A másodfajú vonalintegrál értéke független az r út paraméterezését?l.

A másodfajú vonalintegrálnak fontos fizikai alkalmazása van: ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy erőteret fejez ki, akkor $\int_r f$ az erőtérben végzett munkát adja, míg az r út mentén eljutunk a-ból b-be.

Kiszámítása könnyebb, ha f-nek létezik primitív függvénye.

13.2. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ tartomány. Az $F : H \to \mathbb{R}$ függvényt az $f : H \to \mathbb{R}^n$ *függvény primitív függvényén*ek nevezzük, ha F differenciálható H-n, és ott $F' = f$.

13.1. Tétel. *(Newton-Leibniz–formula)*
Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ tartomány. Legyen $f : H \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, tegyük fel, hogy létezik $F : H \to \mathbb{R}$ primitív függvénye, és legyen $r : [a, b] \to H$ szakaszonként sima út. Ekkor

$$\int_r f = F(r(b)) - F(r(a)).$$

A tételből következik, hogy ha f-nek létezik primitív függvénye, akkor egy tetszőleges szakaszonként sima út mentén vett vonalintegráljának az értéke csak az út kezdő- és végpontjától függ. Továbbá, ha r zárt, szakaszonként sima út (azaz $r(a) = r(b)$), akkor $\int_r f = 0$.

A primitív függény létezésével kapcsolatosak a következő tételek.

13.2. Tétel. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ tartomány. Tegyük fel, hogy $f : H \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható H-n, és létezik F primitív függvénye is. Ekkor az $f'(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Jacobi-mátrix szimmetrikus minden $x \in H$-ra.*

Ha a H tartomány megfelelő tulajdonságú, akkor ez megfordítva is igaz.

13.3. Tétel. *Ha $f : H \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható, $H \subset \mathbb{R}^n$ egyszeresen összefügg? tartomány, és az $f'(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Jacobi-mátrix szimmetrikus, akkor f-nek létezik primitív függvénye.*

Ha tudjuk, hogy létezik primitív függvénye f-nek, akkor ezt meghatározhatjuk úgy, hogy egy tetszőleges H-beli úton elkészítjük a másodfajú vonalintegrálját, ahol az út végpontját tekintjük változónak.

13.2. Feladatok

A, *alapfogalmak: másodfajú vonalintegrál kiszámítása definíció szerint, primitív függvény, Newton-Leibniz–formula*

1. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y, x)$.
   - a, Tekintsük az $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ utat, $r : y = x$, $x \in [0, 1]$. Számítsuk ki $\int_r f$ értékét definíció szerint!
   - b, Legyen a $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ zárt görbe a következőképpen megadva $K : x^2 + y^2 = 1$, az óramutató járásával megegyező irányban egy körbefutásnyi. Számítsuk ki $\int_K f$ értékét!
   - c, Van-e f-nek primitív függvénye? Ha igen, akkor határozzuk meg!
2. Legyen $f(x, y) = (y, -x)$. $K : x^2 + y^2 = 1$, az óramutató járásával ellentétes irányban egy körbefutásnyi.
   - a, Számítsuk ki $\int_K f$ értékét!
   - b, Van-e f-nek primitív függvénye?
   - c, Mi a helyzet, ha az út irányítását megfordítjuk?
   - d, Meg tudnánk-e adni egy nemtriviális zárt görbét, amelyen a másodfajú vonalintegrál 0 ?
3. („Ellenpélda”) Legyen $f(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$. $K : x^2+y^2 = 1$, az óramutató járásával ellenkező irányban egy körbefutásnyi. Számítsuk ki $\int_K f$ értékét!

B, *gyakorló feladatok*

1. Legyen $f(x, y) = (x + y, x - y)$. Határozzuk meg f primitív függvényét!
2. Legyen $f(x, y) = (x, y)$. Legyen r a következő háromszögvonal: $(0, 0)$-ból indul, egyenes szakaszokon a $(1, 0)$ és $(0, 1)$ pontokon áthalad, majd visszatér az origóba. $\int_r f = ?$

3. Legyen $f(x,y) = (x^2 + y, y^2 + x)$. $r:\ y = x^{2011}$, $x \in [0,1]$. Számítsuk ki $\int_r f$ értékét.
4. Határozzuk meg az alábbi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvények primitív függvényét.
   a, $f(x,y,z) = (yz, xz, xy)$;
   b, $f(x,y,z) = (x^2 - 2yz, y^2 - 2xz, z^2 - 2xy)$;
   c, $f(x,y,z) = (1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}, \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}, -\frac{xy}{z^2})$.
5. Legyen $f(x,y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$. $r:\ y = x^2$, $x \in [-1,1]$. $\int_r f = ?$
6. Legyen $f(x,y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$. $r:\ y = 1 - |1 - x|$, $x \in [0,2]$. $\int_r f = ?$
7. (szorgalmi) Legyen $f(x,y) = (\frac{y}{3x^2 - 2xy + 3y^2}, \frac{-x}{3x^2 - 2xy + 3y^2})$. Határozzuk meg f primitív függvényét!

13.3. Megoldások–Eredmények–Útmutatások

A/1/a, Az r görbe paraméterezése: $r(t) = (t, t),\ t \in [0, 1]$, deriváltja $r'(t) = (1, 1)^T$.

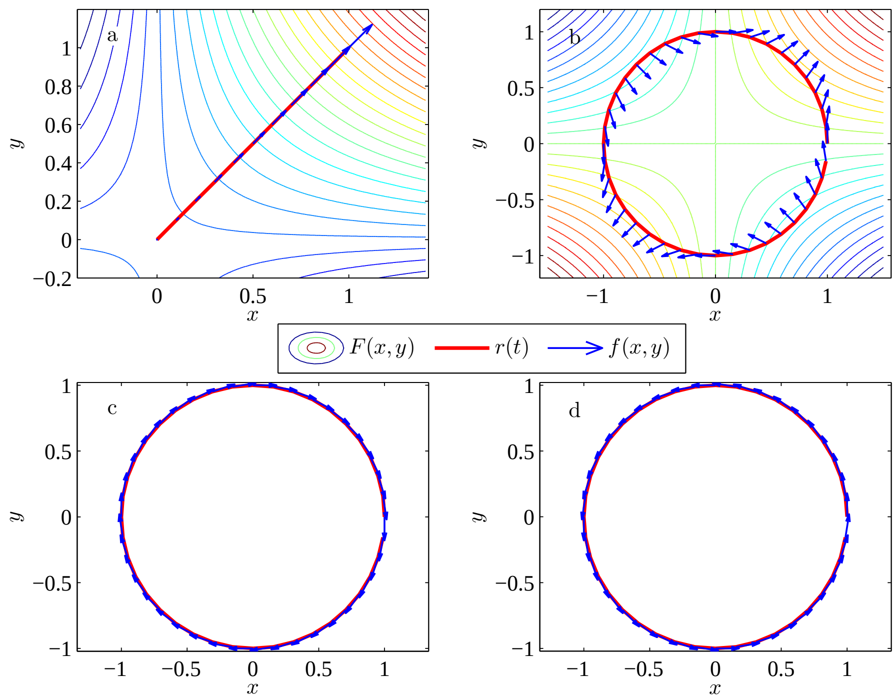
$$\int_r f = \int_0^1 \langle f(r(t)),\ r'(t)\rangle \ \mathrm{d}t = \int_0^1 \begin{pmatrix} t & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \mathrm{d}t = \int_0^1 2t \ \mathrm{d}t = 1\,.$$

(13.1.a ábra)

A/1/b, A K görbe paraméterezése: $K(t) = (\cos(-t), \sin(-t)) = (\cos t, -\sin t),\ t \in [0, 2\pi]$, deriváltja $K'(t) = (-\sin t, -\cos t)^T$.

$$\int_K f = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^2 t - \cos^2 t \ \mathrm{d}t = -\int_0^{2\pi} \cos 2t \ \mathrm{d}t = 0\,.$$

(13.1.b ábra)



13.1. ábra. a) A/1/a feladat, b) A/1/b feladat, c) A/2 feladat, d) A/3 feladat.

A/1/c, f folytonosan differenciálható (léteznek a parciális deriváltjai és folytonosak egész $\mathbb{R}^2$-en), továbbá $\partial_y f_1 = \partial_x f_2 = 1$ (azaz f' szimmetrikus), így létezik primitív függvénye.

Tudjuk, hogy f primitív függvényére $F' = f$, vagyis:
$\partial_x F = f_1$, azaz $\partial_x F = y \quad \Rightarrow \quad F(x, y) = xy + g(y)$, illetve
$\partial_y F = f_2$, azaz $\partial_y F = x \quad \Rightarrow \quad F(x, y) = xy + h(x)$.
Ebből kapjuk, hogy $F(x, y) = xy + C$, ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

Másik lehetőség a primitív függvény meghatározására, ha kiintegráljuk f-et egy (x,y)-ba vezető úton (a kezdőpont tetszőleges, de nem lehet (x,y)).
Válasszuk az r út kezdőpontjának az origót. Az utunkat két részre bontjuk: először haladjunk az x-tengelyen $(x,0)$-ig, majd innen párhuzamosan az y-tengellyel egészen (x,y)-ig. A két út paraméterezése a következő: $r_1(t) = (t,0)$, $t \in [0,x]$, deriváltja $r_1'(t) = (1,0)^T$. $r_2(t) = (x,t)$, $t \in [0,y]$, deriváltja $r_2'(t) = (0,1)^T$.

$$\int_r f = \int_{r_1} f + \int_{r_2} f = \int_0^x \begin{pmatrix} 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t + \int_0^y \begin{pmatrix} t & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = 0 + \int_0^y x \, \mathrm{d}t = [xt]_0^y = xy\,.$$

Az összes primitív függvény ettől csak konstansban tér el.

A/2/a, A K út paraméterezése a következő (13.1.c ábra): $K(t) = (\cos t,\ \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, deriváltja pedig $K'(t) = (-\sin t, \cos t)^T$.

$$\int_K f = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t - \cos^2 t \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} -1 \, \mathrm{d}t = -2\pi\,.$$

A/2/b, Nincs, mert $\partial_y f_1 = 1 \neq \partial_x f_2 = -1$.

A/2/c, Ellentétes irányítottságú úton a vonalintegrál a -1-szeresére változik, így 2π.

A/3, Mivel $\partial_y f_1 = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \partial_x f_2$, így az az érzésünk lehet, hogy van primitív függvénye f-nek. Továbbá zárt görbén integrálunk, így 0-át kellene kapjunk. De

$$\int_K f = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \, \mathrm{d}t = 2\pi\,.$$

A magyarázat az, hogy a K utat bele kellene tudjuk foglalni egy egyszeresen összefüggő tartományba, amely tartomány minden pontjában meg kellene egyezzenek f keresztben vett parciális deriváltjai. Vegyük észre, hogy az origóban a parciális deriváltak nincsenek értelmezve (már f sem volt). Így az origót ki kellene vágnunk a tartományból, viszont ha azt akarjuk, hogy ugyanakkor K-t tartalmazza, akkor már nem lesz egyszeresen összefüggő. Lásd 13.1.d ábra.

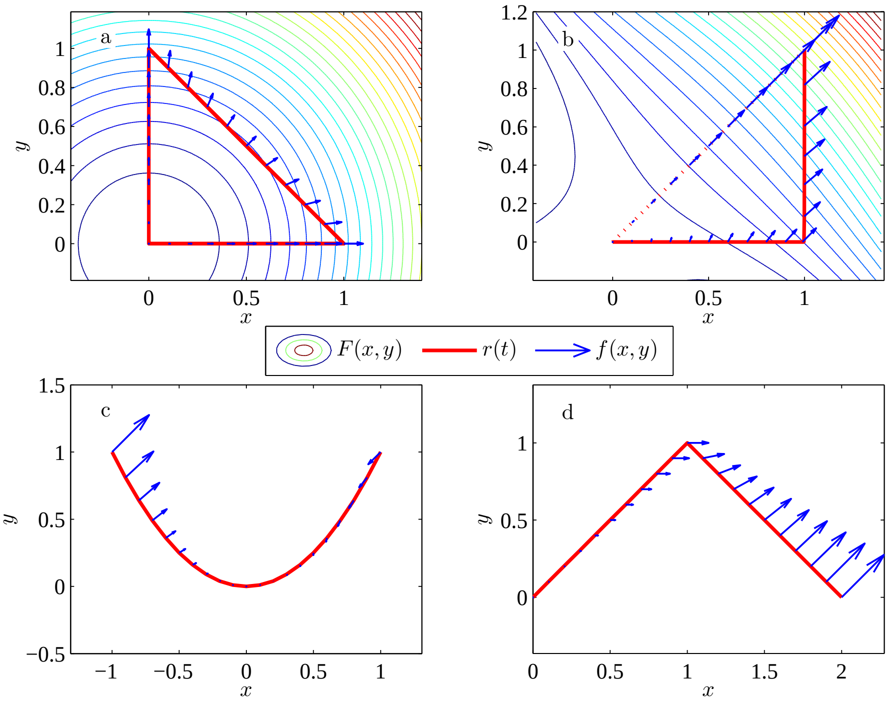
B/1, Hasonlóan járunk el, mint a A/1/c, feladatnál:

$$\int_r f = \int_{r_1} f + \int_{r_2} f = \int_0^x \begin{pmatrix} t & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t + \int_0^y \begin{pmatrix} x+t & x-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t =$$

$$\int_0^x t \, \mathrm{d}t + \int_0^x x - t \, \mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2}\,.$$

Tehát f összes primitív függvénye: $F(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + C$, ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

Másképp:
$\partial_x F = f_1$, azaz $\partial_x F = x + y \quad \Rightarrow \quad F(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + g(y)$, illetve
$\partial_y F = f_2$, azaz $\partial_y F = x - y \quad \Rightarrow \quad F(x,y) = xy - \frac{y^2}{2} + h(x)$.
Innen már adódik F.



13.2. ábra. a) B/2 feladat, b) B/3 feladat, c) B/5 feladat, d) B/6 feladat.

B/2, $\int_r f = 0$, mert f-nek létezik primitív függvénye (f folytonosan differenciálható és $\partial_y f_1 = \partial_x f_2 = 0$). Lásd 13.2.a ábra.

B/3, Az r út nem túl szép, így reménykedünk, hogy van f-nek primitív függvénye, mert akkor az integrál értéke csak az út kezdő- és végpontjától függ (13.2.b ábrán a sima piros görbe) és választhatunk egy másik utat.
f folytonosan differenciálható egész $\mathbb{R}^2$-en és $\partial_y f_1 = 1 = \partial_x f_2$, vagyis létezik primitív függvénye. Válasszunk egy kellemesebb $\hat{r}$ utat (13.2.b ábrán a pontozott piros görbe): $\hat{r}(t) := (t, t)\ ,\ t \in [0, 1]$, deriváltja $r'(t) = (1, 1)^T$.

$$\int_r f = \int_{\hat{r}} f = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 + t & t^2 + t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \, \mathrm{d}t = \ldots = \frac{5}{3}\,.$$

B/4/a, $F(x, y, z) = xyz + C\ ,\ C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

B/4/b, $F(x, y, z) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C\ ,\ C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

B/4/c, $F(x, y, z) = \frac{xy}{z} - \frac{x}{y} + x + C\ ,\ C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

B/5, r paraméterezése: $r(t) = (t, t^2)\ ,\ t \in [-1, 1]$, deriváltja $r'(t) = (1, 2t)^T$.

$$\int_r f = \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} t^2 - 2t^3 & t^4 - 2t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \, \mathrm{d}t = \int_{-1}^1 t^2 - 2t^3 + 2t^5 - 4t^4 \, \mathrm{d}t = -\frac{14}{15}\,.$$

Lásd 13.2.c ábra.

B/6, Az r görbe két egyenes szakaszból áll, az r_1 darab a $(0,0)$ pontból az $(1,1)$ pontba, a r_2 darab az $(1,1)$ pontból a $(2,0)$ pontba fut (13.2.d ábra).
r_1 paraméterezése: $r_1(t) = (t,t)\,,\ t \in [0,1]\,,\ r_1'(t) = (1,1)\,.$ r_2 paraméterezése: $r_2(t) = (t, 2-t)\,,\ t \in [1,2]\,,\ r_2'(t) = (1,-1)\,.$

$$\int_r f = \int_{r_1} f + \int_{r_2} f =$$

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} 2t^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t + \int_1^2 \begin{pmatrix} t^2+(2-t)^2 & t^2-(2-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t =$$

$$\int_0^1 2t^2 \,\mathrm{d}t + \int_1^2 8 - 8t + 2t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\,.$$

B/7, $F(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{8}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{8}x}(y - \frac{1}{3}x)\right) + C\,.$

Normált terek – integrálszámítás III.

14.1. Feladatok

A, *gyakorló feladatok*

1. Határozzuk meg $f(x,y)=(x,y)$ primitív függvényét!
2. Legyen $f(x,y)=(x^2+2xy-y^2, x^2-2xy-y^2)$. Határozzuk meg f primitív függvényét!
3. Legyen $f(x,y)=(x^2+y, y^2-x)$. A T út pedig egy téglalap, melynek csúcsai a bejárás szerinti sorrendben $(1,2)$, $(3,2)$, $(3,4)$, $(1,4)$. $\int_T f = ?$
4. Legyen $f(x,y,z)=(y,z,x)$. $S(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$, ahol t 0-tól 2π-ig nő. $\int_S f = ?$

B, *komolyabb feladatok*

1. Legyen $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ differenciálható függvény. Bizonyítsuk be, hogy f' pontosan akkor szimmetrikus, ha $\operatorname{rot} f = 0$!
2. Legyen $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tetszőleges differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(xg(x^2+y^2), yg(x^2+y^2))$ függvény minden szakaszonként sima zárt útra vett másodfajú vonalintegrálja 0!
3. Legyen $f(x,y)=(e^{x^2+y^2}x, e^{x^2+y^2}y)$ egy fizikai erőtér. Határozzuk meg a végzett munkát, ha az origóból az $(1,1)$ pontba jutunk el! (Használjuk az előző feladatot.)
4. Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ folytonos függvény. Bizonyítsuk be, hogy $\left|\int_r f\right| \le KM$, ahol K az r szakaszonként sima út hossza és $M=\max_r \sqrt{f_1^2+f_2^2}$!
5. Legyen $f(x,y)=\left(\frac{y}{(x^2+xy+y^2)^2}, \frac{-x}{(x^2+xy+y^2)^2}\right)$. Bevezetve az $I_R := \oint_{x^2+y^2=R^2} f$ jelölést, mutassuk meg, hogy $\lim_{R\to\infty} I_R = 0$! (Használjuk az előző feladatot.)
6. Mutassuk meg, hogy a gravitációs erőtér konzervatív!

14.2. Megoldások–Eredmények–Útmutatások

A/1, (Az 1./A/1/c, illetve 1./B/1 feladat mintájára.)
1. megoldás: Olyan $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvényt keresünk, amelyre
$\partial_x F(x,y)=x\Rightarrow F(x,y)=\frac{x^2}{2}+h(y)$ alakú, ahol $h(y)$ egy csak y-tól függő tag, illetve
$\partial_y F(x,y)=y\Rightarrow F(x,y)=\frac{y^2}{2}+g(x)$ alakú, ahol $g(x)$ egy csak x-től függő tag.
A kettőt egybevetve f összes primitív függvénye: $F(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+C,\ C\in\mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

2. A megoldás vonalintegrállal:
$r_1(t)=(t,0),\ t\in[0,x]$, $r_1'(t)=(1,0)^T$, $r_2(t)=(x,t),\ t\in[0,y]$, $r_2'(t)=(0,1)^T$.

$$\int_r f=\int_{r_1} f+\int_{r_2} f=\int_0^x \begin{pmatrix} t & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\int_0^y \begin{pmatrix} x & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\int_0^x t\ \mathrm{d}t+\int_0^y t\ \mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}.$$

Ahonnan $F(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+C$.

