

Térképi vetületek és alapfelületek

Dr. Timár Gábor
Dr. Molnár Gábor

Térképi vetületek és alapfelületek

írta Dr. Timár Gábor és Dr. Molnár Gábor

Szerkesztette és közreműködött:

Dr. Timár Gábor és Dr. Molnár Gábor

Szerzői jog © 2013 Eötvös Loránd Tudományegyetem

ISBN 978-963-284-387-2 (PDF)

ISBN 978-963-284-388-9 (HTML)

E könyv kutatási és oktatási célokra szabadon használható. Bármilyen formában való sokszorosítása a jogtulajdonos írásos engedélyéhez kötött.

Készült a TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0073 számú, „E-learning természettudományos tartalomfejlesztés az ELTE TTK-n” című projekt keretében. Konzorciumvezető: Eötvös Loránd Tudományegyetem, konzorciumi tagok: ELTE TTK Hallgatói Alapítvány, ITStudy Hungary Számítástechnikai Oktató- és Kutatóközpont Kft.

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638



A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.



Tartalom

1. Bevezetés	1
2. A pontok síkbeli és térbeli meghatározásakor alkalmazott koordináta-rendszerek	3
2.1 Földrajzi, ellipszoidi és síkkoodinátáknál alkalmazott mértékegységek	3
2.2 Kezdőmeridiánok	5
2.3 Koordináta-rendszerek és kerethálózatok	12
3. A Föld alakja és annak közelítései	14
3.1 A Föld feltételezett alakjának változása a tudományban	14
3.2 A geoid és a forgási ellipszoid	17
3.3 Háromszögelési hálózatok típusai, kialakításuk és a geodéziai kiegyenlítés	18
4. Geodéziai dátumok	23
4.1 A háromszögelési hálózatok paraméterezése	23
4.2 A Mologyenszkij-féle áthidaló dátumparaméterezés	24
4.3 A Burša-Wolf-féle dátumparaméterezés	26
4.4 Az áthidaló Mologyenszkij- és a Burša-Wolf-féle paraméterezés összehasonlítása	28
4.5 A transzformációs paraméterek becslése	29
4.6 A korrekciós rács és alkalmazása	31
5. Térképek és vetületek	34
5.1 Vetületek és paraméterezésük	34
5.2 Átszámítások különböző vetületi koordináták között	37
5.3 Helyettesítő vetületek	39
5.4 A térképek szelvényezése és a szelvényezés által hordozott georeferencia	41
6. Térképek georeferálása	44
6.1 A geokódolás és a rektifikáció	44
6.2 A vetületi analízis és az önkényes vetületválasztás	49
7. Vertikális georeferencia	52
7.1 A magasságfogalom bizonytalanságai	52
7.2 Magasságfogalmak, magasságmeghatározás	53
7.3 A tengerszint fogalmának bizonytalansága: magassági dátumok	54
8. Felszínmodellek és domborzatmodellek	59
8.1 A domborzatmodell definíciója és típusai	59
8.2 A domborzatmodell előállítás és jellemzői	60
8.3 A domborzatmodellek elérhetősége	63
8.4 Az épített környezet és a növényzet hatása: a felszínmodellek	66
9. Légifelvétel ortorektifikációja	67
9.1 Az ortorektifikáció (ortofotó előállítás)	67
9.2 A belső adatok	68
9.3 A külső tájékozás	69
9.4 A kamera-adatok megadása kompaktgépek esetén	71
9.5 Az ortorektifikáció végrehajtása	74
9.6 Az alkalmazott felszínmodell hatása	75
9.7 Digitális anaglif kép készítése	76
9.8 Fényképezett térképek és dokumentumok ortorektifikálása	76
10. Felhasznált és ajánlott irodalom	78
A. Függelék: a dátumparaméterek becslésének eljárásai	80
A legjobb vízszintes illesztést biztosító áthidaló Mologyenszkij-paraméterek becslése	80
A Burša-Wolf paraméterek becslése	82

1. fejezet - Bevezetés

Jegyzetünk témája a térképek, térképi állományok és adatbázisok georeferálása. Térinformatikai alkalmazásainkban a georeferencia olyan módszer, amellyel

- koordinátákat rendelünk az adatbázis minden eleméhez, és
- definiáljuk a felhasznált koordináta-rendszereket.

E koordináta-rendszerek természetesen nagyon sokfélék lehetnek, és a tárgyalt témakör felöleli a köztük végrehajtandó transzformációkat is. Objektumainkat vektoros és raszteres adatmodellben ábrázolhatjuk. Az első esetben a vektorelemek koordinátáit, a másodikban pedig minden egyes pixel koordinátáit kell megadnunk.

Az előző bekezdésben említett két pont nagyon hasonló a felmérési geodézia két alapfeladatához. A térinformatikai alkalmazásunk viszont azt feltételezi, hogy a felmérési munkák befejeződtek, annak eredményein dolgozunk, munkánk pedig alapvetően irodai, számítógéppel segített művelet. Emellett, amint azt majd a későbbiekben láthatjuk, a georeferálás pontosság-igénye általában különbözik a klasszikus geodéziától – jellemzően elmarad attól. Leginkább talán ezzel magyarázható, hogy a tárgyalt módszerek többségét a geodézia annak ellenére kevésbé alkalmazza, hogy a szakterület számára ezek jól ismertek. A térinformatikában mindazonáltal a tárgyalt átszámítási módszerek és alkalmazások igen fontosak, még ha az elérhető pontosság ritkán jobb a méteresnél.