A/2, $F(x,y)=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+C$, $C\in\mathbb{R}$ tetszőleges.

A/3, -8. Lásd 14.1.a ábra.

A/4,

$$\int_S f=\int_0^{2\pi}\langle(a\sin t, bt, a\cos t),(-a\sin t, a\cos t, b)^T\rangle\ \mathrm{d}t=$$
$$\int_0^{2\pi}-a^2\sin^2 t+abt\cos t+ab\cos t\ \mathrm{d}t=\ldots=-a^2\pi.$$

Az integrálás során használjuk fel, hogy $\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}$, illetve $t\cos t$-t pedig integráljuk parciálisan. Lásd 14.1.b ábra.

B/1, Az f' mátrix a következő:

$$f'=\begin{pmatrix}\partial_x f_1 & \partial_y f_1 & \partial_z f_1\\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 & \partial_z f_2\\ \partial_x f_3 & \partial_y f_3 & \partial_z f_3\end{pmatrix},$$

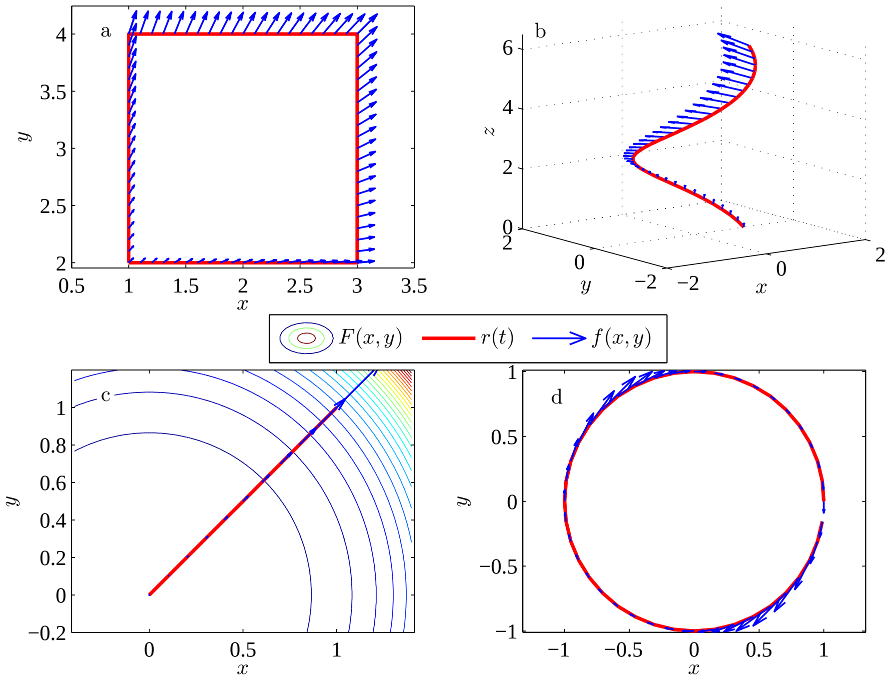
ahol f_1, f_2 és f_3 jelöli f koordináta-függvényeit. Az f' mátrix szimmetrikussága azt jelenti, hogy a főátlóra szimmetrikusan elhelyezkedő elemek egyenlők, azaz $\partial_x f_2=\partial_y f_1$, $\partial_x f_3=\partial_z f_1$ és $\partial_y f_3=\partial_z f_2$.

Az f rotációja:

$$\operatorname{rot} f=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ f_1 & f_2 & f_3\end{vmatrix}=(\partial_y f_3-\partial_z f_2, \partial_z f_1-\partial_x f_3, \partial_x f_2-\partial_y f_1).$$

rot f nullával való egyenlősége azt jelenti, hogy $\partial_y f_3=\partial_z f_2$, $\partial_z f_1=\partial_x f_3$ és $\partial_x f_2=\partial_y f_1$, ami megegyezik az f' szimmetrikusságából előbb kapott feltételrendszerrel.

B/2, Az f folytonos függvény minden szakaszonként sima zárt útra vett másodfajú vonalintegrálja 0 feltétel azt jelenti, hogy a vonalintegrál független az úttól, vagyis f-nek létezik primitív függvénye. Tehát azt kell belátnunk, hogy van primitív függvénye. f differenciálható, így f' szimmetrikussága ezt már maga után vonja. Itt ez teljesül, hiszen $\partial_y f_1 = xg'(x^2+y^2)2y = \partial_x f_2$.



14.1. ábra. a) A/3 feladat, b) A/4 feladat, c) B/3 feladat, d) B/5 feladat.

B/3, Mivel f a B/2. feladat szerinti alakú ($g = \exp$), így létezik primitív függvénye (14.1.c ábra). Ezért a megadott pontokat összekötő akármilyen út mentén haladhatunk. Válasszuk az egyenesszakaszt:
$r(t) = (t,t)\,,\ t \in [0,1]\,,\ r'(t) = (1,1)^T$.

$$\int_r f = \int_0^1 \begin{pmatrix} e^{2t^2}t & e^{2t^2}t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 2t\,e^{2t^2} = \left[\frac{1}{2}e^{2t^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e^2-1)\,.$$

B/4, Legyen $r : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ szakaszonként sima út. Ennek ívhossza $K = \int_a^b \|r'(t)\|\,\mathrm{d}t$.

$$\left|\int_r f\right| = \left|\int_a^b \langle f(r(t)), r'(t)\rangle\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^b |\langle f(r(t)), r'(t)\rangle|\,\mathrm{d}t \le \int_a^b \|f(r(t))\|\cdot\|r'(t)\|\,\mathrm{d}t\,.$$

Itt a norma az euklideszi normát jelenti, és felhasználtuk, hogy egy függvény integráljának abszolút értéke kisebb vagy egyenlő, mint a függvény abszolút értékének az integrálja, valamint a CBS-egyenlőtlenséget.
A $\|f(r(t))\| = \sqrt{(f_1(r(t)))^2 + (f_2(r(t)))^2}$ tényezőt az r út menti abszolútértékben legnagyobb értékével becsüljük felülről. Ez már egy szám, így kivihetjük az integrál

elé, így

$$\left|\int_r f\right| \le \int_a^b \|f(r(t))\| \cdot \|r'(t)\| \,\mathrm{d}t \le \max_r \sqrt{f_1^2+f_2^2} \int_a^b \|r'(t)\| \,\mathrm{d}t = MK\,.$$

B/5, Az előző feladat alapján $|I_R| \le K_R M_R$, ahol $K_R = 2R\pi$, és M_R a függvény euklideszi normájának a maximuma az R sugarú kör mentén. Ekkor az R sugarú kört alkotó $(x,y) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi)$ pontokban

$$\|f(x,y)\| = \sqrt{\frac{y^2}{(x^2+xy+y^2)^4} + \frac{x^2}{(x^2+xy+y^2)^4}} = \sqrt{\frac{R^2}{(R^2+R^2\cos\varphi\sin\varphi)^4}} =$$

$$\frac{1}{R^3(1+\cos\varphi\sin\varphi)^2} = \frac{1}{R^3\left(1+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^2} \le \frac{1}{R^3\left(1+\frac{-1}{2}\right)^2} = \frac{4}{R^3}\,.$$

Ebből

$$|I_R| \le K_R M_R \le \frac{4}{R^3} 2R\pi = \frac{8\pi}{R^2} \to 0\,,\ \text{ha } R \to \infty\,.$$

Azaz I_R-t abszolút értékben majoráltuk egy nullához tartó sorozattal $\Rightarrow \lim_{R\to\infty} I_R = 0$. Lásd 14.1.d ábra.

FEJEZET **15**

Többszörös integrálok I.

Kulcsszavak:
négyszögtartomány, normáltartomány, kettős integrál, polártranszformáció

15.1. Elméleti összefoglaló

Ebben a fejezetben $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú függvények integrálásával (kettős integrál) foglalkozunk négyszög- és normáltartományon. A kettős integrálnak fontos alkalmazásai vannak a terület- és térfogatszámításban.

15.1. Definíció. *Négyszögtartomány*nak nevezzük a $T = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \subset \mathbb{R}^2$ halmazt.

Ha f integrálható a T négyszögtartományon (azt, hogy ez mit jelent, itt nem részletezzük), és minden $y \in [c, d]$ esetén létezik az $\int_a^b f(x, y)\ \mathrm{d}x$ Riemann-integrál, akkor az f függvény T tartományon vett integrálja $\iint_T f(x, y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y$. Amennyiben minden $x \in [a, b]$ esetén létezik az $\int_c^d f(x, y)\ \mathrm{d}y$ Riemann-integrál is, akkor

$$\iint_T f(x, y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x.$$

Ekkor, tehát az x és y szerinti integrálás sorrendje felcserélhető. Ha például f folytonos, akkor ezek a feltételek teljesülnek.

A négyszögtartománynál általánosabb halmaz a normáltartomány.

15.2. Definíció. Legyenek $g_1, g_2 \in C[a, b]$, és legyen minden $x \in [a, b]$ esetén $g_1(x) \leq g_2(x)$. Ekkor a

$$T = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

halmazt az x *tengelyre normáltartomány*nak nevezzük.

15.1. Lemma. *Legyen T az x tengelyre normáltartomány. Ha f folytonos T-n, akkor*

$$\iint_T f(x,y)\ dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\ dy \right)\ dx.$$

Hasonlóan értelmezhető az y tengelyre normáltartomány is:

$$T = \{(x,y) : c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}.$$

Ekkor, például feltéve a folytonosságot

$$\iint_T f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y.$$

Megjegyezzük, hogy elég f integrálhatóságát és a belső integrál létezését feltenni a folytonosság helyett ezekben az esetekben is.

Normáltartomány esetén tehát az integrálás sorrendje meghatározott. A sorrendet csak akkor lehet felcserélni, ha T mindkét tengelyre normáltartomány, de a csere ekkor is a határok átalakításával jár.

Sok esetben megkönnyíti az integrálás elvégzését, ha integráltranszformációt alkalmazunk. Ez a valós-valós függvények helyettesítéses integrálásának az általánosítása. Tegyük fel, hogy az $x : (u,v) \mapsto x(u,v)$ és $y : (u,v) \mapsto y(u,v),\ (u,v) \in T'$ függvények a $T' \subset \mathbb{R}^2$ tartományt kölcsönösen egyértelműen leképezik a T tartományra, és folytonosan differenciálhatók. Ekkor, ha f T tartományon vett integrálja létezik, akkor

$$\iint_T f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\int_{T'} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

ahol

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

a transzformáció (Jacobi-) determinánsa.
Speciálisan polártranszformáció esetén

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi,$$

tehát

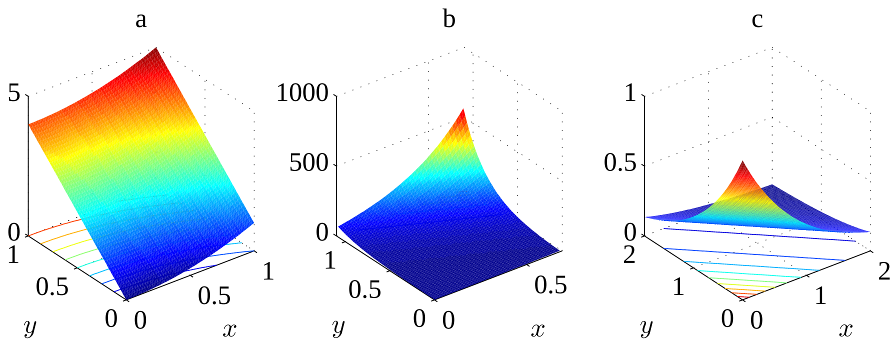
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r\,,$$

aminek az abszolút értéke r. (Vegyük észre, hogy ez a leképezés így még nem kölcsönösen egyértelm?, mert az $r = 0$, ϕ =tetsz?leges választás is az origót adja, ugyanakkor ez a probléma könnyen kiküszöbölhet?.)

15.2. Feladatok

A, *kettős integrál téglalap tartományon*

1. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 + 4y$ függvény (15.1.a ábra) integrálját az egységnégyzeten! (Mindkét sorrendben.)
2. Határozzuk meg c értékét úgy, hogy az $f(x,y) = c(x^2 + 3y^2)$ függvény egységnégyzetre vett integrálja 1 legyen!
3. $I := [0, \ln 2] \times [0, \ln 3]$. $\iint_I e^{3x+4y}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = ?$ (15.1.b ábra)
4. $I := [0, \infty) \times [0, \infty)$. $\iint_I e^{-x-y}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = ?$ (15.1.c ábra)



15.1. ábra. a) A/1 feladat, b) A/3 feladat, c) A/4 feladat.

B, *kettős integrál normáltartományon*

1. $H := \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\}$. $\iint_H xy^2\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = ?$ (kétféleképpen)
2. Határozzuk meg a $xy = a^2$ és $x + y = \frac{5}{2}a$ görbék által közrefogott síkidom területét!
3. Határozzuk meg az egységsugarú körlap területét! (polártranszformáció nélkül)

C, *integráltranszformáció – polártranszformáció*

1. Határozzuk meg az egységsugarú körlap területét!
2. $T := \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le x, 0 \le y\}$. $\iint_T \frac{2xy}{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = ?$
3. $T := \{(x,y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$. $\iint_T \ln(x^2 + y^2)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = ?$

D, *integrálási sorrend felcserélése, egyéb*

1. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét az alábbi integrálokban!
   a, $\int_0^2 \int_x^{2x} f(x,y)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x$;
   b, $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x$;
   c, $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
2. Mutassuk meg, hogy $\iint_{x^2+y^2 \le a^2} x^m y^n\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$, ha m, n pozitív egészek közül valamelyik páratlan!
3. $\iint_{x^2+y^2 \le 4} \operatorname{sgn}(x^2 + y^2 - 2)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = ?$

15.3. Megoldások–Eredmények–Útmutatások

A/1, $I=[0,1]\times[0,1]$. Az integrálás sorrendje tetszőleges. Mindkét sorrendben kiszámítjuk.

$$\iint_I f\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^1 x^2{+}4y\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\int_0^1\left[\frac{x^3}{3}+4xy\right]_{x=0}^1\ \mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{3}{+}4y\ \mathrm{d}y=\left[\frac{1}{3}y+2y^2\right]_0^1=\frac{7}{3}\,.$$

A másik sorrendben:

$$\iint_I f\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^1 x^2{+}4y\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x=\int_0^1\left[x^2y+2y^2\right]_{y=0}^1\ \mathrm{d}x=\int_0^1 x^2{+}2\ \mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_0^1=\frac{7}{3}\,.$$

A/2, $I=[0,1]\times[0,1]$. Az integrálás sorrendje tetszőleges.

$$\iint_I f\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=c\int_0^1\int_0^1 x^2{+}3y^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=c\int_0^1\left[\frac{x^3}{3}+3y^2x\right]_{x=0}^1\ \mathrm{d}y=c\int_0^1\frac{1}{3}{+}3y^2\ \mathrm{d}y=\ldots=\frac{4}{3}c\,.$$

Tehát $c=\frac{3}{4}$.

A/3, $f(x,y)=g(x)h(y)$ alakú, így

$$\iint_I f\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\ln 3}\int_0^{\ln 2} e^{3x+4y}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\left(\int_0^{\ln 2} e^{3x}\ \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\ln 3} e^{4y}\ \mathrm{d}y\right)=\ldots=\frac{140}{3}\,.$$

A/4,

$$\iint_I f\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x-y}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\lim_{a\to\infty}\left\{\int_0^a\int_0^a e^{-x-y}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\right\}=$$

$$\lim_{a\to\infty}\left\{\left(\int_0^a e^{-x}\ \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^a e^{-y}\ \mathrm{d}y\right)\right\}=\lim_{a\to\infty}\left\{\left[-e^{-x}\right]_0^a\left[-e^{-y}\right]_0^a\right\}=\lim_{a\to\infty}(1-e^{-a})^2=1\,.$$

B/1, A tartomány x és y szerint is normáltartomány (15.2.a ábra).

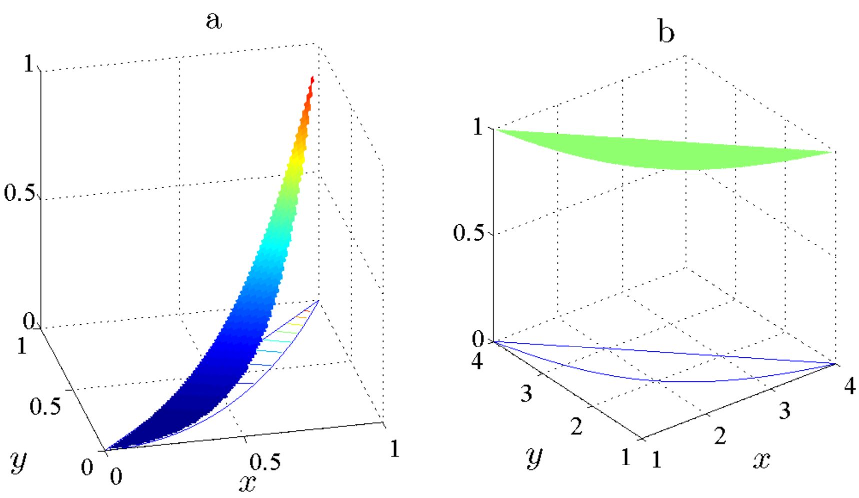
1. A tartományt x szerint normáltartománynak tekintve:

$$\iint_H f\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{x} xy^2\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x=\int_0^1\left[x\frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{x}\ \mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^4}{3}{-}\frac{x^7}{3}\ \mathrm{d}x=\ldots=\frac{1}{40}\,.$$

2. A tartományt y szerint normáltartománynak tekintve:

$$\iint_H f\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_y^{\sqrt{y}} xy^2\ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d}y=\int_0^1\left[\frac{x^2}{2}y^2\right]_{x=y}^{\sqrt{y}}\ \mathrm{d}y=\int_0^1\frac{y^3}{2}{-}\frac{y^4}{2}\ \mathrm{d}y=\ldots=\frac{1}{40}\,.$$

B/2, A tartomány x szerint normáltartomány (15.2.b ábra). Ennek x szerinti határai az $xy=a^2$ és $x{+}y=\frac{5}{2}a$ görbék metszéspontjainak x-koordinátái, vagyis az $xy=a^2$ és $x+y=\frac{5}{2}a$ egyenletekből álló rendszer megoldásai x-re: $x_1=\frac{a}{2},x_2=2a$. Az $a>0$ esetet tárgyaljuk. (A másik eset hasonlóan végezhető el.) A tartomány területe az azonosan 1 függvény integrálja a $H=\{(x,y):\frac{a}{2}\le x\le 2a\,,\frac{a^2}{x}\le y\le -x+\frac{5}{2}a\}$



15.2. ábra. a) B/1 feladat, b) B/2 feladat $a = 2$ paraméterrel.

tartományra. Tehát

$$T = \int_{\frac{a}{2}}^{2a} \left(\int_{\frac{a^2}{x}}^{-x+\frac{5}{2}a} 1 \, \mathrm{d}y \right) \, \mathrm{d}x = \int_{\frac{a}{2}}^{2a} \left(-x + \frac{5}{2}a - \frac{a^2}{x} \right) \, \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}ax - a^2 \ln x \right]_{\frac{a}{2}}^{2a} =$$

$$a^2 \left(\frac{15}{8} - \ln 4 \right) .$$

B/3, Egy negyedkörlap területét határozzuk meg. N-nel jelöljük az egységkörlap pozitív síknegyedbe eső darabját.

$$T/4 = \iint_N 1 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, \mathrm{d}y \right) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Az $x = \cos t$ helyettesítéssel integrálva

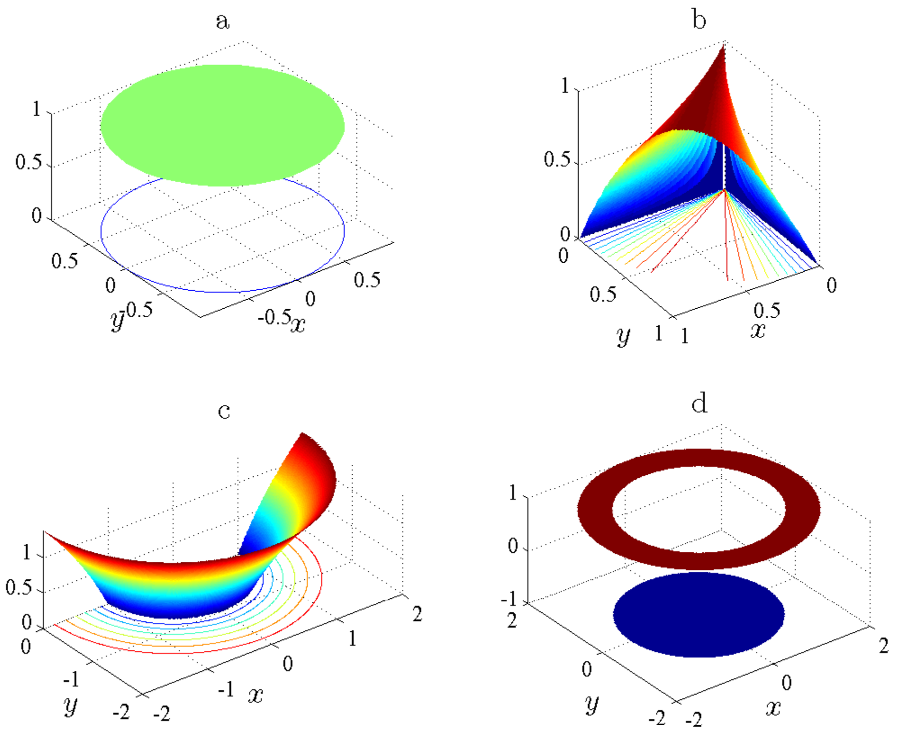
$$T/4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 t} \, \sin t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} \, \mathrm{d}t = \ldots = \frac{\pi}{4} .$$

C/1, Lásd 15.3.a ábra. Polártranszformációt alkalmazva:

$$T = \iint_K 1 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \int_0^1 2r\pi \, \mathrm{d}r = \pi .$$

C/2, Lásd 15.3.b ábra. Polártranszformációt alkalmazva az integrálandó kifejezés egyszerűsödik:
$\frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2r^2 \cos\varphi \sin\varphi}{r^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)} = \sin 2\varphi$, tehát

$$\iint_T f \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi \cdot r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \ldots = \frac{1}{2} .$$



15.3. ábra. a) C/1 feladat, b) C/2 feladat, c) C/3 feladat, d) D/3 feladat.

C/3, Lásd 15.3.c ábra.

$$\iint_T \ln(x^2+y^2)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \ln r^2 \cdot r\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}r = 2\pi \int_1^2 2r \ln r\ \mathrm{d}r\,,$$

amit parciálisan integrálva ($u' = 2r, v = \ln r$ szereposztással):

$$= 2\pi[r^2 \ln r]_1^2 - 2\pi \int_1^2 r^2 \frac{1}{r}\ \mathrm{d}r = 2\pi \left[r^2 \ln r - \frac{r^2}{2}\right]_1^2 = 2\pi \left(4\ln 2 - \frac{3}{2}\right).$$

D/1/a,

$$\int_0^2 \int_x^{2x} f(x,y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y + \int_2^4 \int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\,.$$

D/1/b,

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\,.$$

D/1/c,

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{1} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x\,.$$

D/3, 0 . Lásd 15.3.d ábra.

Többszörös integrálok II.

Kulcsszavak:

téglatartomány, normáltartomány, hármas integrál, hengerkoordináták, gömbi koordináták

16.1. Elméleti összefoglaló

Az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ típusú függvények integrálja (hármas integrál) a kettős integrálhoz hasonlóan definiálható. Az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvény V tartományon vett hármas integrálját $\iiint_V f$ jelöli.

16.1. Definíció. *Téglatartomány*nak nevezzük a $V = \{(x, y, z) : a_1 \le x \le b_1, a_2 \le y \le b_2, a_3 \le z \le b_3\} \subset \mathbb{R}^3$ halmazt.

Ha f integrálható a V téglatartományon, és N jelöli V merőleges vetületét az xy-síkra, akkor f függvény V tartományon vett integrálja

$$\iiint_V f(x, y, z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_N \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\ \mathrm{d}z \right)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

amennyiben a belső integrál létezik minden rögzített $(x, y) \in N$ esetén.

Hasonló feltételek esetén, mint a kettős integrálnál, az integrálás sorrendje téglatartomány esetén is felcserélhető.

16.2. Definíció. Legyen T az xy sík normáltartománya, és $g_1, g_2 : T \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, amelyekre $g_1(x, y) \le g_2(x, y)\ \forall (x, y) \in T$. Ekkor a

$$V = \{(x, y, z) : (x, y) \in T, g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y)\}$$

halmazt az *xy síkra normáltartomány*nak nevezzük.

Legyen f folytonos, ekkor

$$\iiint_V f(x, y, z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_T \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\ \mathrm{d}z \right)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Hasonlóan értelmezhető az xz ill. yz síkra normáltartomány is.

Alkalmas transzformációval a hármas integrál kiszámítása is gyakran egyszerűbbé válik. Tegyük fel, hogy az $x : (u,v,w) \mapsto x(u,v,w)$, $y : (u,v,w) \mapsto y(u,v,w)$ és $z : (u,v,w) \mapsto z(u,v,w)$, $(u,v,w) \in V'$ függvények a $V' \subset \mathbb{R}^3$ tartományt kölcsönösen egyértelműen leképezik a V tartományra, és folytonosan differenciálhatók. Ekkor ha f integrálható a V tartományon, akkor

$$\iiint_V f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{V'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| \ \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

ahol

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

a transzformáció Jacobi-determinánsa.

Speciálisan hengerkoordinátákra való áttérés esetén

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \quad z = z,$$

ekkor a Jacobi-determináns r-rel egyenlő, aminek az abszolút értéke is r.

Gömbi koordinátákra áttérve

$$x = r\sin\vartheta\cos\phi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\phi, \quad z = r\cos\vartheta,$$

és a Jacobi-determináns $r^2\sin\vartheta$, aminek az abszolút értéke $r^2\sin|\vartheta|$.

(Megjegyezzük, hogy ezek sem kölcsönösen egyértelm? leképezések, de ez a probléma is könnyen kiküszöbölhet?.)

16.2. Feladatok

A, *hármas integrál*

1. Határozzuk meg az $f(x,y,z) = x^2 + 4yz$ függvény integrálját az egységkockán!
2. $T := \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le 1-x-y\}$ (ld. 16.1.a ábra). $\iiint_T 2xy\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = ?$
3. $T := \left\{(x,y,z) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2},\ 0 \le z \le 1-x^2-y^2\right\}$ (ld. 16.1.b ábra). $\iiint_T 2y\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = ?$
4. Határozzuk meg a $z = 1 - x^2 - y^2$ felület xy-sík feletti részének térfogatát!

B, *hármas integrál transzformációja – henger és gömbi koordinátákra való áttérés*

1. $T := \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 1\right\}$. $\iiint_T \frac{z}{1+x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = ?$ (hengerkoordináták alkalmazásával)

2. Számítsuk ki az R sugarú, m magasságú henger térfogatát!
3. Számítsuk ki (gömbi koordináták alkalmazásával) az $f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ függvény integrálját az egységgömb 1. térnyolcadba eső részén!
4. Számítsuk ki az R sugarú gömb térfogatát!
5. Határozzuk meg az $x^2+y^2 = R^2$, $x+y+z = a$, $x = 0$, $y = 0$ és $z = 0$ felületek által közrefogott test (16.2.b ábra) térfogatát!

16.3. Megoldások–Eredmények–Útmutatások

A/1, Az integrálás sorrendje tetszőleges.

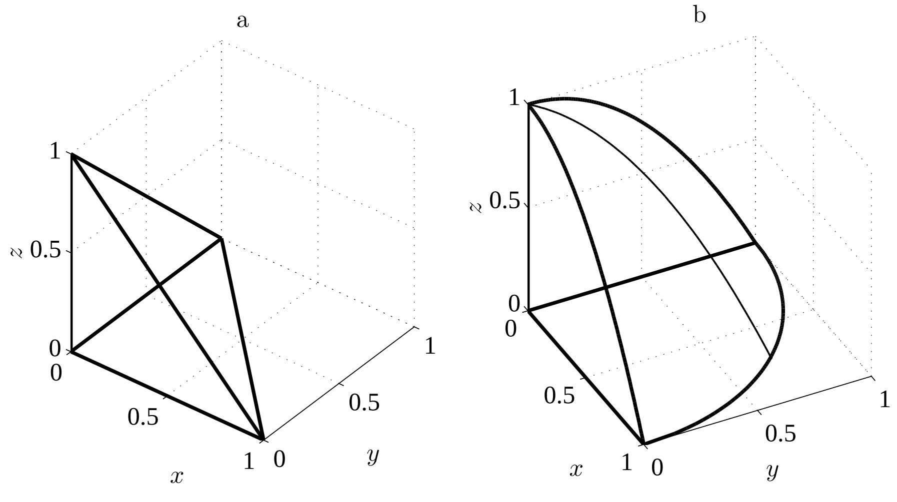
$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 x^2+4yz\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z=\int_0^1\int_0^1\left[\frac{x^3}{3}+4yzx\right]_{x=0}^1\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{3}+4yz\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z=$$
$$\int_0^1\left[\frac{1}{3}y+2y^2z\right]_{y=0}^1\mathrm{d}z=\int_0^1\frac{1}{3}+2z\;\mathrm{d}z=\ldots=\frac{4}{3}.$$

A/2, Az integrálási tartomány a 16.1.a ábrán látható.

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}2xy\;\mathrm{d}z\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^{1-x}2xy(1-x-y)\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}x=$$
$$\int_0^1\left[xy^2-x^2y^2-\frac{2xy^3}{3}\right]_{y=0}^{1-x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{3}x-x^2+x^3-\frac{1}{3}x^4\;\mathrm{d}x=\ldots=\frac{1}{60}.$$

A/3, Az integrálási tartomány a 16.1.b ábrán látható.

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{1-x^2-y^2}2y\;\mathrm{d}z\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}2y(1-x^2-y^2)\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}x=$$
$$\int_0^1\left[y^2-y^2x^2-\frac{y^4}{2}\right]_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^1 1-x^2-(1-x^2)x^2-\frac{1}{2}(1-x^2)^2\;\mathrm{d}x=$$
$$\int_0^1\frac{1}{2}\left(1-2x^2+x^4\right)\;\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^1=\ldots=\frac{4}{15}.$$



16.1. ábra. Az integrálási tartományok: a) A/2 feladat, b) A/3 feladat.

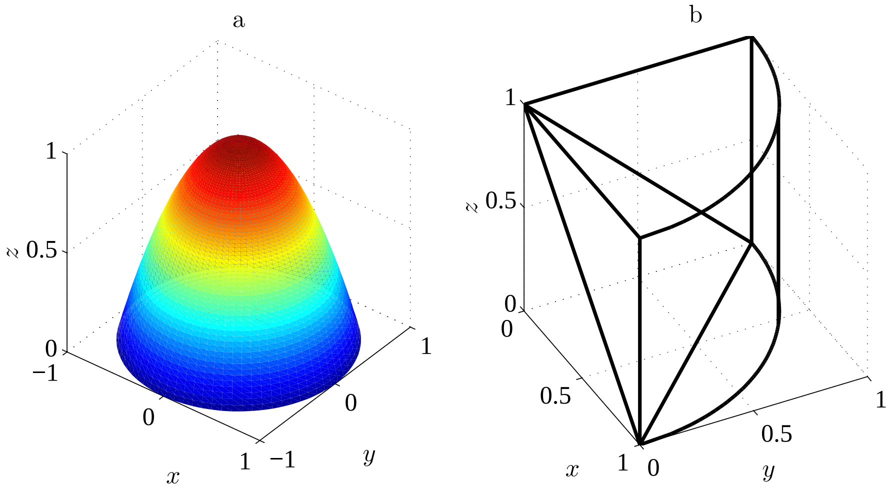
A/4, A felület a 16.2.a ábrán látható.

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{1-x^2-y^2} 1\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1-x^2-y^2\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x =$$

$$\int_{-1}^{1}\left[y-x^2y-\frac{y^3}{3}\right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = \frac{4}{3}\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3\ \mathrm{d}x\,,$$

majd x-et $\sin t$-vel helyettesítve és felhasználva a $\cos^2 t = \frac{\cos 2t+1}{2}$ azonosságot:

$$\frac{4}{3}\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-x^2})^3\ \mathrm{d}x = \frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\ \mathrm{d}t = \ldots = \frac{\pi}{2}\,.$$



16.2. ábra. a) A/4 feladat: a $z = 1 - x^2 - y^2$ felület xy-sík feletti része, b) B/5 feladat: az integrálási tartomány $a = 1$ esetén.

B/1, Hengerkoordinátákra áttérve:

$$\iiint_T \frac{z}{1+x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{z}{1+r^2}r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{2r}{1+r^2}z\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}z =$$

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}[z\ln(1+r^2)]_{r=0}^{1}\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}z = \ldots = \frac{\pi}{2}\ln 2\,.$$

B/2, Hengerkoordinátákra áttérve:

$$V = \int_1^R\int_0^{2\pi}\int_0^m 1{\cdot}r\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}r = \int_0^R\int_0^{2\pi} mr\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}r = \int_0^R 2\pi mr\ \mathrm{d}r = 2\pi m\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = mR^2\pi\,.$$

B/3, Gömbi koordinátákra áttérve:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \frac{r^3\sin^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\cos\vartheta}{r^2}r^2\sin\vartheta\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\omega =$$

$$\left(\int_0^1 r^3\ \mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\vartheta\cos\vartheta\ \mathrm{d}\omega\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\ \mathrm{d}\varphi\right) = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1\left[\frac{\sin^4\vartheta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{4}\cos 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{32}\,.$$

B/4, Gömbi koordinátákra áttérve:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R 1\cdot r^2\sin\vartheta\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\omega = \int_0^{\pi} 2\pi\sin\vartheta\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R\ \mathrm{d}\omega = \frac{2}{3}R^3\pi\int_0^{\pi}\sin\vartheta\ \mathrm{d}\omega = \ldots = \frac{4}{3}R^3\pi\,.$$

FEJEZET **17**

Komplex függvénytan I.

Kulcsszavak:
folytonosság, differenciálhatóság

17.1. Elméleti összefoglaló

A komplex függvénytan az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvények analízisével foglalkozik. Ezek a függvények megadhatók az $f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ alakban, ahol $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ az ún. valós- és képzetesrészfüggvények. Ebből adódik, hogy az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ és az $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvények között bijekció létesíthető.

Ez alapján a komplex függvények határértékének és folytonosságának a fogalma nem igényel külön tárgyalást. Így például a folytonosság a következőt jelenti:

17.1. Definíció. Az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény *folytonos* a $z_0 \in D(f)$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $z \in D(f)$, $|z - z_0| < \delta$ esetén $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

A $z = x + iy$ komplex szám abszolút értékén a $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$ számot értjük, ami nem más, mint a z komplex számnak megfelelő $\mathbb{R}^2$-beli vektor euklideszi normája. Egy $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény tehát pontosan akkor folytonos, amikor a megfelelő $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény is az, vagyis amikor az u és v valós- és képzetesrészfüggvények folytonosak.

Egy komplex függvény differenciálhatósága azonban nem azt jelenti, hogy a megfelelő $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény differenciálható. A komplex számok körében értelmes az osztás, így a differenciahányados-függvény is. Így a valós-valós függvények deriváltjának a differenciahányados-függvény határértékén alapuló definíciója (amely nem terjeszthető ki tetszőleges normált térből normált térbe képező függvényre) a komplex függvények körében értelmes.

17.2. Definíció. Az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény *differenciálható* a $z_0 \in \mathrm{int}D(f)$ pontban, ha létezik a

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

($\mathbb{C}$-beli) határérték. Ha létezik, akkor ezt a számot az *f függvény z_0 pontbeli deriváltjának nevezzük.*

Ennek értelmében tehát a derivált egy komplex szám, és nem egy 2×2-es mátrix.

17.2. Feladatok

A, *komplex számok*

1. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!
   a, $(1+i)(1-i)$; b, $(1+i)^2$; c, $\frac{1}{i^3}$; d, $\frac{1+i}{1-2i}$.
2. Írjuk át a következő komplex számokat a másik két alakba! (algebrai/ trigonometrikus/ exponenciális)
   a, $1-i$; b, $\sqrt{3}+i$; c, $2i$; d, 1; e, $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$; f, $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$; g, $\sin\alpha - i\cos\alpha$.
3. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!
   a, $(1-i)^{2011}$; b, $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$; c, $\sqrt{-1}$; d, $\sqrt{i}$; e, $\sqrt[3]{1}$; f, $\sqrt[5]{1-i}$.
4. Adjunk formulát $\sin 3\alpha$ és $\cos 3\alpha$-ra $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ segítségével!
5. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok körében!
   a, $z^2+1=0$; b, $z^2-2z+2=0$; c, $z^2 = i\,|z|$; d, $z^2-2iz-1=0$; e, $z^3-21z+20=0$.
6. Igazoljuk a következő azonosságokat!
   a, $\overline{\overline{z}} = z$; b, $|\overline{z}| = |z|$; c, $\overline{z}z = z\overline{z} = |z|^2$; d, $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$; e, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2$.
7. Mutassuk meg, hogy a komplex számtest nem rendezhető (műveletttartóan)!