A georeferencia kulcsfontosságú a térinformatikában: ez teszi lehetővé a sokszor igen különböző adatrendszerek együttes használatát, közös adatbázisba integrálásukat (1. ábra). A problémával minden térinformatikai felhasználó szembesül, akinek az adatai nem ugyanazon koordináta-rendszerben vannak megadva. Reméljük, hogy könyvünk nekik is segítséget nyújt a probléma helyes és kívánt pontosságú megoldásához.



1. ábra. Goetz és Probst 1804-es Magyarország-térképe a Google Earth felületén: teljesen különböző technológiákkal készült adatok egységesítése a georeferencia által.

Itt, a bevezető részben kell definiálnunk a térinformatikai pontosság fogalmát. Ez egy relatív fogalom: a mindennapi alkalmazásokban ez általában méter körüli vagy néhány méteres pontosságot jelent. Amikor szkennelt térképekkel dolgozunk, tudnunk kell, hogy azok nyomtatása, maga a nyomdatechnika, a papír nyomtatás utáni száradása és öregedése valamint maga a szkennelés összesen mintegy fél térképi milliméter nagyságú rekonstrukciót enged meg. Emiatt az elérhető terepi pontosság a térkép méretarányának függvénye: 1:10000 méretarány esetén pl. 5

méter, míg 1:50000-es skála mellett már 25 méter. A legtöbb esetben nem is érdemes olyan módszereket használni, amelyek az így elérhető maximális pontosságnál jobb transzformációs eredményeket szolgáltatnak: nem költséghatékony az olyan nagy pontosságú eljárások alkalmazása, amelyek eredményét a bemenő adatok pontossága amúgy is lerontja.

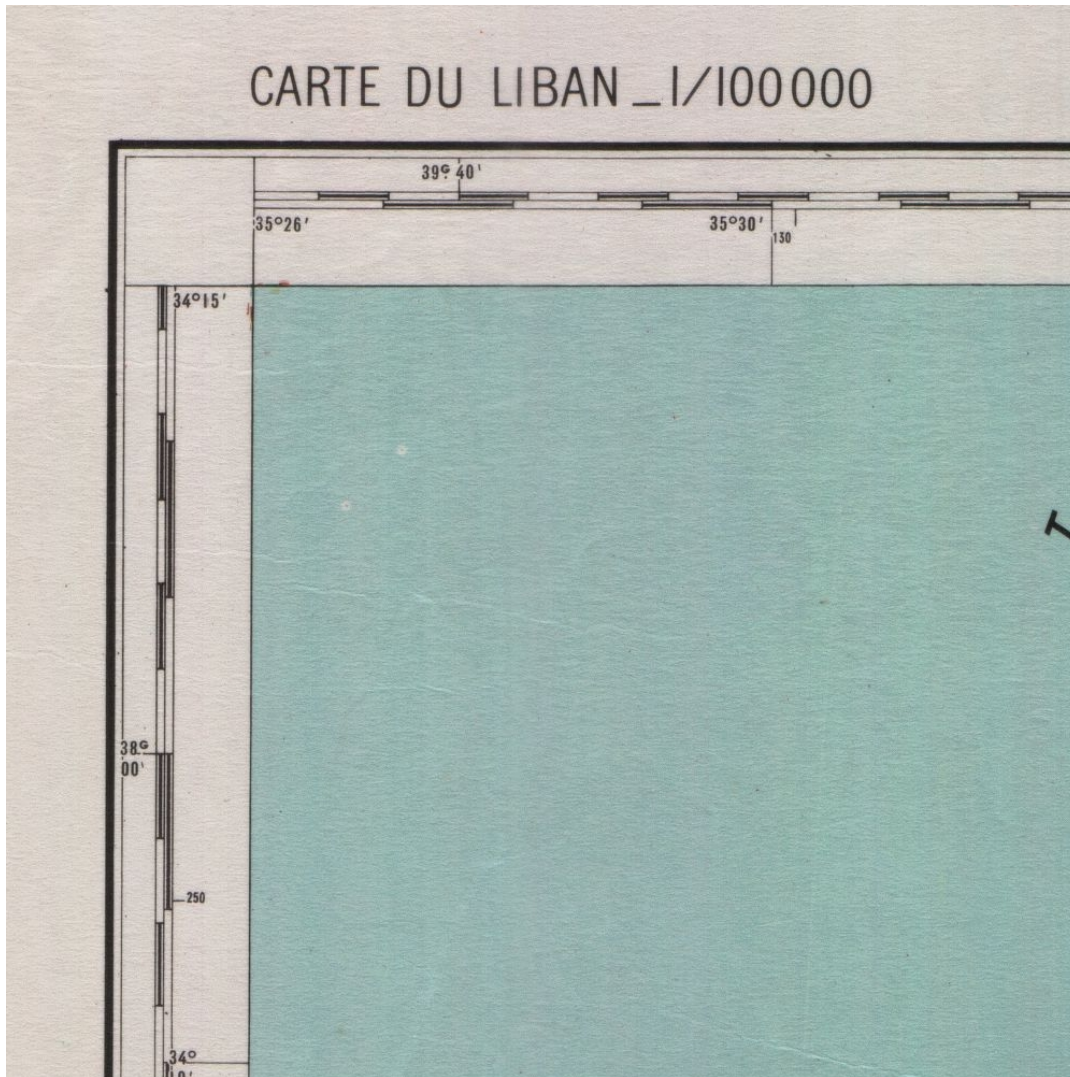
2. fejezet - A pontok síkbeli és térbeli meghatározásakor alkalmazott koordináta-rendszerek