B, *folytonosság, differenciálhatóság*

1. Mutassuk meg, hogy az $f(z) = z^2$ függvény folytonos!
2. A definíciót használva számítsuk ki $f'(z)$-t, ha
   a, $f(z) = z^3$; b, $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$.
3. Mutassuk meg, hogy az alábbi függvények nem differenciálhatóak!
   a, $f(z) = Re(z)$; b, $f(z) = \bar{z}$; c, $f(z) = |z|$.
4. Mutassuk meg, hogy az alábbi függvény folytonos, illetve állapítsuk meg, hogy létezik-e $f'(0)$!
$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z} & \text{, ha } z \neq 0, \\ 0 & \text{, ha } z = 0. \end{cases}$$

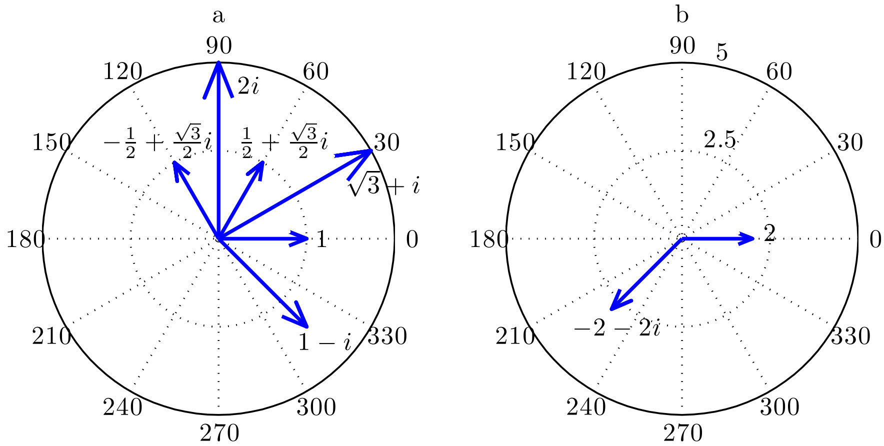
17.3. Megoldások–Eredmények–Útmutatások

A/1/a, $(1+i)(1-i) = 1 - i^2 = 1 - (-1) = 2.$

A/1/b, $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i.$

A/1/c, $\frac{1}{i^3} = \frac{1}{(i^2)i} = -\frac{1}{i} = \frac{i^2}{i} = i.$

A/1/d, $\frac{1+i}{1-2i} = \frac{(1+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{1+3i+2i^2}{1-4i^2} = \frac{-1+3i}{5} = -\frac{1}{5} + i\frac{3}{5}.$



17.1. ábra. a) A/2/a-f feladat, b) A/3/a ($-2^{1005} - i2^{1005}$ helyett $-2 - i2$) és b feladat.

A/2/a, $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = -1 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4}$
$\Rightarrow$ $1 - i$ trigonometrikus alakja: $\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$, exponenciális alakja: $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Lásd 17.1.a ábra.

A/2/b, $r = \sqrt{3+1} = 2$, $\sin\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$. Lásd 17.1.a ábra.

A/2/c, $2i = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$. Lásd 17.1.a ábra.

A/2/d, $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0) = e^0$. Lásd 17.1.a ábra.

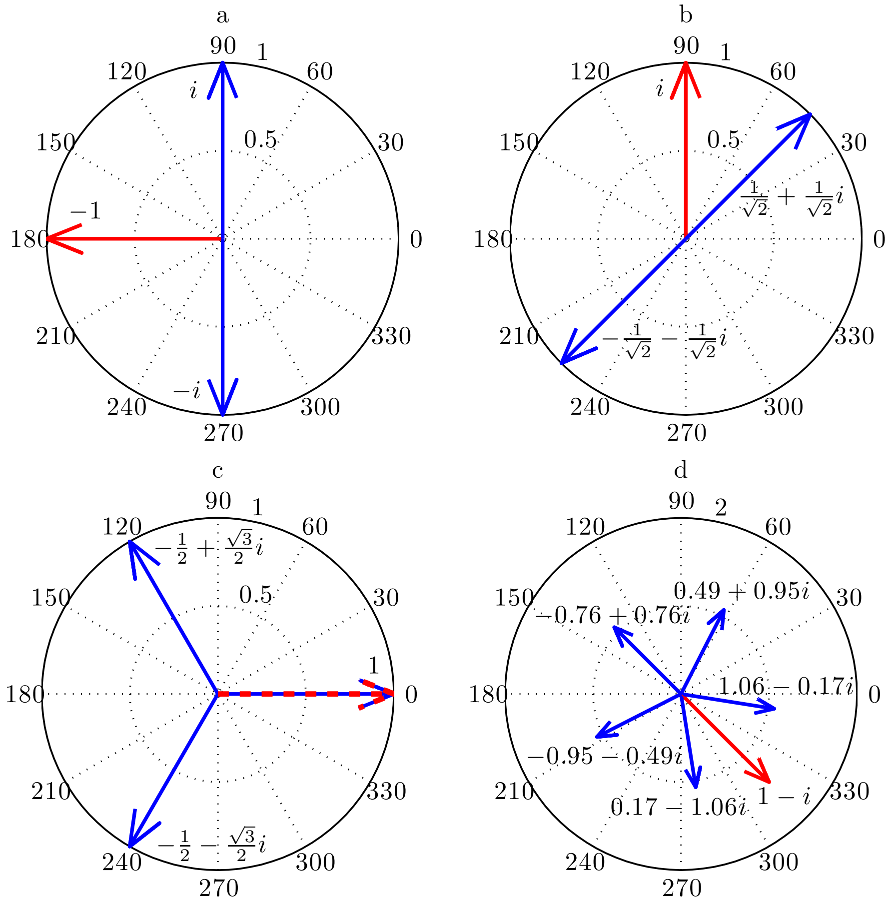
A/2/e, $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Lásd 17.1.a ábra.

A/2/f, $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Lásd 17.1.a ábra.

A/2/g, $\sin\alpha - i\cos\alpha = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) + i\sin(\alpha - \frac{\pi}{2})$.

A/3/a, $-2^{1005} - i2^{1005}$. Lásd 17.1.b ábra.

A/3/b, $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = \frac{(1+i)^{16}}{[(1-i)(1+i)]^7} = \frac{[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})]^{16}}{2^7} = \frac{(\sqrt{2})^{16}}{2^7}(\cos 4\pi + i\sin 4\pi) = 2$. Lásd 17.1.b ábra.



17.2. ábra. a) A/3/c feladat, b) A/3/d feladat, c) A/3/e feladat, d) A/3/f feladat. Piros szín jelöli a komplex számot, amelyből gyököt kell vonni, kék szín a gyököket.

A/3/c, $\pm i$. Lásd 17.2.a ábra.

A/3/d, $\sqrt{i}=\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)$, $k=0,1\Rightarrow(\sqrt{i})_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $(\sqrt{i})_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Lásd 17.2.b ábra.

A/3/e, $\sqrt[3]{1}=\sqrt{\cos 0+i\sin 0}=\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$, $k=0,1,2$ (ezek az egységnyi abszolút értékű, 0, $\frac{2\pi}{3}$ és $\frac{4\pi}{3}$ irányszögű komplex számok). Lásd 17.2.c ábra.

A/3/f, $\sqrt[5]{1-i}=\sqrt[5]{\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})}=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+k2\pi}{5}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+k2\pi}{5}\right)$, $k=0,1,2,3,4$. Lásd 17.2.d ábra.

A/4 Írjuk fel a $\cos\alpha+i\sin\alpha$ komplex szám köbét kétféleképpen:
1. $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3=\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha$;
2. $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3=\cos^3\alpha+3\cos^2\alpha i\sin\alpha+3\cos\alpha(i\sin\alpha)^2+(i\sin\alpha)^3=\cos^3\alpha-$

$3\cos\alpha\sin^2\alpha + i(3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha)$.
A két egyenlőség jobb oldalán ugyanaz a komplex szám áll, tehát külön-külön a valós és a képzetes részük is megegyezik. Ebből $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha$ és $\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha$.

A/5/a, $z_{1,2} = \pm i$.

A/5/b, $z_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i$

A/5/c, Írjuk fel a z komplex számot $x + iy$ alakban, ahol $x, y \in \mathbb{R}$. Ezzel az egyenlet $(x^2 - y^2) + i2xy = i\sqrt{x^2 + y^2}$. Az egyenlőség két oldalán álló komplex szám valós és képzetes része is meg kell, hogy egyezzen. Ebből az $x^2 - y^2 = 0$ és $2xy = \sqrt{x^2 + y^2}$ egyenleteket kapjuk. Az első egyenlet megoldása $x = \pm y$. A másodikba behelyettesítve:
I) $x = y$ esetén a $2x^2 = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}|x|$ egyenletet kapjuk. Négyzetre emelve $4x^4 = 2x^2$. Az $x = 0$ megoldás (ekkor $y = 0$). Ha $x \neq 0$, akkor oszthatunk x^2-tel, és így a $2x^2 = 1$ egyenlethez jutunk, amelynek megoldása $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ $(y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$.
II) $x = -y$ esetén a $-2x^2 = \sqrt{2x^2}$ egyenletet kapjuk. Ennek megoldása $x = 0$ $(y = 0)$.
Összegezve, az egyenletnek három megoldása van: $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$, $z_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$.

A/5/d, $z^2 - 2iz - 1 = (z - i)^2 \Rightarrow z = i$.

A/5/e, A Cardano-képlet a következőképpen adja meg a gyököket a $z^3 + pz + q = 0$ egyenlet esetén:

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Ezt alkalmazva tehát $z = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{10^2 + (-7)^3}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{10^2 + (-7)^3}} = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}$ értékét kell meghatároznunk.
A továbbiakban használjuk fel, hogy $\sqrt[3]{-10 \pm \sqrt{-243}} = (2 \pm \sqrt{-3})^3$. Majd a köbgyökvonást háromféleképpen elvégezve kapjuk, hogy $z = 1, 4, 5$ a gyökök.

A/6/a, Legyen $z = x + iy$.
$\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{x + iy}} = \overline{x - iy} = x + iy = z$.

A/6/b, $|\overline{z}| = \overline{x - iy} = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

A/6/c, $(x + iy)(x - iy) = (x - iy)(x + iy) = x^2 + iyx - ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$

A/6/d, $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$
$|z_1z_2| = |(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)| = |x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_2y_1 + x_1y_2)| = \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_2y_1 + x_1y_2)^2} = \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + x_1^2y_2^2}$
$|z_1||z_2| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2} = \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + x_1^2y_2^2}$

A/6/e, $\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} = \overline{x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_2y_1 + x_1y_2)} = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_2y_1 + x_1y_2)$

$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_2y_1 + x_1y_2)$

A/7 A valós számok rendezésének ismert tulajdonsága, hogy ha $a \geq 0$ és $b \geq 0$, akkor $ab \geq 0$. Megmutatjuk, hogy a valós számokon használatos rendezést nem tudjuk a komplex számtestre úgy kiterjeszteni, hogy ezzel a tulajdonsággal rendelkezzen. Tegyük fel először, hogy $i \geq 0$. Ekkor $a = b = i$ mellett $ab = i^2 = -1 \geq 0$, ami ellentmondás. Másodszor tegyük fel, hogy $i \leq 0$, azaz $-i \geq 0$. Ekkor $a = -i$ és $b = -i$ szereposztással $ab = (-i)^2 = -1 \geq 0$ szintén ellentmondás. Azaz i és a 0 közé nem tudunk semmilyen relációs jelet írni, így a komplex számokat nem tudjuk műveletartóan rendezni.

1. minta zárthelyi

1. Legyen $f(x,y) = (x^2y, xy^2)$, az r út pedig a $(0,0)$ pontból az $(1,2)$ pontba halad egyenes mentén. Számítsa ki az $\int_r f$ vonalintegrált! (3 p)

2. Legyen $f(x,y) = (xy^2, x^2y)$, az r út pedig a $(0,0)$ pontból a $(\pi,0)$ pontba halad az $y = \sin x$ görbén. Számítsa ki a következő vonalintegrált! $\int_r f$. (4 p)

3. Cserélje fel az integrálás sorrendjét az alábbi kettős integrálban! (3 p)

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x,y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x\,.$$

4. Számítsa ki a következő kettős integrált! (5 p)

$$\iint_{\pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2} \cos(\sqrt{x^2+y^2})\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

5. Számítsa ki annak a testnek (tetraédernek) a térfogatát, melyet az $x = 0$, $z = 0$, $x = y$, $z = 1 - y$ síkok határolnak! (4 p)

6. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket! (2+2 p)

$$(a)\quad \frac{(2-i)^3}{(1+2i)^3}\,; \qquad (b)\quad \sqrt[4]{1}\,.$$

7. Legyen $f(z) = |z|^2 + 2i\mathrm{Re}z\mathrm{Im}z$. (3+1 p)
   (a) A komplex számsík mely pontjaiban teljesülnek $f(z)$-re a Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenletek?
   (b) A komplex számsík mely pontjaiban differenciálható az $f(z)$ függvény?

FEJEZET 19

Komplex függvénytan II.

Kulcsszavak:

Cauchy–Riemann-féle differenciálegyenletek, Laplace-egyenlet, reguláris függvény, hatványsor, konvergenciasugár, Taylor-féle képlet

19.1. Elméleti összefoglaló

Egy $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény differenciálhatóságára szükséges és elégséges feltételt adhatunk a *Cauchy–Riemann-féle differenciálegyenletek* segítségével.

19.1. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.*

1. *Ha f differenciálható a $z_0 = x_0 + iy_0 \in \operatorname{int} D(f)$ pontban, akkor ebben a pontban teljesülnek az úgynevezett Cauchy–Riemann-féle differenciálegyenletek:*
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \text{és} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{19.1}$$
2. *Megfordítva, ha teljesül (19.1), továbbá, ezek a parciális deriváltak léteznek és folytonosak z_0 egy környezetében, akkor f differenciálható z_0-ban (sőt z_0 egy környezetében is).*

Ez azt jelenti, hogy egy komplex függvény differenciálható egy z_0 pontban, ha a megfelelő $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény (x_0, y_0)-pontbeli deriváltmátrixának főátlójában megegyeznek az elemek és a másik két elem egymás mínusz egyszerese, továbbá a deriváltmátrix elemei folytonosak az (x_0, y_0)-pontban.

A differenciálható komplex függvények szép tulajdonságokkal rendelkeznek.

19.2. Tétel. *Ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény differenciálható a T tartományon, akkor ott tetszőlegesen sokszor differenciálható.*

Tehát, ha egy komplex függvény differenciálható egy tartományon, akkor ott *reguláris*.

19.3. Tétel. *Ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ reguláris a T tartományon, akkor ott a valós- és képzetes-részfüggvényei harmonikusak, azaz kielégítik a* Laplace-egyenlet*et:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \text{és} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ reguláris a T tartományon, akkor hatványsorba is fejthető, vagyis $f(z)$ előáll

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

alakban, ahol $a \in T$. Ennek a hatványsornak a *konvergenciasugar*a

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Amennyiben a nevező 0, akkor a konvergenciasugár ∞, tehát a konvergenciahalmaz az egész komplex számsík. Ha a nevező ∞, akkor a konvergenciasugár 0, tehát a konvergenciahalmaz egyetlen pontból áll. A hatványsor a konvergenciatartományán belül abszolút konvergens, azon kívül divergens.

A hatványsor a konvergenciatartományán belül tagonként differenciálható. A derivált hatványsornak szintén ρ a konvergenciasugara. A hatványsor együtthatóit a

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{k!}$$

Taylor-féle képlet adja.

19.2. Feladatok

A, *Cauchy–Riemann-féle differenciálegyenletek, Laplace-féle differenciálegyenlet*

1. Differenciálható-e az $f(x+iy) = x^3 - i(1-y)^3$ függvény?
2. Döntsük el, hogy a komplex számsík mely pontjaiban teljesülnek a Cauchy–Riemann-féle differenciálegyenletek az alábbi függvények esetén!
   a, $f(z) = \bar{z}^2$; b, $f(z) = z\,|z|$; c, $f(z) = \frac{1}{z}$; d, $f(x+iy) = \sqrt{|xy|}$.
   Differenciálhatóak-e ezen pontokban az adott függvények?
3. Mutassuk meg, hogy a következő függvények harmonikusak, vagyis kielégítik a Laplace-féle differenciálegyenletet!
   a, $f(x,y) = x^2 - y^2$; b, $f(x,y) = e^x \cos y$; c, $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.
4. Legyen $D \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$ differenciálható, és $\mathrm{Re} f(z)$ állandó D-n. Mutassuk meg, hogy $f(z)$ is állandó D-n!

B, *hatványsorok*

1. Határozzuk meg a következő hatványsorok konvergenciasugarát!
   a, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$; b, $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$; c, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$; d, $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$; e, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$;

2. Határozzuk meg az $\exp z$, $\sin z$, $\cos z$ hatványsorainak konvergenciasugarát!
3. Határozzuk meg az $\exp z$, $\sin z$, $\cos z$ függvények deriváltját!
4. Igazoljuk a következő azonosságokat!
   a, $e^{iz} = \cos z + i \sin z$; b, $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$; c, $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$; d, $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$;
   e, $\operatorname{ch} iz = \cos z$; f, $\operatorname{sh} iz = i \sin z$; g, $e^{z+t} = e^z e^t$; h, $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$; i, $|e^z| = e^x$.
5. Igazoljuk, hogy az $\exp z$ függvény periodikus! Hová képezi a $H = \{(x, y) : -\pi < y \leq \pi\}$ halmazt az $\exp z$ függvény? Vezessük be a $\log z$ függvényt!

19.3. Megoldások–Eredmények–Útmutatások

A/1, f olyan $(x,y)\in\mathbb{C}$ pontokban lehet csak differenciálható, ahol fennállnak a Cauchy–Riemann-egyenletek: $\partial_x u = 3x^2 = \partial_y v = 3(1-y)^2$ illetve $\partial_y u = 0 = -\partial_x v = 0$, ami csak akkor teljesül, ha $y = 1-|x|$.
u és v parciális deriváltjai az egész komplex számsíkon folytonosak (tehát u és v differenciálható), tehát f az $y=1-|x|$ feltételnek eleget tevő pontokban differenciálható is.

A/2/a, $f(z) = f(x+iy) = (x-iy)^2 = x^2-y^2-2ixy \Rightarrow u(x,y) = x^2-y^2,\ v(x,y) = -2xy$.
Cauchy–Riemann-egyenletek:
$\partial_x u = 2x = \partial_y v = -2x$, ami akkor teljesül ha $x=0$; illetve $\partial_y u = -2y = -\partial_x v = 2y$, ami akkor teljesül ha $y=0$.
u és v parciális deriváltjai az egész komplex számsíkon folytonosak (tehát u és v differenciálható), tehát f a $z=0$-ban differenciálható.

A/2/b, $f(z) = f(x+iy) = (x+iy)\sqrt{x^2+y^2} = x\sqrt{x^2+y^2} + iy\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow\ u(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2},\ v(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$.

$$\partial_x u(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ ha } (x,y)\neq(0,0) \\ \lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{x^2}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\sqrt{x^2} = \lim_{x\to 0}|x| = 0, \text{ ha } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\partial_y v(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ ha } (x,y)\neq(0,0) \\ \lim_{y\to 0}\frac{y\sqrt{y^2}-0}{y-0} = \lim_{y\to 0}\sqrt{y^2} = \lim_{y\to 0}|y| = 0, \text{ ha } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\partial_y u(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ ha } (x,y)\neq(0,0) \\ \lim_{y\to 0}\frac{0\sqrt{0+y^2}-0}{y-0} = 0, \text{ ha } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\partial_x v(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ ha } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, \text{ ha } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

A $\partial_x u = \partial_y v$ egyenlet azon (x,y) pontokban áll fenn, amelyekre $|x| = |y|$. A $\partial_y u = -\partial_x v$ egyenlet azon pontokban áll fenn, amelyekre $x\cdot y = 0$. A két egyenlet egyszerre csak a 0-ban áll fenn. u és v parciális deriváltjai az egész komplex számsíkon folytonosak (a 0-ban is!) (tehát u és v differenciálható) $\Rightarrow$ Az f függvény a $z=0$ pontban differenciálható.

A/2/c, $f(z) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},\ v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$. f értelmezési tartománya $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

$$\partial_x u(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\ \partial_y v(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\ \partial_y u(x,y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\ \partial_x v(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$\Rightarrow \partial_x u = \partial_y v$ és $\partial_y u = -\partial_x v$ teljesül az értelmezési tartomány minden pontjában, illetve folytonosak is itt $\Rightarrow$ f differenciálható is ezeken a helyeken.

A/2/d, A Cauchy-Riemann egyenletek az x- és y-tengelyeken állnak fenn. Viszont a 0 pontban nem differenciálható a függvény. Ennek belátásához tekintsük a 0 pontbeli differenciálhányadost és tartsunk különböző egyenesek mentén 0-hoz. A határérték függeni fog az egyenestől, így nem létezik, tehát ott nem differenciálható.

A/3/a, $\partial_{xx} f = 2$, $\partial_{yy} f = -2 \Rightarrow \partial_{xx} f + \partial_{yy} f = 0$.

A/3/b, $\partial_{xx} f = e^x \cos y$, $\partial_{yy} f = -e^x \cos y \Rightarrow \partial_{xx} f + \partial_{yy} f = 0$.

A/3/c, $\partial_{xx} f = \frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\partial_{yy} f = \frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \partial_{xx} f + \partial_{yy} f = 0$.

A/4, Feltevésünk szerint $u(x,y)$ =konstans. Ezért $\partial_x u(x,y) = 0$ és $\partial_y u(x,y) = 0\ \forall (x,y) \in D$. Mivel f reguláris D-n, D minden pontjában fennállnak a Cauchy–Riemann-egyenletek. Az első egyenletből $\partial_y v = 0$, amiből $v(x,y) = f(x)$ következik. A második egyenletből $\partial_x v = 0$, következésképpen $v(x,y) = g(y)$ alakú. $v(x,y)$ tehát csak olyan függvény lehet, amely sem x-től, sem y-tól nem függ, azaz $v(x,y)$ =konstans. Ha u és v konstans, akkor f is konstans.

B/1/a, A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hatványsor konvergenciasugarát az

$$R = \frac{1}{\limsup\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)}$$

képlet szolgáltatja. Itt $a_n = 1$, tehát $\limsup(\sqrt[n]{|1|}) = \lim(\sqrt[n]{1}) = 1 \Rightarrow R = 1$.

B/1/b, $\lim \sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow R = 1$.

B/1/c, $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow R = 1$.

B/1/d, $\lim \sqrt[n]{n^n} = \lim n = +\infty \Rightarrow R = 0$.

B/1/e, $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow R = +\infty$.

B/2, Mivel $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$, ezért mindhárom függvényt definiáló hatványsor konvergenciasugara $+\infty$.

B/3, Hatványsort tagonként deriválhatunk a konvergenciahalmazán.

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

$$\exp' z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \exp z\,;$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$\sin' z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} (2n+1) z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} z^{2n} = \cos z\,;$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

$$\cos' z = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!} 2n z^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n-1)!} z^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} = -\sin z \,.$$

B/4/a,

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(iz)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(iz)^{2n+1} =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(-1 \cdot z^2)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(iz)(iz)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(-1)^n z^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n z^{2n+1} =$$
$$\cos z + i \sin z \,.$$

B/4/b, Az a, rész alapján:
$e^{-iz} = \cos(-z) + i\sin(-z) = \cos z - i \sin z.$

B/4/c, Az a, és b, rész alapján
$\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2}(\cos z + i \sin z + \cos z - i \sin z) = \frac{1}{2} 2 \cos z = \cos z.$

B/4/d, Az a, és b, rész alapján
$\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i}(\cos z + i \sin z - \cos z + i \sin z) = \frac{1}{2i} 2i \sin z = \sin z.$

B/4/e, $\operatorname{ch} iz = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, majd használjuk a c, részt.

B/4/f, $\operatorname{sh} iz = \frac{1}{2}(e^{iz} - e^{-iz})$, majd használjuk a d, részt.

B/4/g,

$$e^z e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} t^m = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+l=n} \frac{1}{k!} \frac{1}{l!} z^k t^l \right) =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} z^k t^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k t^{n-k} =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+t)^k = e^{z+t} \,.$$

B/4/h, $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

B/4/i, $|e^z| = |e^x e^{iy}| = |e^x| \cdot |e^{iy}| = e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x$.

FEJEZET **20**

Komplex függvénytan III.

Kulcsszavak:

Komplex vonalintegrál: Primitív függvény, Newton–Leibniz-formula, Cauchy-féle integráltétel, Cauchy-féle integrálformula

20.1. Elméleti összefoglaló

Egy $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ görbe mentén vett vonalintegrálját a valós vonalintegrálhoz hasonlóan közelítő összeg határértékeként definiáljuk, és a $\int_\gamma f$ szimbólummal jelöljük.

Legyen a továbbiakban mindvégig $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ folytonos, rektifikálható görbe, és legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ folytonos a γ görbén. Ekkor létezik a $\int_\gamma f$ vonalintegrál és a következ?képpen számíthatjuk ki:

$$\int_\gamma f = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \ \mathrm{d}t$$

érték. Továbbá ha az f valós- és képzetesrészfüggvényét u és v jelöli, akkor $\int_\gamma f$ kiszámítása a következőképpen vezethető vissza valós integrálokra:

$$\int_\gamma f = \int_\gamma (u, -v) + i \int_\gamma (v, u),$$

ahol az egyenl?ség jobb oldalán szerepl? γ-t, mint valós görbét tekintjük.

A továbbiakban összegyűjtjük a komplex függvények vonalintegráljával kapcsolatos legfontosabb állításokat.

20.1. Tétel. *(Cauchy-féle alaptétel)*
Legyen $T \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány. Ekkor ha $f : T \to \mathbb{C}$ differenciálható függvény, akkor minden T-beli zárt γ görbe mentén $\int_\gamma f = 0$.

A primitív függvény fogalmát ugyanúgy értelmezzük, mint valós esetben. Legyen T tartomány. Belátható, hogy egy $f : T \to \mathbb{C}$ folytonos függvénynek pontosan akkor létezik F primitív függvénye T-n, ha a vonalintegrálja minden zárt görbe mentén nulla. Ha pedig létezik F, akkor a *Newton–Leibniz-formula* értelmében tetszőleges T-ben haladó γ görbére

$$\int_\gamma f = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)),$$

vagyis a vonalintegrál csak a görbe kezdő- és végpontjától függ.

20.2. Tétel. *Ha $f : T \to \mathbb{C}$ differenciálható a T egyszeresen összefüggő tartományon, akkor ott van primitív függvénye.*

20.3. Tétel. *(Cauchy-féle integrálformula és következménye)*
Tegyük fel, hogy f differenciálható a $T \subset \mathbb{C}$ tartományon, és γ egy T-beli szakaszonként sima, pozitív irányítású zárt görbe. Ekkor

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, \mathrm{d}\xi$$

minden $z \in B(\gamma)$ pontban, ahol $B(\gamma)$ a γ görbe belsejét jelöli. Továbbá

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, \mathrm{d}\xi$$

is teljesül.

20.2. Feladatok

A, *komplex vonalintegrál kiszámítása, primitív függvény, Newton–Leibniz formula*

1. Számítsuk ki $f(z)$ vonalintegrálját az a és a b pontokat összekötő különböző utakon! Legyen
   - a, $f(z) = z$, $a = i$ és $b = -i$, egyenes illetve óramutató járásával ellentétes bejárású félkör az utak;
   - b, $f(z) = \bar{z}$, $a = 0$ és $b = 1 + i$, egyenes illetve az $y = x^2$ parabola az utak;
   - c, $f(z) = |z|$, $a = -i$ és $b = i$, egyenes illetve óramutató járásával azonos bejárású félkör az utak.
2. Számítsuk ki $f(z)$ vonalintegrálját az a és a b pontokat összekötő utakon a Newton–Leibniz-formula segítségével! Legyen
   - a, $f(z) = e^z$, $a = 0$ és $b = i$, óramutató járásával ellentétes bejárású félkör az út;
   - b, $f(z) = \sin z$, $a = -i$ és $b = i$.

B, *Cauchy-féle integráltétel, Cauchy-féle integrálformula*

1. Legyen $f(z) = \frac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$, a γ út pedig az origó középpontú egységsugarú kör az óramutató járásával ellentétes irányban bejárva. Számítsuk ki Cauchy-féle integrálformula nélkül $\int_\gamma f$ értékét, ha
   a, $n > 1$;   b, $n = 1$.

2. Legyen $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, a γ út pedig az origó középpontú egységsugarú kör óramutató járásával ellentétes irányban bejárva. Számítsuk ki Cauchy-féle integrálformula nélkül $\int_\gamma f$ értékét.
3. Oldjuk meg az előző két feladatot a Cauchy-féle integrálformula felhasználásával!

20.3. Megoldások–Eredmények–Útmutatások

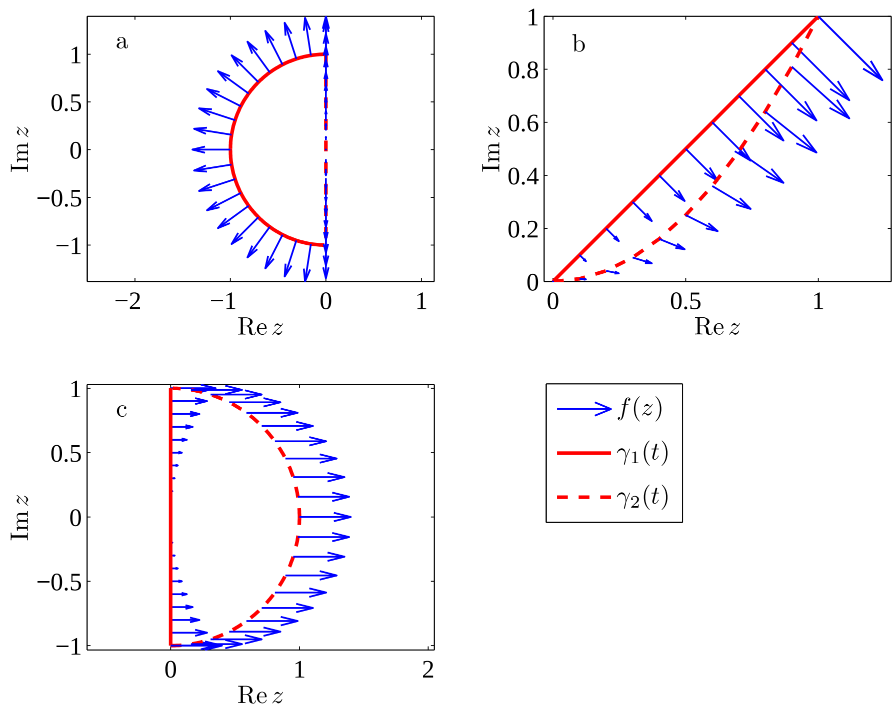
A/1/a, Az $f(z)$ függvényt és az utakat lásd a 20.1.a ábrán.

- Az egyenesszakasz mentén vett vonalintegrál kiszámítása:
  A szakasz paraméterezése: $\gamma_1(t) = i - it,\ t \in [0,2],\ \gamma_1'(t) = -i$.

$$\int_{\gamma_1} f = \int_0^2 f(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^2 (i-it)(-i)\ \mathrm{d}t = \int_0^2 1-t\ \mathrm{d}t = \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^2 = 0\,.$$

- A félkör mentén vett vonalintegrál kiszámítása:
  A görbe paraméterezése: $\gamma_2(t) = e^{it},\ t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}],\ \gamma_2'(t) = ie^{it}$.

$$\int_{\gamma_2} f = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{it}(ie^{it})\ \mathrm{d}t = [i\frac{e^{2it}}{2i}]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 0\,.$$



20.1. ábra. a) A/1/a, b) A/1/b, c) A/1/c feladat.

A/1/b, A függvényt és az utakat lásd a 20.1.b ábrán. Az $f(z) = \overline{z}$ függvény sehol sem reguláris (lásd az 17/B/3 feladatot), így nem tudjuk a Newton–Leibniz-formulát használni.

- Az egyenesszakasz mentén vett vonalintegrál kiszámítása:

A szakasz paraméterezése: $\gamma_1(t) = t + it,\ t \in [0,1]$.

$$\int_{\gamma_1} f = \int_0^1 f(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 (t - it)(1+i)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 2t\ \mathrm{d}t = \left[t^2\right]_0^1 = 1\,.$$

- A parabola mentén vett vonalintegrál kiszámítása:
  A görbe paraméterezése: $\gamma_2(t) = t + it^2,\ t \in [0,1]$.

$$\int_{\gamma_2} f = \int_0^1 (t - it^2)(1+2it)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 (t+2t^3)\ \mathrm{d}t + i\int_0^1 t^2\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2}\right]_0^1 + i\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{3}i\,.$$

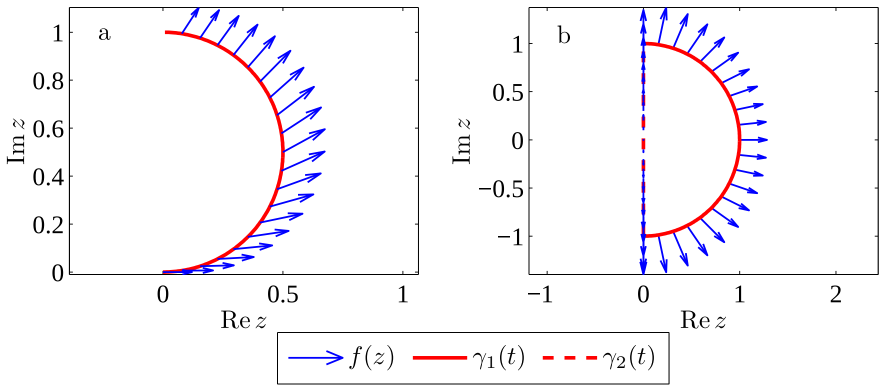
A/1/c, A függvényt és az utakat lásd a 20.1.c ábrán.

- $\gamma_1(t) = 0 + it,\ t \in [-1,1]$. $\quad \int_{\gamma_1} f = \int_{-1}^1 |t| \cdot i\ \mathrm{d}t = i\,.$
- $\gamma_2(t) = e^{-it},\ t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$,

$$\int_{\gamma_2} f = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \underbrace{|e^{-it}|}_{1}(-ie^{-it})\ \mathrm{d}t = \left[e^{-it}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = i + i = 2i\,.$$

A/2/a, $f(z) = e^z$ (lásd 20.2.a ábra) reguláris $\mathbb{C}$-n, egy primitív függvénye $F(z) = e^z$, így a Newton–Leibniz-formulából: $\int_\gamma f = F(b) - F(a) = e^b - e^a = e^i - e^0 = e^i - 1\,.$

A/2/b, $f(z) = \sin z$ (lásd 20.2.b ábra) reguláris $\mathbb{C}$-n, egy primitív függvénye $F(z) = -\cos z$, így a Newton–Leibniz-formulából: $\int_\gamma f = F(b) - F(a) = -\cos i + \cos(-i) = 0\,.$



20.2. ábra. a) A/2/a, b) A/2/b feladat.

B/1/a, 0, mert létezik primitív függénye.

B/1/b, $\gamma(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$, $\quad \int_\gamma \frac{1}{z}\ \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}\ \mathrm{d}t = 2i\pi\,.$

B/2, Felhasználjuk a következő tételt: Ha f a z_0 pont kivételével reguláris egy D tartományon, γ olyan szakaszonként sima D-beli zárt út, amely a belsejében tartalmazza z_0-t, és $\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) = 0$, akkor $\int_\gamma f = 0\,.$

Az $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ függvény a 0-ban nem reguláris, ugyanakkor $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} z = \lim_{z\to 0} \sin z = 0$, ezért $\int_{\partial_1 K(0)} \frac{\sin z}{z} \, \mathrm{d}z = 0$, ahol $\partial_1 K(0)$ jelölte az origó középpontú egységsugarú pozitív irányítású kört.

B/3, 1/b. feladat:

Legyen f az azonosan 1 függvény, erre alkalmazzuk a Cauchy-formulát az $a = 0$ pontban:

$$f(0) = 1 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial_1 K(0)} \frac{f(z)}{z-0} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial_1 K(0)} \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z \Rightarrow \int_{\partial_1 K(0)} \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z = 2i\pi \, .$$

2. feladat:

Alkalmazzuk a Cauchy-formulát a sin függvényre az $a = 0$ pontban:

$$\sin(0) = 0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial_1 K(0)} \frac{\sin z}{z-0} \, \mathrm{d}z \Rightarrow \int_{\partial_1 K(0)} \frac{\sin z}{z} \, \mathrm{d}z = 0 \, .$$

FEJEZET **21**

Komplex függvénytan IV.

21.1. Feladatok

A, *Cauchy-féle integrálformula és következményei*

1. Legyen a γ zárt görbe a K középpontú, r sugarú, óramutató járásával ellentétes bejárású kör. Számítsuk ki $\oint_\gamma g$ értékét, ha

   a, $g(z) = \frac{1}{z-K}$, $r = 1$;
   b, $g(z) = \frac{z}{z-K}$, $r = 1$;
   c, $g(z) = \frac{\sin^8 z}{z-\frac{\pi}{2}}$, $K = 2$, $r = 2$;
   d, $g(z) = \frac{e^z}{z-2}$, $K = \frac{5}{2}$, $r = 1$.

2. Legyen a γ zárt görbe a K középpontú, r sugarú, óramutató járásával ellentétes bejárású kör. Számítsuk ki $\oint_\gamma g$ értékét, ha

   a, $g(z) = \frac{e^{z^2}}{z^2-1}$, $K = \frac{1}{2}$, $r = 1$;
   b, $g(z) = \frac{z^4 e^{\pi z}}{z^2+1}$, $K = i$, $r = 1$;
   c, $g(z) = \frac{1}{1+z^2}$,
   (c1) $K = 5$, $r = 1$; (c2) $K = i$, $r = 1$; (c3) $K = -i$, $r = 1$; (c4) $K = 0$, $r = 3$;
   d, $g(z) = \frac{e^z}{z^2+2z-3}$,
   (d1) $K = 1$, $r = 1$; (d2) $K = -3$, $r = 1$; (d3) $K = 6$, $r = 1$.

3. Legyen a γ zárt görbe a K középpontú, r sugarú, óramutató járásával ellentétes bejárású kör. Számítsuk ki $\oint_\gamma g$ értékét, ha

   a, $g(z) = \frac{z}{(z-K)^2}$;
   b, $g(z) = \frac{z}{(z-K)^6}$.