2.1 Földrajzi, ellipszoidi és síkkoodinátáknál alkalmazott mértékegységek

Térképeinken megszokhattuk, hogy a szögeket fok-perc-másodperc rendszerben olvashatjuk le. A teljes kör 360 fok, egy fok 60 percre, egy perc pedig 60 másodpercre osztható, így tehát egy fok 3600 másodpercből áll.

A hosszúsági körök mentén az egységnyi szöghöz tartozó fizikai távolságok – a Földet gömb alakkal közelítve – gyakorlatilag azonosak. 1 fok különbség a meridián mentén kb. 40.000.000 m/360 fok \approx 111111 méternek felel meg. 1 másodperc ennek 3600-ad része, vagyis kb. 30,9 méter, ennyi a távolság két, egymástól 1 másodperc szögtávolságra levő paralelkör között. A szélességi körök mentén az egységnyi szöghöz tartozó távolság az adott hely szélességétől is függ, az előbbi számértékeket a szélesség koszinuszával kell normálni. Budapest 47,5 fokos földrajzi szélességén az egy hosszúsági fok szöghöz tartozó távolság 75208 méter, egy másodperc szöghöz tartozó távolság 20,9 méter felel meg.

A fok-perc-másodperc rendszer azonban nem kizárólagos. Franciaországban, illetve volt francia gyarmatok (pl. Libanon) térképein (2. ábra) újfok (gon, ill. grad) beosztással is találkozhatunk. Itt a teljes kör 400 újfokból (*gon*-ból) áll. 1 újfok 100 újpercet, illetve 10000 újmásodpercet tartalmaz.



2. ábra. A volt francia gyarmat, Libanon térképén a fokhálózat fokban (belső keret) és újfokban (G-vel jelölve a külső kereten) is adott.

A térinformatikai szoftverek sok esetben radiánban kérik különböző, ellipszoidi koordinátákhoz kötött állandók megadását. Itt hívjuk fel a figyelmet, hogy pl. a MS Excel táblázatkezelő program is radiánban értelmezi a szögfüggvények bemenő változóját. A teljes kör 2π radián, így 1 radián kb. 57,3 foknak felel meg. Az 1 radián nagyságú szög hatvanas szögmásodpercben kifejezett értékét (206264,806) σ'' -nek is szokták jelölni.

A szabvány nemzetközi hossz mérték a méter. A történelem során ennek három definíciója is volt, az elsőt követően az újabbak úgy jelentettek pontosítást, hogy a gyakorlati hossz nem változott. Elsőként a métert az Egyenlítő és a sark meridiánív menti távolsága tízmilliomod részéként definiálták. Ez a meghatározás gyakorlati alkalmazásokra nem felelt meg, így később Franciaországban elkészítettek egy méter-etalont, amely a méter fizikai reprezentációját (hossz-etalonját) jelentette. Az egyes országok másolatokat kaptak, és saját mérésügyi minősítő rendszert működtettek – és működtetnek ma is – a további, belső másolatok, pl. a piacokon használt rudak kalibrálására. Legújában a métert egy kvantumfizikai állandóhoz és a fénysebességhez kötik, amely hasonlóan túl elméleti a mindennapi használatra mint a legelső definíció. Mindazonáltal ez a definíció egzakt módon megjelenik a GPS-rendszerben, így mégis mindennapjaink részévé válik.

A nemzeti méter-replikák, másolatok rendszere érdekes következménnyel járt Németországban. Az 1870-es években az átmenetileg Németországhoz került Elzász-Lotharingiában elvégezték a francia és a német hálózat összeillesztését azonos alappontok alapján. Az illeszkedésnek 10 métert meghaladó hibája volt. Később kiderült, hogy a francia és a német hálózat alapvonalait (lásd a következő pontban) más-más méter-mérték (platinaötvözetű méterrúd) felhasználásával kalibrálták. A német (de eredetileg szintén Párizsból vásárolt) rúd hossza 13,597 mikrométerrel

hosszabb volt. Ennek csak nagy távolságok esetén van jelentősége, de akkor annál nagyobb: több száz kilométeres távolságon „összejön” a több méteres hiba. A német méterrúd hossza lett később az ún. legálméter, amely tehát 1,00001355 nemzetközi méternek felel meg. A Németország által használt Bessel-1841 ellipszoid nagytengelyét méterben definiálták, a fentiek miatt mégis több változata van. A Bessel-1841-Namíbia ellipszoid (Namíbia német gyarmat volt) nagytengelye legálméterben annyi, mint a „hagyományos” nemzetközi méterben, így a namíbiai változat nagyobb. A hazai és nemzetközi gyakorlatban előforduló érdekesebb hosszértékeket az 1. táblázat mutatja be.