B, *komplex vonalintegrál alkalmazása valós integrálok kiszámítására*

1. Határozzuk meg az alábbi improprius integrálokat!

   a, $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x$;

b, $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, \mathrm{d}x\,.$

21.2. Megoldások–Eredmények–Útmutatások

A/1/ Használjuk a Cauchy-féle integrálformulát:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, \mathrm{d}z\,,$$

ahol f differenciálható a T tartományban, mely a belsejében tartalmazza a γ pozitív irányítású zárt görbét, amely az a pontot a belsejében tartalmazza.

a, $f(z) = 1$, $a = K$ szereposztással $\oint_\gamma \frac{1}{z-K}\, \mathrm{d}z = 2\pi i 1 = 2\pi i\,;$

b, $f(z) = z$, $a = K$ szereposztással $\oint_\gamma \frac{z}{z-K}\, \mathrm{d}z = 2\pi i K\,;$

c, $f(z) = \sin^8 z$, $a = \frac{\pi}{2}$ szereposztással $\oint_\gamma \frac{\sin^8 z}{z-\frac{\pi}{2}}\, \mathrm{d}z = 2\pi i \sin^8 \frac{\pi}{2} = 2\pi i\,;$

d, $f(z) = e^z$, $a = 2$ szereposztással $\oint_\gamma \frac{e^z}{z-2}\, \mathrm{d}z = 2\pi i e^2\,.$

A/2/a, $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z+1}$, $a = 1$ szereposztással

$$\oint_\gamma \frac{e^{z^2}}{z^2-1}\, \mathrm{d}z = \oint_\gamma \frac{\frac{e^{z^2}}{z+1}}{z-1}\, \mathrm{d}z = 2\pi i \frac{e^1}{1+1} = \pi i e\,.$$

A/2/c, $1 + z^2 = (z-i)(z+i)$

(c1) Ezen a tartományon g reguláris $\Rightarrow \oint_\gamma g = 0\,;$

(c2) Ezen a tartományon $\frac{1}{z+i}$ reguláris $\Rightarrow$

$$\frac{1}{i+i} = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{\frac{1}{z+i}}{z-i}\, \mathrm{d}z \Rightarrow \oint_\gamma g = \pi\,;$$

(c3) Ezen a tartományon $\frac{1}{z-i}$ reguláris $\Rightarrow$

$$\frac{1}{-i-i} = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{\frac{1}{z-i}}{z+i}\, \mathrm{d}z \Rightarrow \oint_\gamma g = -\pi\,;$$

(c4) A tartományt határoló görbe a g függvény mindkét szinguláris pontját körbeveszi. Parciális törtekre bontással:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i} \Rightarrow A = \frac{i}{2}, B = -\frac{i}{2}\,.$$

Tehát

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^2}\, \mathrm{d}z = \frac{i}{2}\left(\int_\gamma \frac{1}{z-i}\, \mathrm{d}z - \int_\gamma \frac{1}{z+i}\, \mathrm{d}z\right) = \frac{i}{2}(2i\pi - 2i\pi) = 0\,.$$

A/2/d, Használjuk fel, hogy $z^2 + 2z - 3 = (z-1)(z+3)\,.$
(d1) $\frac{ie\pi}{2}$ (d2) $-\frac{i\pi}{2e^3}$ (d3) $0\,.$

A/3/ Hasonló feltételekkel, mint a Cauchy-féle integrálformulánál a következő összefüggés igaz:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z \qquad n = 0, 1, \dots .$$

a, $f(z) = z$, $a = K$, $n = 1$ szereposztással

$$f'(K) = 1 = \frac{1!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{z}{(z-K)^2}\,\mathrm{d}z \Rightarrow \int_\gamma \frac{z}{(z-K)^2}\,\mathrm{d}z = 2i\pi\,.$$

b, 0, mert $f(z) = z$-nek már a második deriváltja is 0.

B/1/a, A függvény a 21.1. ábrán látható. Jelölje I_R az

$$I_R := \int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

integrált. A keresett impropius integrál ennek határértéke, miközben $R \to \infty$. Írjuk fel $\sin x$-et két tag összegeként a következőképpen:

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - 1) - \frac{1}{2i}(e^{-ix} - 1)\,.$$

Ezzel

$$I_R = \int_0^R \frac{e^{ix} - 1}{2ix}\,\mathrm{d}x + \int_0^R \frac{1 - e^{-ix}}{2ix}\,\mathrm{d}x\,.$$

A második tagot felírhatjuk -R-től 0-ig menő integrálként az $y = -x$ helyettesítéssel $\int_{-R}^0 \frac{e^{ix}-1}{2ix}$ alakban. Ebből

$$I_R = \int_{-R}^R \frac{e^{ix} - 1}{2ix}\,\mathrm{d}x.$$

Mivel $\lim_{z\to 0}\frac{e^{iz}-1}{2iz} = \frac{1}{2}$, így ha kiterjesztjük az integrálandó függvényt a komplex számsíkra a $z = 0$-ban $\frac{1}{2}$-nek definiálva a függvényértéket, akkor ez a függvény mindenhol differenciálható. Ezért $-R$ és R között tetszőleges úton integrálhatunk. Válasszuk a $\gamma(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$ görbét. Ekkor $\gamma'(t) = Rie^{it}$.

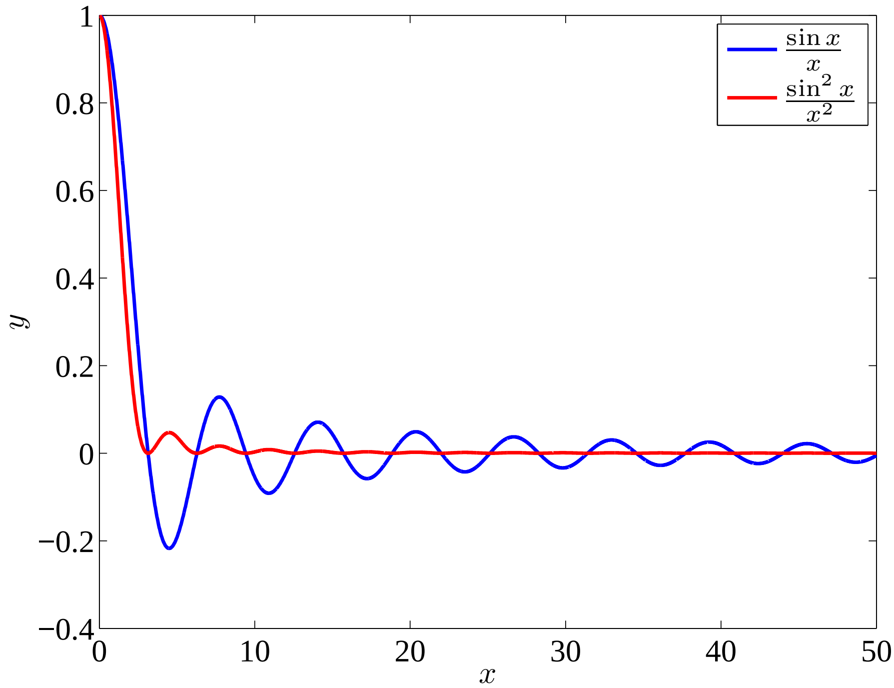
$$I_R = -\int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}} - 1}{2iRe^{it}} iRe^{it}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^\pi (e^{iRe^{it}} - 1)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^\pi e^{iRe^{it}}\,\mathrm{d}t + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{iR(\cos t + i\sin t)}$$

Jelölje $E_R := \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{iR(\cos t + i\sin t)}\,\mathrm{d}t$. Ekkor

$$|E_R| = |\frac{1}{2}\int_0^\pi e^{iR(\cos t + i\sin t)}\,\mathrm{d}t| \le \frac{1}{2}\int_0^\pi |e^{iR(\cos t + i\sin t)}|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\pi |e^{R(i\cos t - \sin t)}|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{-R\sin t}\,\mathrm{d}$$

Belátjuk, hogy $|E_R|$ nullához tart, miközben $R \to \infty$, amiből következik E_R nullához tartása is. Mivel a szinuszfüggvény a $[0, \pi]$ intervallumon szimmetrikus a $\frac{\pi}{2}$ pontra, így $E_R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin t}\,\mathrm{d}t$. A szinuszfüggvény a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon a $\frac{2}{\pi}$ meredekségű lineáris függvény fölött halad, ezért ezen az intervallumon $\sin t \ge \frac{2}{\pi}t$. $\Rightarrow$

$$E_R \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}Rt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-\frac{2}{\pi}Rt}}{-\frac{2}{\pi}R}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}R(1 - e^{-R}) \to 0.$$



21.1. ábra. B/1/a, (kék görbe) és b, (piros görbe).

Függvénysorozatok

Kulcsszavak:

függvénysorozat, (pontonként) konvergens, konvergenciahalmaz, függvénysorozat határfüggvénye, egyenletes konvergencia

22.1. Elméleti összefoglaló

22.1. Definíció. Legyenek $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ adott függvények, amelyek mindegyike értelmezve van a $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmazon. Az $n \mapsto f_n$ leképezést valós *függvénysorozat*nak nevezzük. Jelölése: (f_n).

22.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *(pontonként) konvergens* egy $x \in D$ pontban, ha az $(f_n(x))$ számsorozat konvergens.

22.3. Definíció. Jelölje $B \subset D$ azon pontok halmazát, amelyekben az (f_n) függvénysorozat konvergens. Ezt a halmazt a függvénysorozat *konvergenciahalmaz*ának nevezzük. Jelölje f azt az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelynek értelmezési tartománya az (f_n) függvénysorozat B konvergenciahalmaza, és tetszőleges $x \in B$ pontban az $(f_n(x))$ konvergens sorozat határértékét veszi fel (azaz $f(x) = \lim f_n(x)$). Ezt az f függvényt az (f_n) *függvénysorozat határfüggvényé*nek nevezzük.

A függvénysorozatok vizsgálatának egyik alapkérdése: mi annak a feltétele, hogy az f_n függvények bizonyos tulajdonságai (pl. folytonosság, differenciálhatóság, integrálhatóság) megőrződjenek a határfüggvényre? Ehhez általában nem elegendő a pontonkénti konvergencia.

22.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *egyenletesen konvergál* az f függvényhez a $C \subset \mathbb{R}$ halmazon, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy minden $x \in C$ pontban minden $n \geq N$ esetén $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Az egyenletes konvergenciából következik a pontonkénti konvergencia. Egyenletesen konvergens függvénysorozatokra érvényesek az alábbi tételek.

22.1. Tétel. *Legyen (f_n) olyan függvénysorozat, amely egyenletesen tart az f függvényhez a C halmazon. Ha f_n folytonos az $x_0 \in C$ pontban $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor f is folytonos x_0-ban.*

Ennek következménye, hogy ha (f_n) egyenletesen tart az f függvényhez a C halmazon, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén f_n folytonos a $D \subset C$ halmazon, akkor f folytonos D-n.

22.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy (f_n) egyenletesen tart f-hez az $[a,b]$ intervallumon. Ha f_n Riemann-integrálható $[a,b]$-n $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor f is, és*

$$\int_a^b f = \lim \int_a^b f_n .$$

22.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f_n : I \to \mathbb{R}$ differenciálható az I nyílt intervallumon $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén, (f_n) pontonként tart f-hez I-n, és a deriváltfüggvények (f_n') sorozata egyenletesen tart egy g függvényhez I-n. Ekkor f differenciálható I-n és $f' = g$, azaz $(\lim f_n)' = \lim(f_n')$.*

22.2. Feladatok

A, *egyenletes konvergencia*

1. Vizsgáljuk meg, hogy egyenletesen konvergensek-e az alábbi függvénysorozatok a megadott intervallumon!

   a, $f_n(x) = x^n$, (a1) a $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ illetve (a2) $[0,1]$ intervallumon;

   b, $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ a $[0,1]$ intervallumon;

   c, $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$ a $(0,\infty)$ intervallumon;

   d, $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ a $(-\infty,\infty)$ intervallumon;

   e, $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$ a $(-\infty,\infty)$ intervallumon;

   f, $f_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n$, (f1) tetszőleges véges intervallumon, illetve (f2) a $(-\infty,\infty)$ intervallumon;

   g,
   $$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \le x \le n\,, \\ 1 & \text{ha } n < x \le n+1\,, \\ 0 & \text{ha } n+1 < x \end{cases}$$
   a $[0,\infty)$ intervallumon;

h,

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{ha } 0 \le x \le \frac{1}{n}\,, \\ n^2(\frac{2}{n} - x) & \text{ha } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}\,, \\ 0 & \text{ha } \frac{2}{n} \le x \end{cases}$$

a $[0,1]$ intervallumon.

2. Lehetséges-e, hogy szakadásos függvények egyenletesen konvergens sorozata folytonos függvényt állítson elő?

B, *műveletek függvénysorozatokkal*

1. Mutassuk meg, hogy az $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $(-\infty, \infty)$ intervallumon, de
$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'(1) \ne \lim_{n\to\infty} f_n'(1)\,.$$
2. Mutassuk meg, hogy az $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \sin n(x + \frac{\pi}{2})$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $(-\infty, \infty)$ intervallumon, de
$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' \ne \lim_{n\to\infty} f_n'(x)\,.$$
3. Mutassuk meg, hogy az $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ függvénysorozat konvergens a $[0,1]$ intervallumon, de
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \ne \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)\,.$$
4. Mutassuk meg, hogy az A/1/g,h példa függvénysorozataira sem cserélhető fel a lim és az $\int$!
5. Mutassuk meg, hogy az $f_n(x) = nx(1-x)^n$ függvénysorozat *nem* egyenletesen konvergens a $[0,1]$ intervallumon, mégis teljesül, hogy
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)\,.$$

22.3. Megoldások–Eredmények–Útmutatások

A/1/a, (a1) A függvénysorozat néhány tagját lásd a 22.1.a ábrán. A $[0, \frac{1}{2}]$ intervallumon a függvénysorozat tetszőleges n indexű elemére $|x^n| \leq (\frac{1}{2})^n \to 0 \Rightarrow$ egyenletesen konvergens.

(a2) Tudjuk, hogy a függvénysorozat a $[0, 1)$ intervallumon az azonosan nulla függvényhez tart pontonként ($x = 1$-ben 1-hez). Ha egyenletesen konvergens lenne, akkor pl. $\varepsilon = \frac{1}{2}$-et választva minden $x \in [0, 1)$ pontban $x^n < \frac{1}{2}$-nek kellene teljesülnie egy küszöbindextől kezdve, de tetszőleges n-t választva az x^n függvény az $x = e^{\frac{\ln \frac{1}{2}}{n}}$-ben éppen $\frac{1}{2}$-et vesz fel. Tehát a $[0, 1)$-en nem egyenletesen konvergens a függvénysorozat (így a $[0, 1]$-en sem).

Másképp: Ha egyenletesen konvergens lenne, akkor abból, hogy a függvénysorozat minden tagja folytonos, következik hogy a határfüggvénye is folytonos $[0, 1]$-en, de ez nem teljesül. Tehát nem egyenletesen konvergens.

A/1/b, A függvénysorozat néhány tagját lásd a 22.1.b ábrán. A függvénysorozat pontonként az azonosan nulla függvényhez tart. Keressük meg az $f_n(x)$ függvény maximumhelyét és értékét! Az $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ függvényt deriválva és a deriváltat nullával egyenlővé téve az $x = \frac{n}{n+1}$ pontot kapjuk. $\Rightarrow$

$$|x^n - x^{n+1}| = |x^n(1 - x)| \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) < \frac{1}{n+1} \to 0\,,$$

azaz a függvénysorozat egyenletesen konvergens.

A/1/c, A függvénysorozat pontonként az azonosan nulla függvényhez tart (lásd 22.1.c ábra). A $(0, \infty)$ intervallumon

$$\left|\frac{1}{x+n}\right| < \frac{1}{n} \to 0\,,$$

így egyenletesen konvergens.

A/1/d, $|\frac{\sin nx}{n}| \leq \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow$ egyenletesen konvergál (az azonosan nulla függvényhez). Lásd 22.1.d ábra.

A/1/e, Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ helyen $\frac{x}{n} \to 0$, és így $\sin \frac{x}{n} \to 0$, azaz f_n pontonként tart az azonosan nulla függvényhez. A konvergencia azonban nem egyenletes, ugyanis pl. a függvénysorozat minden eleme felveszi az 1 értéket, pl. az $x = \frac{\pi}{2} n$ helyen (lásd 22.1.e ábra).

A/1/f, (f1) A függvénysorozat néhány tagját lásd a 22.1.f ábrán. $[a, b]$-n (az $a \geq 0$ esetet tárgyaljuk, de a többi is hasonló) $f_n \to e^x$ pontonként és egyenletesen is:

$$\left|e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right| \leq \left|\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right| = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(\frac{x}{n}\right) \leq \frac{e^b \cdot b}{n} \to 0\,.$$

(f2) a $(-\infty, \infty)$-en nem egyenletesen konvergens: az $x = n$ pontban a függvénysorozat összes tagja 2^n-t vesz fel, míg a határfüggvény $e^n - t$, így ebben a pontban az eltérés nem tehető tetszőlegesen kicsivé.

A/1/g, Pontonként az azonosan nulla függvényhez tart, de nem egyenletesen, mert minden tagja felveszi az 1-et (lásd 22.2.a ábra).

A/1/h, Pontonként az azonosan nulla függvényhez tart, de nem egyenletesen, mert $\max f_n(x) = n$ (lásd 22.2.b ábra).

A/2, Igen, pl. az

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \\ \frac{1}{n} & \text{ha } x = 0\,. \end{cases}$$

függvénysorozat minden eleme szakad, de egyenletesen tart az azonosan nulla függvényhez.

B/1, A függvénysorozat néhány tagját lásd a 22.3.a ábrán. $|f_n(x)| < \frac{1}{n}\frac{\pi}{2} \to 0 \Rightarrow f_n$ egyenletesen tart az azonosan nulla függvényhez, így $(\lim_{n\to\infty} f_n(x))'(1) = 0$. Ugyanakkor

$$f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}} \Rightarrow f_n'(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n'(1) = \frac{1}{2}\,.$$

B/2, A függvénysorozat néhány tagját lásd a 22.3.b ábrán. f_n pontonként az $f(x) = x^2$ függvényhez tart. Ez a konvergencia egyenletes is, hiszen

$$\left| x^2 + \frac{1}{n}\sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - x^2 \right| = \frac{1}{n}\left|\sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| \le \frac{1}{n} \to 0\,.$$

A deriváltak: $(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = 2x$, és $f_n'(x) = 2x + \cos n(x + \frac{\pi}{2})$. Speciálisan, az $x = 0$ pontban $(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = 0$, és $f_n'(0) = \cos n(\frac{\pi}{2})$. Az utóbbi sorozat váltakozva $1, 0, -1, 0, \ldots$ értékeket vesz fel, így nincs határértéke.