hosszmérték	Nemzetközi méterben
legálméter	1,0000135965
Bécsi öl	1,89648384
Bécsi mérföld	7585,93536
Toise	1,94906
Angol láb	0,3047972619
Amerikai láb (US survey foot)	0,30480060966
Szazseny (orosz öl)	2,1336
Verszt	1066,78

1. táblázat. Történeti és angolszász hosszértékek méterben.

2.2 Kezdőmeridiánok

Ha egy alapfelület pontjait ellipszoidi koordinátákkal akarjuk leírni, akkor a szélesség irányában létezik a koordináta-rendszernek kitüntetett iránya, mert a forgástengely helyzete egyértelműen meghatározza a pólusok és az egyenlítő helyét, és a felület minden pontjának ellipszoidi szélességét. A hosszúság tekintetében nincs ilyen kitüntetett irány, ezért azt önkényesen kell megválasztanunk.

A háromszögelési hálózat (háromszögelési pontokból álló ponthalmaz, amelyek között ismertek a tájékozás irányszögei) kezdőpontját általában kezdő- vagy nullmeridiánnak választják. A hálózat pontjainak ellipszoidi hosszúságát e délkörhöz képest adják meg. A térinformatikában azonban a dátumokat (részletesen lásd a 4. fejezetben) nemcsak az elhelyezésük és tájékozásuk alapján kell leírjuk, hanem nullmeridiánjaikat is le kell tudnunk írni. A kezdőmeridiánok közül is kiválasztunk egyet – legyen ez a greenwich-i délkör – és valamennyi nullmeridiánnak ehhez képest adjuk meg a hosszúságkülönbségét.

INTERNATIONAL CONFERENCE

HELD AT WASHINGTON

FOR THE PURPOSE OF FIXING

A PRIME MERIDIAN

AND

A UNIVERSAL DAY.

OCTOBER, 1884.

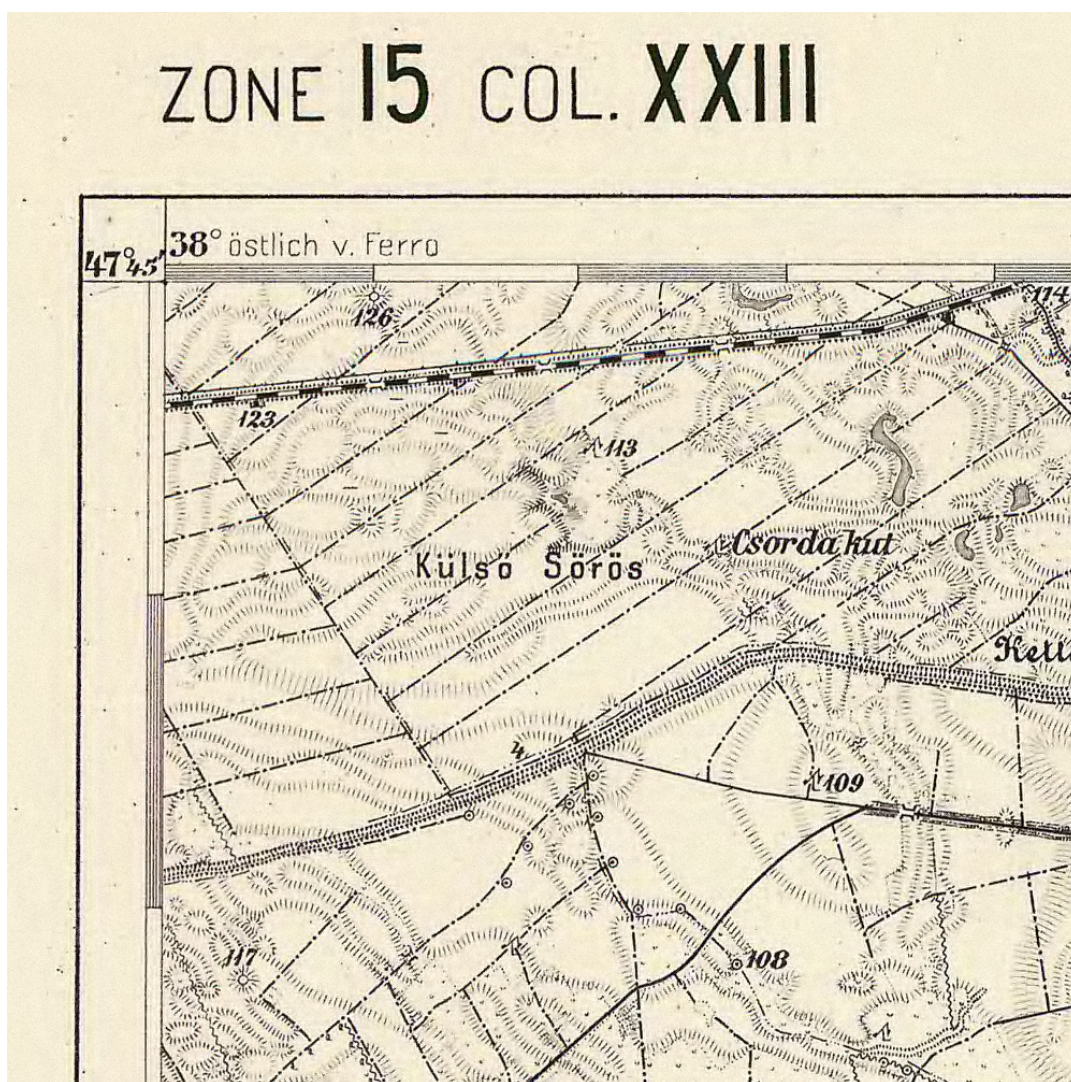
PROTOCOLS OF THE PROCEEDINGS.

WASHINGTON, D. C.
GIBSON BROS., PRINTERS AND BOOKBINDERS.
1884.

3. ábra. Az 1884-es washingtoni konferencia jegyzőkönyvének borítója: itt döntötték el, hogy Greenwich legyen a nemzetközi kezdőmeridián.

A greenwich-i délkör világszabvány voltát az 1884-ben Washingtonban megtartott Nemzetközi Meridián Konferencia (International Meridian Conference, 3. ábra) által elfogadott 2. alapelv „javasolta a világ kormányai számára”, 22-1-es szavazati aránnyal (Haiti, akkori nevén San Domingo szavazott ellene, Franciaország és Brazília tartózkodott). Franciaország csak 1911-ben vezette be a greenwich-i meridián használatát, és számos francia térkép mind a mai napig párizsi kezdőmeridiánnal és újfokban is feltünteti a hosszúságokat.

Nem véletlen, hogy ebben az időpontban vetődött fel komolyan az egységes kezdőmeridián kérdése. A szikratávíró feltalálása és elterjedése tette ugyanis lehetővé az egyes kezdőmeridiánok közötti hosszúságkülönbség meghatározását. A szikratávíron továbbított időjel alkalmazásával lehet az ehhez szükséges egyidejű csillagászati helymeghatározást végrehajtani. Néhány nullmeridián és a greenwich-i délkör hosszúságkülönbségét a 2. táblázatban találjuk meg.



4. ábra. „Östlich von Ferro” = Ferrótól keletre: utalás a régi ferrói kezdőmeridiánra egy osztrák-magyar katonai felmérési térképen.



5. ábra. Ferro, a mai El Hierro szigete a Kanári-szigeteken. Minthogy a ferrói kezdőmeridián $17^{\circ}40'$ -kal nyugatra van Greenwich-től, láthatjuk, hogy a sziget valójában „Ferrótól nyugatra” terül el. A kezdőmeridián földrajzilag egyáltalán nem kötődik a szigethez.

Amint azt a táblázatból is láthatjuk, az egyes kezdőmeridiánok többféle értékkel is jellemezhetők. Ez a helyzet az 1930-as éveket megelőzően Magyarországon is szinte kizárólagosan használt ferrói délkörrel kapcsolatban is. Ferro (4. ábra; mai nevén: El Hierro) a Kanári-szigetek legnyugatibb tagja, a ferrói délkör maga pedig „az Óvilág legnyugatibb pontjához” simul (5. ábra). A ferrói délkör a valóságban a párizsi nullmeridiánt jelenti (6. ábra), Ferro és Párizs szögkülönbsége hajszálpontosan 20 fok. Magát a ferrói kezdőmeridiánt szintén egy, ma már feledésbe ment, Richelieu francia bíboros által kezdeményezett, Párizsban megtartott nemzetközi tanácskozás javasolta egységes kezdőmeridiánnak, még a XVII. században.

Kezdőmeridián	Hosszúságkülönbség Greenwich-től
Paris	2° 20' 14,025''
Rome	12° 27' 8,04''
Madrid	-3° 41' 16,48''
Oslo	10° 43' 22,5''
Pulkovo	30° 19' 42,09''
Ferro ¹	-17° 40'
Ferro ²	-17° 39' 46,02''
Ferro ³	-17° 39' 45,975''
Vienna, Stephansdom ⁴	34° 02' 15'' (from Ferro)
Vienna, Stephansdom ⁵	16° 22' 29''
Budapest, Gellérthegy ⁶	36° 42' 51,57'' (from Ferro)
Budapest, Gellérthegy ⁷	36° 42' 53,5733'' (from Ferro)
Budapest, Gellérthegy ⁸	19° 03' 07,5533''

2. táblázat. ¹Németország, Ausztria, Csehszlovákia, Jugoszlávia esetén. ²Magyarországon, ill. a Monarchiában, az ún. Albrecht-féle különbség. ³Ferrótól, az 1806-es rendszer szerint. ⁴Az Albrecht-különbség alkalmazásával ⁵Ferrótól, az 1821-es rendszer szerint. ⁶Ferrótól, az 1909-es rendszer szerint ⁷Az 1909-es rendszer szerint, az Albrecht-különbség alkalmazásával