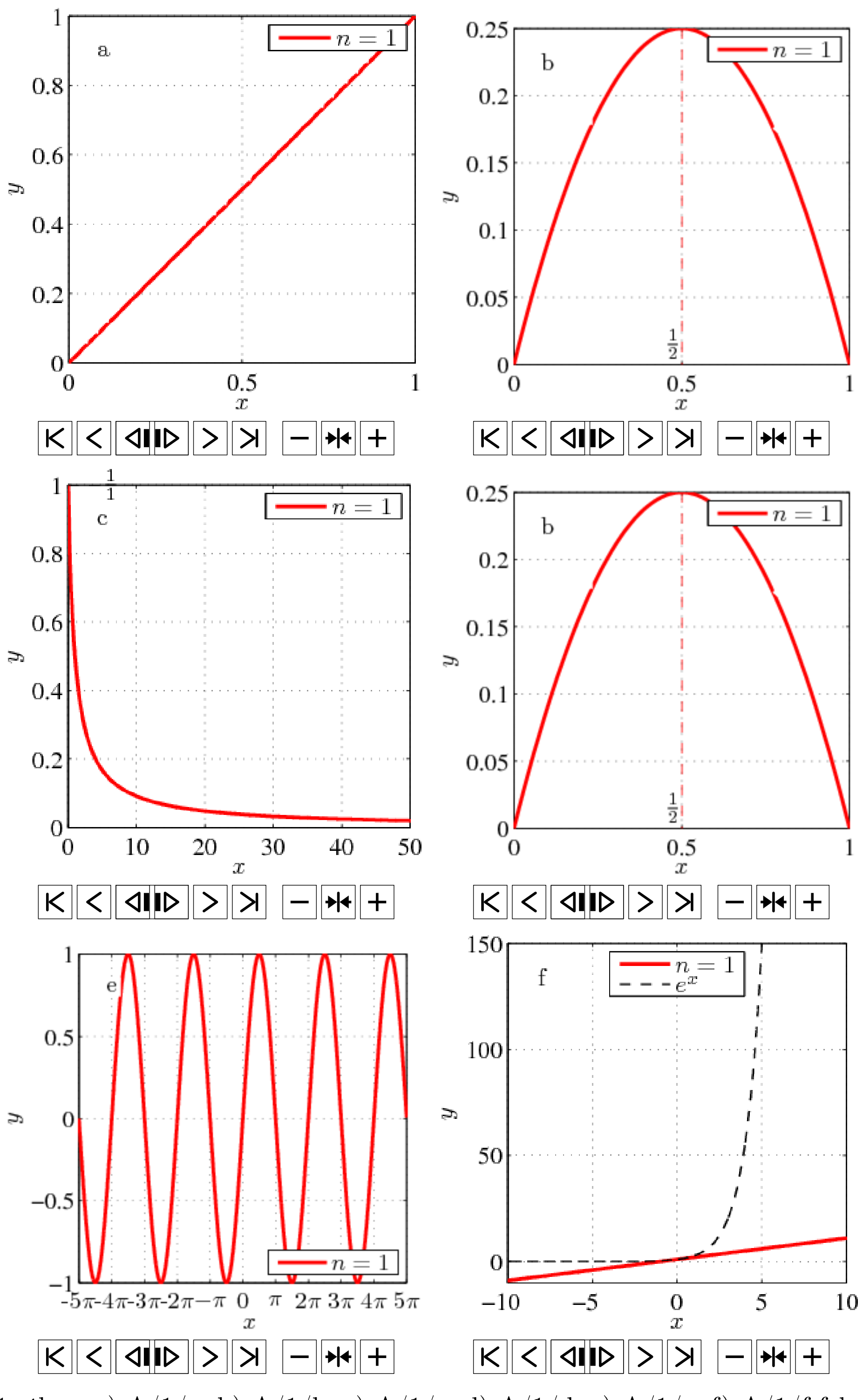
B/3, A függvénysorozat néhány tagját lásd a 22.4.a ábrán. $x = 0$-ra $f_n(x) = 0$ és $x \in (0,1]$-re $|f_n(x)| \le n(\underbrace{e^{-x^2}}_{<1})^n \to 0 \Rightarrow f_n \to 0$ pontonként,

így $\int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = 0$. Ugyanakkor

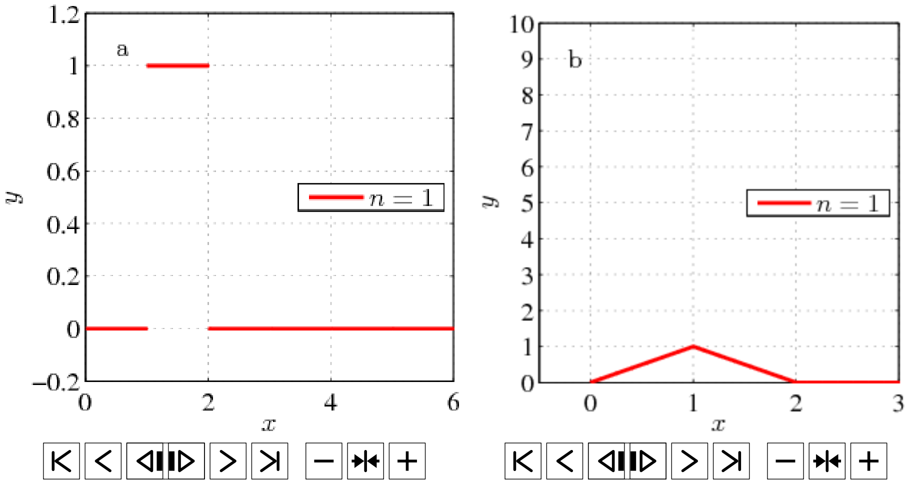
$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 nxe^{-nx^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^1 -2nxe^{-nx^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}[e^{-nx^2}]_0^1 = -\frac{1}{2}(e^{-n}-1) \to \frac{1}{2} \ne 0\,.$$

(Ebből következik az is, hogy a konvergencia nem lehet egyenletes.)

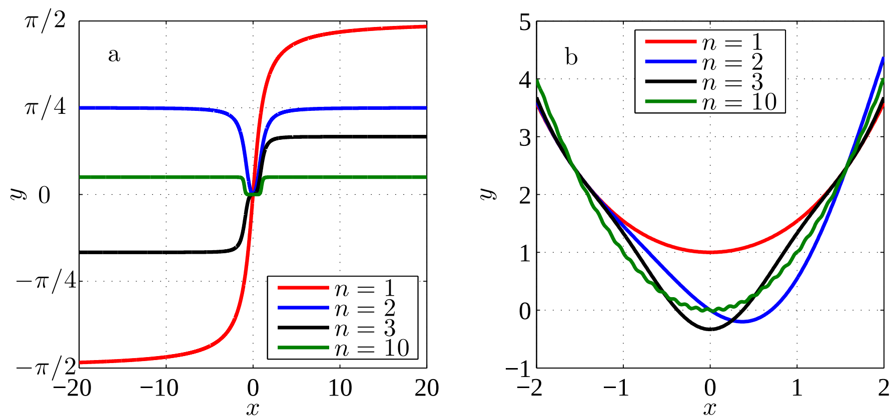
B/4, Mindkét feladatban nulla a határfüggvény integrálja, miközben a függvénysorozat mindegyik elemének 1 az integrálja, így az integrálok sorozata 1-hez tart, nem pedig nullához. (Ebből következik az is, hogy a konvergencia nem lehet egyenletes, amit korábban be is láttunk, lásd A/1/g,h, feladatokat.)



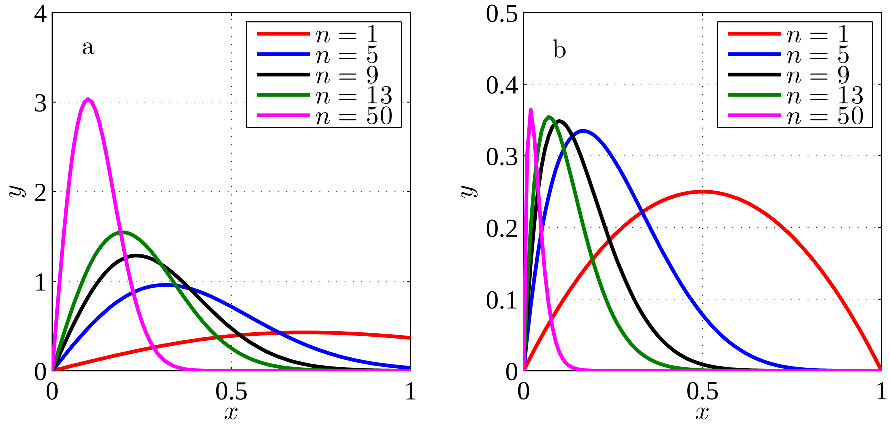
22.1. ábra. a) A/1/a, b) A/1/b, c) A/1/c, d) A/1/d, e) A/1/e, f) A/1/f feladat.



22.2. ábra. a) A/1/g feladat, b) A/1/h feladat.



22.3. ábra. a) B/1 feladat, b) B/2 feladat.



22.4. ábra. a) B/3 feladat, b) B/5 feladat.

Függvénysorok

Kulcsszavak:

függvénysor, (pontonként) konvergens, konvergenciahalmaz, függvénysor összegfüggvénye, egyenletes konvergencia

23.1. Elméleti összefoglaló

Legyenek $f_n : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$) adott függvények, és jelölje s_n az (f_n) függvénysorozat n-edik részletösszegét, azaz

$$s_n := \sum_{i=1}^{n} f_n.$$

Így definiáltunk egy újabb $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénysorozatot. Az $((f_n), (s_n))$ rendezett párt *függvénysor*nak nevezzük, és a $\sum f_n$ szimbólummal jelöljük.

23.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum f_n$ függvénysor *(pontonként) konvergens* az $x \in D$ pontban, ha az (s_n) függvénysorozat konvergens ezen pontban.

23.2. Definíció. Azt a $B \subset \mathbb{R}$ halmazt, amelyen a függvénysor konvergens, a függvénysor *konvergenciahalmaz*ának nevezzük.
Jelölje f azt a függvényt amit úgy kapunk, hogy elkészítjük a $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ határértéket minden $x \in B$-re. Ezt az f-et a függvénysor *összegfüggvény*ének nevezzük.

23.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum f_n$ függvénysor *egyenletesen konvergens* a $H \subset D$ halmazon, ha az (s_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens H-n.

Fontos kérdés a következő: ha az (f_n) függvénysorozat elemei rendelkeznek bizonyos tulajdnságokkal (pl. folytonosak, differenciálhatók, integrálhatók), akkor f is ilyen tulajdonságú-e? Teljesen hasonló tételek következnek, mint a függvénysorozatok esetében.

23.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen tart f-hez H-n, és f_n folytonos az $x_0 \in H$ pontban minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor f is folytonos x_0-ban.*

Következésképpen, ha $\sum f_n$ egyenletesen tart f-hez a H halmazon, és f_n folytonos H-n, akkor f is folytonos H-n.

23.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\sum f_n$ egyenletesen tart f-hez az $[a, b]$ intervallumon, és f_n Riemann-integrálható $[a, b]$-n minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor f is Riemann-integrálható $[a, b]$-n, és*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

23.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\sum f_n$ pontonként tart az f függvényhez az I nyílt intervallumon, f_n differenciálható I-n minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, és $\sum f_n'$ egyenletesen tart egy g függvényhez I-n. Ekkor f differenciálható I-n, és*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = g(x) \quad \forall x \in I.$$

23.2. Feladatok

A, *egyenletes konvergencia*

1. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergensek a megadott intervallumokon!

   a, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ a $(-\infty, \infty)$ intervallumon;

   b, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$ a $(-2, \infty)$ intervallumon;

   c, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ a $[0, \infty)$ intervallumon.

2. Tegyük fel, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor abszolút és egyenletesen konvergens az (a, b) intervallumon. Mutassuk meg, hogy ebből nem következik, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ sor egyenletesen konvergens!
   Használjuk ehhez a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x) x^n$ függvénysort a $[0, 1]$ intervallumon!

3. Tegyük fel, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens. Igazoljuk, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ függvénysor egyenletesen konvergens a

a, $[a, \infty)$ intervallumon, ahol $a > 0$!
b, $[0, \infty)$ intervallumon!

B, *műveletek függvénysorokkal*

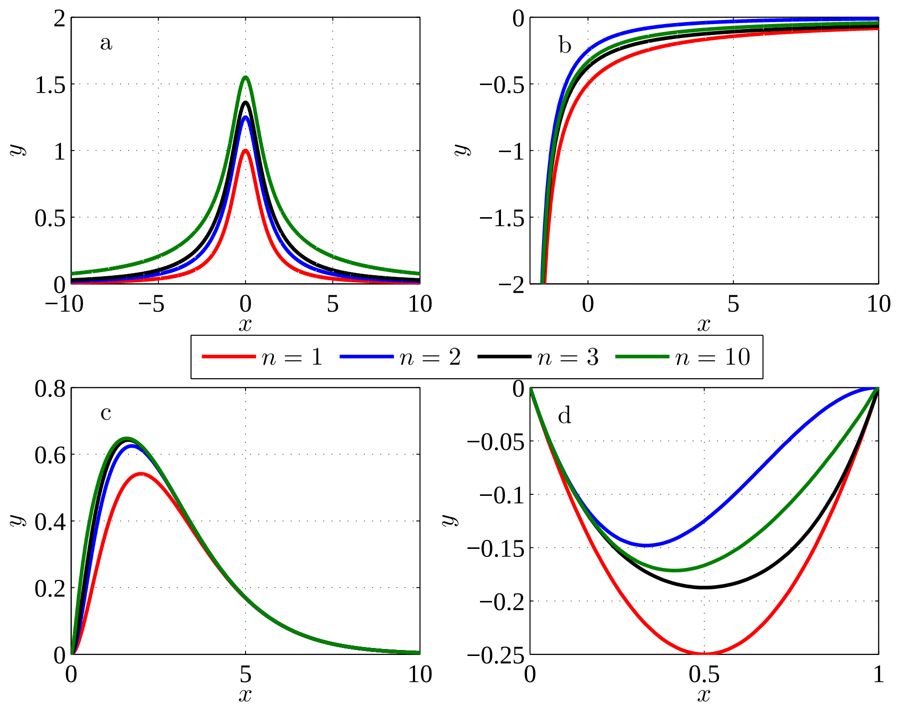
1. Mutassuk meg, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ függvény folytonosan differenciálható az egész számegyenesen!
2. Határozzuk meg az alábbi határértéket! $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x^n - x^{n+1}\right)$.
3. Szabad-e tagonként differenciálni a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$ függvénysort?
4. Szabad-e tagonként integrálni a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$ függvénysort a $[0, 1]$ intervallumon?

23.3. Megoldások–Eredmények–Útmutatások

A/1/a, A függvénysor néhány részletösszegét lásd a 23.1.a ábrán. Tudjuk, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ numerikus sor konvergens, így (Cauchy tétele szerint) bármely $\varepsilon>0$-hoz tudunk $n_0\in\mathbb{N}$ küszöbindexet találni, hogy minden $m\geq n\geq n_0$ esetén $|\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k^2}|<\varepsilon$. Viszont ez a küszöbindex jó lesz a függvénysor esetén is (ugyanahhoz az ε-hoz), hiszen $|\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{x^2+k^2}|\leq|\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k^2}|$. Ekkor pedig a függvénysorokra vonatkozó Cauchy-tétel szerint a függvénysor egyenletesen konvergens.

A/1/b, Egyenletesen konvergens, mert hasonlóan az a, részhez tudjuk becsülni a részletösszegeket egy konvergens numerikus sor részletösszegeivel: $|\sum_{k=n}^{m}\frac{(-1)^k}{x+2^k}|\leq\sum_{k=n}^{m}|\frac{1}{x+2^k}|\leq\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{2^{k-1}}$, az utóbbi sor pedig konvergens. A függvénysor néhány részletösszegét lásd a 23.1.b ábrán.

A/1/c, Felhasználva, hogy a $[0,\infty)$ intervallumon $e^{nx}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\geq\frac{n^2x^2}{2}$, tehát $x^2e^{-nx}=\frac{x^2}{e^{nx}}\leq\frac{x^2}{\frac{n^2x^2}{2}}=\frac{2}{n^2}$. Így $|\sum_{k=n}^{m}x^2e^{-kx}|\leq|\sum_{k=n}^{m}\frac{2}{k^2}|$, az utóbbi sor pedig konvergens, tehát használva Cauchy tételét kapjuk, hogy a függvénysor egyenletesen konvergens. A függvénysor néhány részletösszegét lásd a 23.1.c ábrán.



23.1. ábra. a) A/1/a feladat, b) A/1/b feladat, c) A/1/c feladat, d) A/2 feladat.

A/2, • $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ függvénysor $[0,1]$ intervallumon való abszolút konvergenciája azt jelenti, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^n(1-x)x^n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$ függvénysor (pontonként) konvergens. Ez teljesül, mert $x=1$-re minden tag 0, másrészt $x \in [0,1)$-re ez egy teleszkopikus sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n+1}) = (x-x^2)+(x^2-x^3)+(x^3-x^4)+\ldots = \lim_{n\to\infty} x-x^{n+1} = x\,.$$

Tehát pontonként konvergál az

$$f(x) = \begin{cases} x & ,\text{ha } x \in [0,1)\,, \\ 0 & ,\text{ha } x = 1 \end{cases}$$

függvényhez.

- Ez az f függvény viszont nem folytonos, tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^n(1-x)x^n|$ függvénysor konvergenciája nem egyenletes.
- Ugyanakkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ függvénysor a $[0,1]$ intervallumon egyenletesen konvergens (abszolút érték nélkül):
  Pontonként konvergens, mert Leibniz-típusú minden rögzített x-re, jelöljük az összegfüggvényét $g(x)$-szel. Ekkor
  $$\left|\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k(1-x)x^k - g(x)\right| \le (1-x)x^n \le \frac{1}{n+1}\,,$$
  ahol felhasználtuk, hogy Leibniz-típusú sor esetén az $n-1$-edik részletösszeg hibáját az n-edik tag abszolút értékével lehet felülbecsülni, illetve az el?z? gyakorlat A/1/b feladatát. Ebből pedig következik az egyenletes konvergencia. A függvénysor néhány részletösszegét lásd a 23.1.d ábrán.

B/1, A függvénysor néhány részletösszegét lásd a 23.2.a ábrán.

- A $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ pontonként konvergens, mert minden rögzített x-re $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^3}$ alakú.
- A függvénysor tagonkénti deriválásával kapott sorra alkalmazhatjuk Cauchy tételét, mert
  $(\frac{\sin nx}{n^3})' = \frac{\cos nx}{n^2}$ és $|\frac{\cos nx}{n^2}| \le \frac{1}{n^2}$. Tehát a függvénysor tagonkénti deriválásával kapott sor egyenletesen konvergens.

$\Rightarrow$ A függvénysor differenciálható tagonként, azaz deriváltja a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ függvény. Ennek a függvénysornak minden tagja folytonos, így az összegfüggvény is folytonos. Vagyis a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ függvény folytonosan differenciálható.

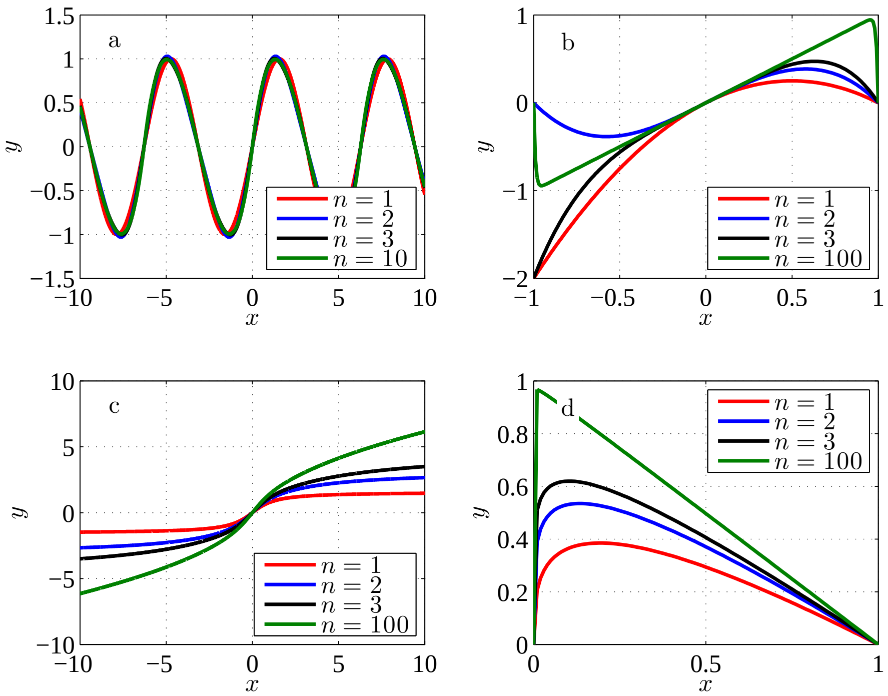
B/2, Felhasználva az A/2, feladatot adódik, hogy a keresett határérték 1. Viszont a lim és a $\sum$ nem felcserélhetőek, hiszen $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to 1-0}\left(x^n-x^{n+1}\right) = 0$. (Ebből szintén következik, hogy a függvénysor nem egyenletesen konvergens.) A függvénysor néhány részletösszegét lásd a 23.2.b ábrán.