A táblázatban megadott két érték közül az Albrecht-féle különbséggel közelíthető jobban a 20 fokos Párizs-Ferro szögtávolság. Németország, és nyomában Ausztria, majd a Monarchia további két utódállama is, ezt módosították. Ennek az volt az oka, hogy a régi berlini csillagvizsgáló tornyának hosszúságáról kiderült, hogy hibás: az eltérés 13,39 másodpercrek adódott. Ezt az értéket hozzáadjuk a 17° 39' 46,02''-es Albrecht-féle különbséghez, akkor 17° 39' 59,41''-et kapunk, ami másfél méter körüli hibával 17° 40'-re kerekíthető. Ily módon a topográfiai térképek szelvénybeosztását (5.4. pont) is meg lehetett tartani.



6. ábra. A párizsi csillagvizsgáló „Cassini-meridiánja”. A ferrói meridiánt valójában ettől nyugatra kerek 20 fokkal definiálták (forrás: Wikipedia)

A gellérthegy délkör esetén azért jegyeztük meg, hogy melyik rendszerre vonatkozik az érték, mert ez is, akárcsak a geodéziai kezdőpont koordinátái, alapfelületről alapfelületre változó számadat.

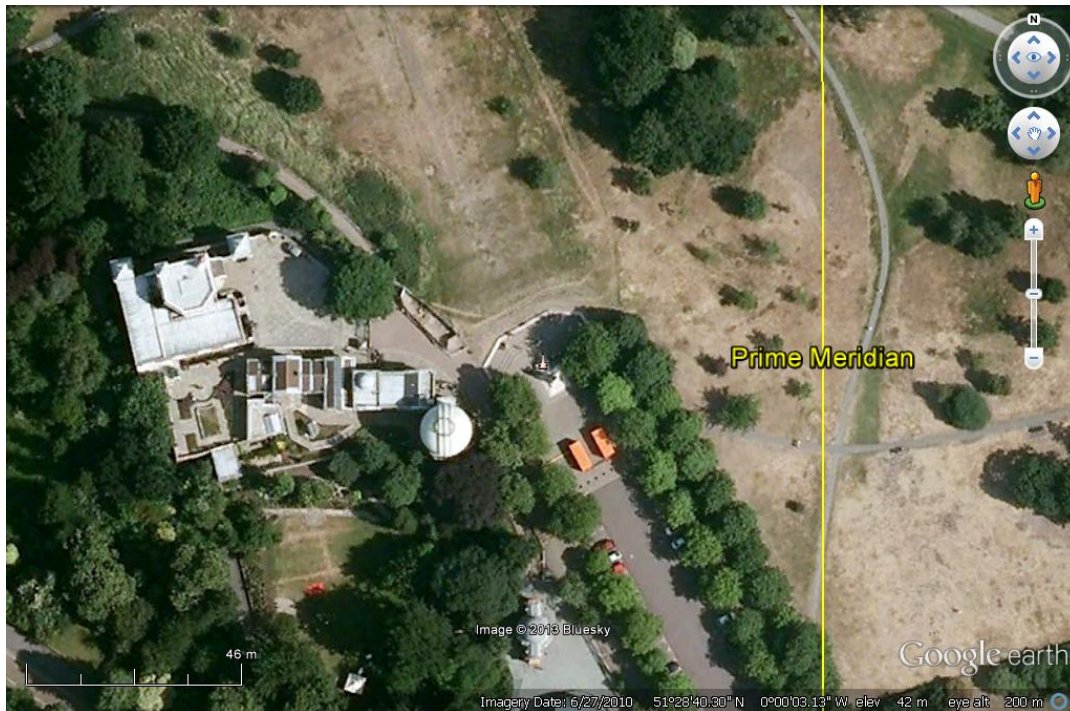
Előfordul az is, pl. spanyol vagy norvég topográfiai térképeken, hogy a hosszúságok Greenwich-től számítva vannak feltüntetve, azonban a térképsorozat szelvényezése, a szelvényhatárok még a régi, esetünkben a madridi vagy az oslói délkörhöz képest értelmezett kerek hosszúságokra illeszkednek (7. ábra).



7. ábra. Norvégia modern 1:50.000 méretarányú topográfiai térképének szelvényezése a régi Oslo-i kezdőmeridiánhoz kapcsolódik, bár a hosszúságok Greenwich-től adottak.

Más égitestek (Mars, Hold, Vénusz) térképezésekor is definiáltak kezdőmeridiánokat. A Mars esetén az Airy-0 kráteren (névválasztása a greenwich-i obszervatórium korábbi igazgatója után történt), a Hold esetén pedig a látható oldal középpontjában levő Bruce-kráteren halad át a kezdőmeridián.

A kezdőmeridiánok definíciója ma már a nemzetközi égi koordináta-rendszerhez illetve -kerethez (ICRF; *International Celestial Reference Frame*) kötött, az égitestek tengely körüli forgása paramétereinek (periódusidő, precessziós és nutációs állandók) és a tavaszpont (az ekliptika és az egyenlítő felszálló irányú metszéspontja) egy rögzített időpontbeli helyzetének alapján történik. Emiatt szembesülünk azzal, hogy az így definiált, a GPS által is használt WGS84 referencia-rendszerben a Greenwich-i „Airy-meridián” már „Greenwich-től nyugatra” helyezkedik el (8. ábra).



8. ábra. Meglepő módon, a Greenwich-i csillagvizsgáló Airy-meridiánja „Greenwich-től nyugatra” kb. 100 méterrel helyezkedik el a Google Earth által használt WGS84 dátumon. A WGS84-et nem a korábbi földi referenciámeridiánhoz, hanem az égi koordináta-rendszerhez kapcsolták.

2.3 Koordináta-rendszerek és kerethálózatok

Ahhoz, hogy objektumainkat a térben el tudjuk helyezni, hogy helyzetüket le tudjuk írni, koordináta-rendszerre van szükségünk. A koordináta-rendszerekben – más szóval: referencia rendszerekben – az objektum koordinátái egyértelműen megadják annak helyét. A koordináta-rendszer tengelyei egymástól lineárisan függetlenek. A térinformatikai gyakorlatban a következő koordináta-rendszer-típusokkal találkozunk:

- Derékszögű síkkoordináta-rendszer;
- Térbeli derékszögű koordináta-rendszer;
- Gömbi polárkoordináta-rendszer;
- Ellipszoidi koordináta-rendszer.

Az első két esetben a koordinátatengelyek egymásra merőleges egyenesek a síkban illetve a térben. A két utóbbi esetben az egyik koordináta távolság-jellegű (egy középponttól vagy egy felülettől mérve), továbbá két szögadat, a szélesség és a hosszúság (2.1. pont).

Sem a koordináta-rendszerek, sem a koordináták nem láthatók a világban. A Föld felszínére nincsenek „felfestve” a szélességi és hosszúsági körök (bár Greenwich-ben illetve az Egyenlítő mentén, vannak ilyen jelképes, a turistáknak szóló jelölések). Emiatt a geodéziai koordináta-rendszereket diszkrét, rögzített pontthalmazok, és azok pontjainak rögzített koordináta-értékei valósítják meg. Ezt a fizikailag rögzített, észlelhető és a koordinátáikkal jellemzett pontokból álló rendszert fogjuk kerethálózatnak nevezni. Valójában valamennyi geodéziai alapponthálózat kerethálózat. Valamennyi kerethálózat szükségszerűen belső torzulásokkal terhelt. Ezeket elvi és mérési hibák okozzák, amelyeket a hálózat létrehozásának (mérésének és számításának) időszakára jellemző technológiai szint határoz meg. A geodéziai kerethálózatok esetén a Föld alábbi pontokban tárgyalt elméleti alakja, a geoid és annak ellipszoidi közelítései elvi modellhibát okoznak, amelyet a korra jellemző felvételi pontosságából származó mérési hibák növelnek.

Az ellipszoidi és gömbi rendszerekben a földrajzi hosszúság azonosan értelmezett (2.2. pont). A szélesség értelmezése azonban eltérő. Az angolszász jelölésrendszer szerint az ellipszoidi koordinátákat a φ és λ , míg a gömbieket a Φ és Λ szimbólumok jelölik, míg a magyar szakirodalom ezt fordítva használja. A jelen könyv képleteiben előforduló valamennyi szélesség- és hosszúságérték ellipszoidon értelmezett.

3. fejezet - A Föld alakja és annak közelítései

A Föld alakjának jellemzésére többféle definíció kínálkozik. Mi ezek közül mindenképp olyant keresünk, amely függvény formájú: adott gömbi vagy ellipszoidi koordinátához egy értéket rendel: ez lehet a középpontból az adott ponthoz húzott sugár hossza vagy egy tetszőleges módon megválasztott vízfelülethez képest értelmezett magasság.

A szilárd, illetve folyadék fázisnak a légkörrel érintkező határa egy nyilvánvaló lehetőség. E meghatározással kapcsolatban azonban rögvést értelmezési problémákat találunk: a szilárd halmazállapotú növényzet része-e bolygónk alakjának? Mit kezdhetünk az épületekkel vagy az állandóan sodródó jégheggyekkel?

Még ha ezeket a kérdéseket így vagy úgy meg is válaszoljuk, egy gonddal mindenképp szembesülünk: ez a meghatározás nem eredményez egyértékű függvényt. A barlangok, a túlhajló sziklafalak esetén azonos gömbi vagy ellipszoidi koordinátákhoz több magasságérték is rendelhető. Valahogy el kell „simítanunk” a fázishatárokat által definiált alakot.

A gravitációs, illetve nehézségi erőtér pontosan ilyen simított felületeket kínál. A Föld geoid (szó szerinti értelemben *földszerű*) alakját éppen a nehézségi erőtérnek egy bizonyos vízfelületével lehet legjobban leírni. Vízfelületből végtelen sok van: azt választjuk, amelyik a középtengerszinthez legjobban illeszkedik. Ebből következik a geoid kevésbé szabatos, ugyanakkor nagyon szemléletes definíciója: a tengerszint folytatása a szárazföldek alatt. Lássuk, hogyan alakult ki az emberiség közös ismeretanyagában ez a kép, és mire használható a helymeghatározás gyakorlatában.