B/3, A függvénysor néhány részletösszegét lásd a 23.2.c ábrán.

- Pontonként konvergens a függvénysor, mivel $|\operatorname{arctg} x| \le |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (mert $|\operatorname{tg} x| \ge |x|$), és így $|\operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}| \le \frac{|x|}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2}$ sor pedig minden rögzített x-re konvergens.
- A tagonkénti deriválásával kapott függvénysor egyenletesen konvergens, mert

$$\left|\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}\right)'\right| = \left|\frac{1}{1+\left(\frac{x}{n^2}\right)^2}\frac{1}{n^2}\right| = \left|\frac{1}{n^2+\frac{x^2}{n^4}}\right| \le \frac{1}{n^2}\,.$$

Ezekből pedig következik, hogy a $\sum$ és a $(\,)'$ felcserélhetőek, vagyis szabad tagonként deriválni.



23.2. ábra. a) B/1 feladat, b) B/2 feladat, c) B/3 feladat, d) B/4 feladat.

Fourier-sorok

Kulcsszavak:
Fourier-sor

24.1. Elméleti összefoglaló

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. Ekkor f *Fourier-sor*án az

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

függvénysort értjük, ahol

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x, \;\; n = 0, 1, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x, \;\; n = 1, \ldots$$

Kérdés, mikor és milyen x pontokban teljesül, hogy a fenti függvénysor előállítja f-et, azaz

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)?$$

24.1. Tétel. *Legyen f 2π szerint periodikus, Riemann-integrálható a $[-\pi, \pi]$ intervallumon, és tegyük fel, hogy x_0-ban létezik a bal és jobb oldali deriváltja. Ekkor a Fourier-sor x_0-ban tart az*

$$\frac{f_+(x_0) + f_-(x_0)}{2}$$

értékhez, ahol $f_+(x_0)$ és $f_-(x_0)$ a függvény x_0 pontbeli jobb ill. bal oldali határértékét jelöli.

A tétel következménye, hogy ha f differenciálható x_0-ban, akkor a Fourier-sor x_0-ban előállítja f-et.

24.2. Feladatok

A, *Fourier-sorok*

1. Fejtsük Fourier-sorba a következő függvényeket a megadott intervallumokon!

a1,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2} & , \text{ha } x \in (0, 2\pi)\,, \\ 0 & , \text{ha } x = 0 \text{ vagy } x = 2\pi\,. \end{cases}$$

a2, Majd helyettesítsünk $x = \frac{\pi}{2}$-t. Milyen összefüggést kapunk?

b1,

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \text{ha } x \in (-\pi, 0)\,, \\ 0 & , \text{ha } x = 0 \text{ vagy } x = \pm\pi\,, \\ 1 & , \text{ha } x \in (0, \pi)\,. \end{cases}$$

b2, Majd helyettesítsünk $x = \frac{\pi}{2}$-t. Milyen összefüggést kapunk?

c1, $f(x) = x^2\,;\ x \in [-\pi, \pi]\,.$

c2, Majd helyettesítsünk $x = \pi$-t. Milyen összefüggést kapunk?

B, *alkalmazások*

1. Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket hatványsoros módszerrel!

a, $\begin{cases} y'(t) = y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ b, $\begin{cases} y'(t) = k\,y(t) \\ y(0) = a \end{cases}$ c, $\begin{cases} y''(x) + x\,y(x) = 0 \\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1 \end{cases}$

2. Oldjuk meg a következő (hővezetési) egyenletet Fourier-soros módszerrel!

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,\ x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \end{cases}$$

24.3. Megoldások–Eredmények–Útmutatások

A/1/a1,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx \, \mathrm{d}x = 0\,,$$

mivel $f(x)$ páratlan függvény.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin kx \, \mathrm{d}x\,,$$

amit integráljunk parciálisan ($u = \frac{\pi-x}{2}$, $v' = \sin kx$):

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{\pi-x}{2}\left(\frac{-\cos kx}{k}\right)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-\cos kx}{k}\right)\mathrm{d}x\right\} = \frac{1}{k}\,.$$

Vagyis

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}\,.$$

Az $f(x)$ függvényt és a Fourier-sorának néhány részletösszegét lásd a 24.1. ábrán.

A/1/a2, $x := \frac{\pi}{2}$ behelyettesítésével a $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ numerikus sorösszeghez jutunk.

A/1/b1, $a_k = 0$, mert $f(x)$ páratlan.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi}\sin kx \, \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{0} -\sin kx \, \mathrm{d}x\right\} =$$

$$\frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{-\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{0}\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{(-1)^{k+1}+1}{k} + \frac{1+(-1)^{k+1}}{k}\right\} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{k+1}+1}{k}\,.$$

Tehát

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2l-1)x\right)}{2l-1}\,.$$

Az $f(x)$ függvényt és a Fourier-sorának néhány részletösszegét lásd a 24.2 ábrán.

A/1/b2, $1 = \frac{4}{\pi}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots) \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\,.$

A/1/c1, $b_k = 0$, mert $f(x)$ páros.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_0}{2} = \frac{\pi^2}{3}\,.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx \; \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left\{ \underbrace{\left[x^2 \frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{0} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \frac{\sin kx}{k} \; \mathrm{d}x \right\} =$$

$$-\frac{1}{\pi}\left\{ \left[2x\frac{-\cos kx}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2\frac{-\cos kx}{k} \; \mathrm{d}x \right\} = \frac{2}{\pi k}\left\{ \left[x\frac{\cos kx}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \; \mathrm{d}x \right\} =$$

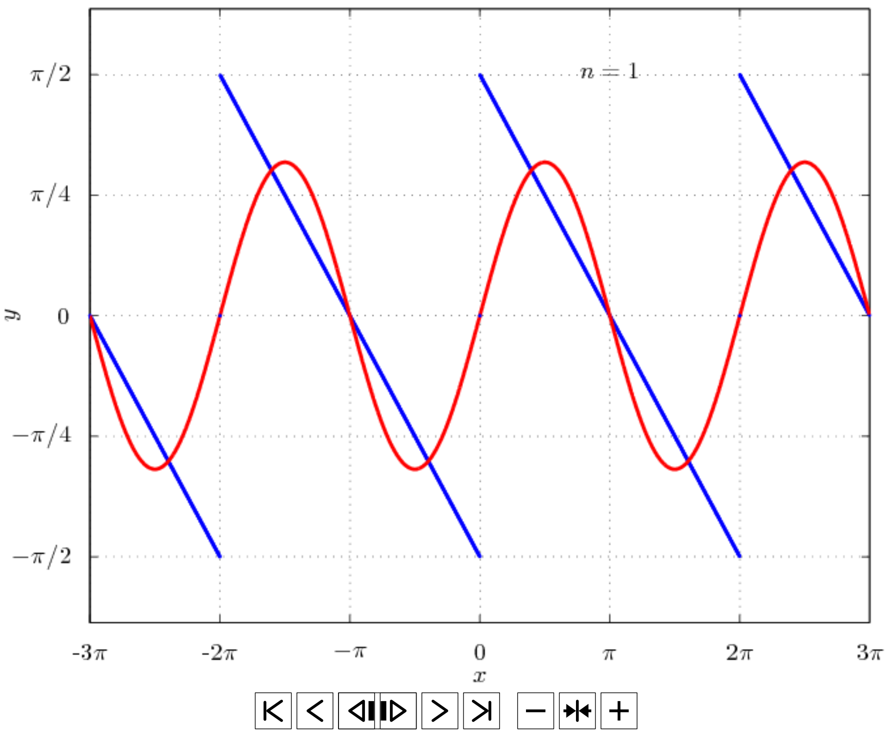
$$\frac{2}{\pi k^2}\left([x\cos kx]_{-\pi}^{\pi} - \underbrace{[\sin kx]_{-\pi}^{\pi}}_{0} \right) = \frac{2}{\pi k^2}(\pi(-1)^k + \pi(-1)^k) = \frac{4}{k^2}(-1)^k .$$

Tehát

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos kx .$$

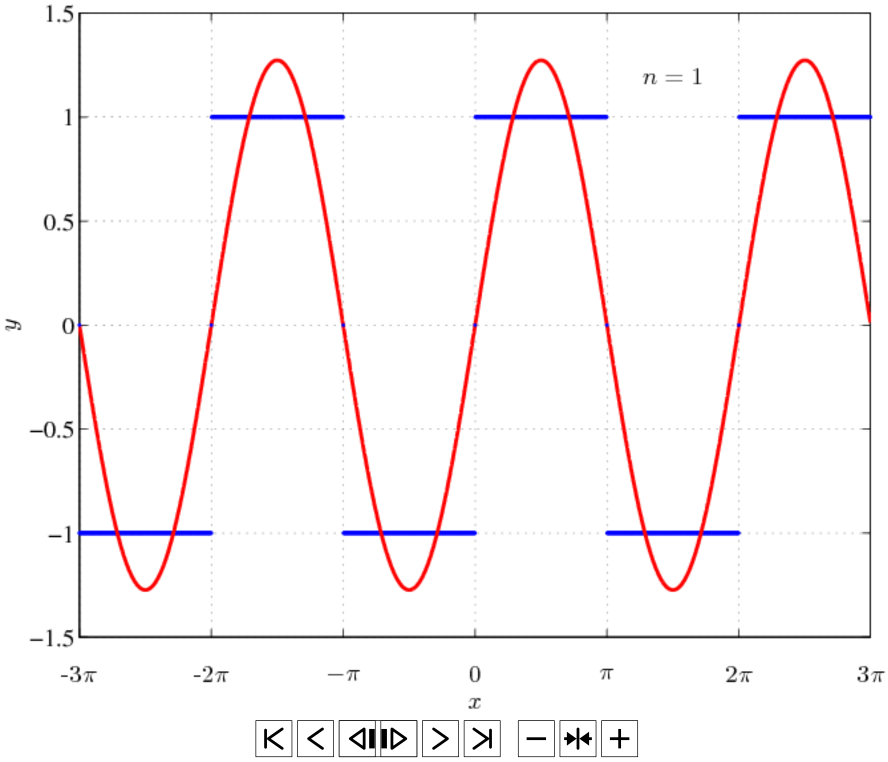
Az $f(x)$ függvényt és a Fourier-sorának néhány részletösszegét lásd a 24.3 ábrán.

A/1/c2, $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} (-1)^k \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.



24.1. ábra. A/1/a feladat.

B/1/a, Keressük a megoldást $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ alakban. Az $y(0) = 1$ kezdeti feltételből



24.2. ábra. A/1/b feladat.

adódik, hogy $a_0 = 1$.

$$y'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(k+1)t^k,$$

amit az egyenletbe visszaírva és összevetve az együtthatókat:

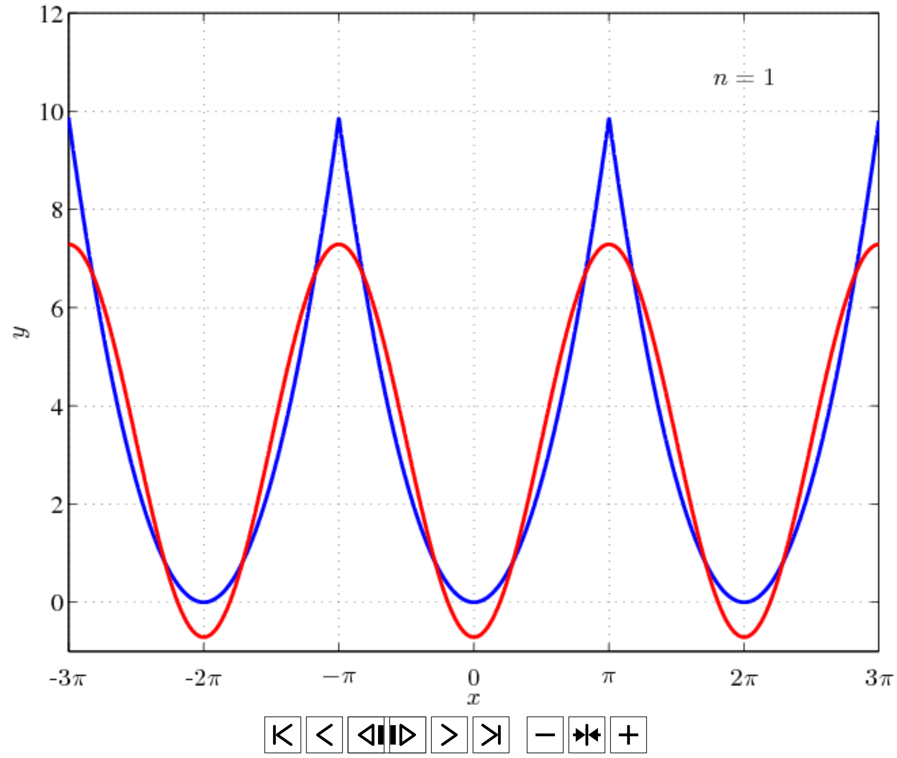
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(k+1)t^k \Rightarrow a_k = a_{k+1}(k+1) \Rightarrow a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}.$$

Tehát

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t.$$

B/1/b, Hasonlóan, mint az a, részben: $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, $\quad y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^{n-1} n$.
$c_0 = a$, $kc_n = c_{n+1}(n+1) \quad \Rightarrow \quad c_{n+1} = \frac{c_n k}{n+1}$.
Így $c_n = \frac{ak^n}{n!}$, és $y(t) = a\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kt)^n}{n!} = ae^{kt}$.

B/2, Keressük a megoldást $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin nx$ alakban!



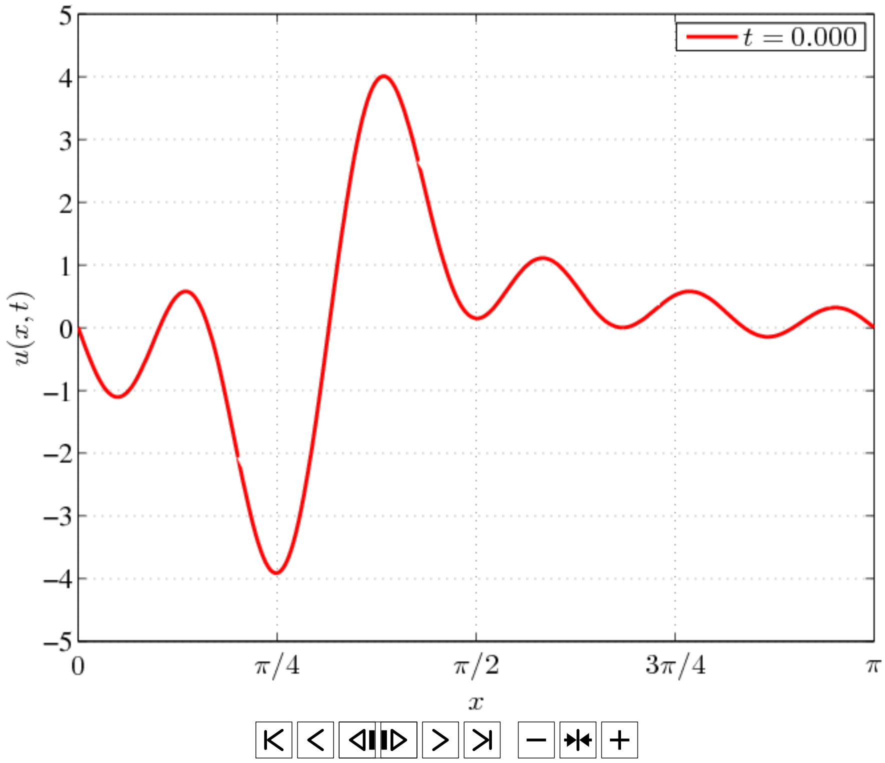
24.3. ábra. A/1/c feladat.

A kezdeti feltételből $b_n(0) = a_n$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t) \sin nx\,, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)(-n^2 \sin nx)$$

$$\Rightarrow \quad b_n'(t) = (-n^2) b_n(t)\,.$$

Lásd 1/b $\Rightarrow$ $b_n(t) = a_n e^{-n^2 t}$. Tehát $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \sin nx$. (Lásd 24.4. ábra.)



24.4. ábra. B/2. feladat: $u(x,t)$ a $t = 0$ időpillanatban ($a_n = \cos n$, $n_{max} = 10$). (A t idő nem telik egyenletesen, $t = 0.01$, $t = 0.1$ és $t = 1$ időegységnél a tízszeresére gyorsul.)

2. minta zárthelyi

1. Legyen a γ út a $-i$ kezdőpontot az 1 végponttal összekötő egyenes szakasz. Számítsuk ki a következő komplex vonalintegrál értékét! (3 p)

$$\int_\gamma \overline{z} \, \mathrm{d}z \, .$$

2. Legyen a γ a $(0,1)$ pontból az $y = 2^x$ görbén az $(1,2)$ pontba érkező út. Számítsuk ki a következő komplex vonalintegrál értékét! (3 p)

$$\int_\gamma - \cos z \, \mathrm{d}z \, .$$

3. Számítsuk ki a következő komplex vonalintegrál értékét! (2+2+2+2 p)

$$\oint_\gamma \frac{\sin z}{z^2+1} \, \mathrm{d}z \, ,$$

   ha a γ út a következő pozitív körbejárású zárt görbe:

   a, $|z+i| = 1$;   b, $|z-i| = 1$;   c, $|z| = 5$;   d, $|z+10| = 2$.

4. Egyenletesen konvergens-e a $(-\infty, \infty)$ intervallumon a következő függvénysorozat? (3 p)

$$f_n(x) = \operatorname{arc\,tg} nx \, .$$

5. A $[0, 0.9]$ intervallumon értelmezett $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ függvénysor segítségével határozzuk meg a következő numerikus sor összegét. (5 p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \, .$$

6. Fejtsük Fourier-sorba a következő függvényt! (4 p)

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \text{ ha } x \in (-\pi, \pi) \, , \\ 0 & , \text{ ha } x = -\pi \text{ vagy } x = \pi \, . \end{cases}$$

Irodalomjegyzék

[1] Császár Á.: Valós analízis I.–II. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

[2] Fekete Z.–Hanka L.: Többváltozós függvények analízise. Műszaki Könyvkiadó, Budapest (Bolyai könyvek), 2006.

[3] Freud R.: Lineáris algebra. ELTE Eötvös Kiadó, 1996.

[4] Gyemidovics B. P.: Matematikai analízis. (példatár) Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.

[5] Hanka L.–Zalay M.: Komplex függvénytan. Műszaki Könyvkiadó, Budapest (Bolyai könyvek), 2003.

[6] Havasi Á.: Vektorszámítás földtudományi szakosoknak (jegyzet) http://nimbus.elte.hu/~hagi/segedanyag/vektorszamitas_felev1/vektor_felev1_jegyzet.pdf

[7] Komornik V.: Valós analízis előadások I–II. Typotex, Budapest, 2003.

[8] Németh J.: Előadások a végtelen sorokról. SZTE Bolyai Intézet (Polygon könyvsorozat), Szeged, 2002.

[9] Szőkefalvi-Nagy B.: Komplex függvénytan. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.