3.1 A Föld feltételezett alakjának változása a tudományban

Az antik görögök tisztában voltak a Föld gömbszerű alakjával. *Eraszthoténész* híres kísérlete – melyben a nyári napfordulókör, tehát azonos időpontban, különböző szélességeken a Nap sugarainak beesési szöge eltéréseiből megbecsülte a Föld sugarát –, közzismert. A becslés pontossága az akkori technikát figyelembevéve figyelemreméltó.

Bár az európai középkor a görögöket tekintette tudományos elődeinek, a Föld alakját mégis laposnak tekintették. Ebből származtak az olyan hiedelmek, mint a „világ vége”; az arra a kérdésre adott válasz, hogy ha azonos irányban sokáig megyünk, hová is jutunk egy lapos, de végesnek tekintett felületen.

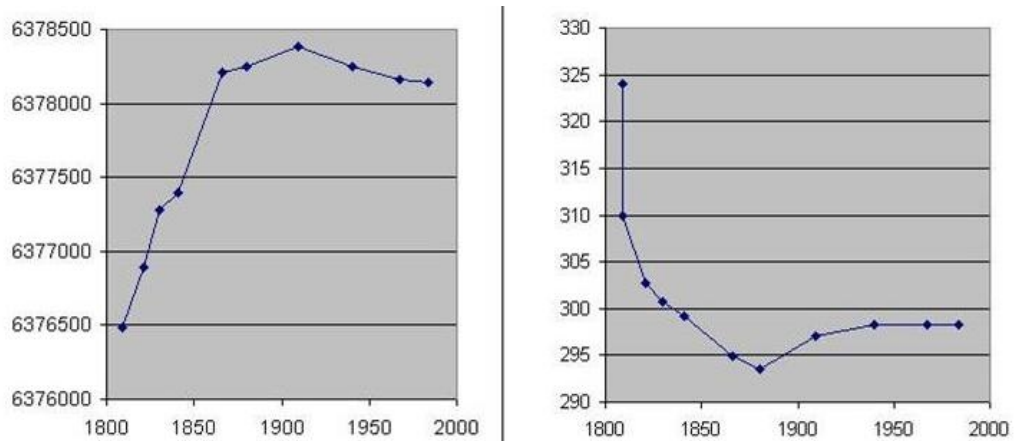
A XV.-XVI. század hajózási eredményei és felfedezései, elsősorban *Magellán* hajóinak Föld körüli útja (1520-21) megrendítették ezt a világméretű képet. Bár a változást a tudományt uraló egyház csak lassan fogadta el, mégis újra teret nyert az a gondolat, hogy bolygónk gömbszerű, illetve az akkori elképzelések szerint gömb alakú.

A szabályos gömb alakot többféle megfigyelés is megkérdőjelezte. A XVII. században az időmérés pontosságát nagyban megnövelte az ingaóra. A pontosan beállított ingaórák napi 1-3 másodperc hibával tudták a Nap két delelése közötti időtartamot megmérni. Egy ilyen, jól beállított ingaórát más szélességi körre – például Párizsból a dél-amerikai Cayenne-be (Francia Guyana) – elszállítva azonban jelentős, egy percet is meghaladó hiba lépett fel. Ennek az az oka, hogy az inga lengésidejét befolyásoló nehézségi gyorsulás értéke változik a földrajzi szélességgel. Párizs közelebb van a Föld tömegközéppontjához, mint Cayenne. Eszerint a Föld gömb alakja kissé torzult, a sugara szélességfüggő, tehát az alak inkább forgási ellipszoid.

Torzult, forgási ellipszoid, de hogyan? Elnyúlt vagy lapult? A sarki vagy az egyenlítői sugár a nagyobb? Mai ésszel talán meglepő, hogy ez a vita több évtizedig foglalkoztatta a csillagászokat, földmérőket, matematikusokat (ez a három szakma akkor szinte azonos volt, legjobbjai az összes felsorolt szakterületen működtek). Végül a Francia Tudományos Akadémia által szervezett *fokmérések* oldották meg a problémát. Lappföldön, magas szélességeken, és Peruban, az Egyenlítő közelében is megmérték egy-egy meridiánív hosszát két olyan pont között, ahonnan valamely csillag delelési magassága között pontosan 1 fok különbség adódott. Egyértelmű lett a válasz: Földünk lapult, sarki sugara kisebb, mint az egyenlítői.

A lapult forgási ellipszoid a 2. fejezetben leírt módon egyértelműen definiálható két geometriai adattal. Ezek közül az egyik hagyományosan a fél nagytengely, tehát az egyenlítői sugár, ez megadja az ellipszoid *nagyságát*. A másik adat – amely lehet a fél kistengely, a lapultság vagy az excentricitás – definiálja az ellipszoid *alakját*. A korabeli szerzők általában a lapultság reciprokát, az inverz lapultságot adták meg. Ez a szám azt írja le, hogy a sarki és az egyenlítői sugár hossz-különbsége hányadrésze az egyenlítői sugárnak.

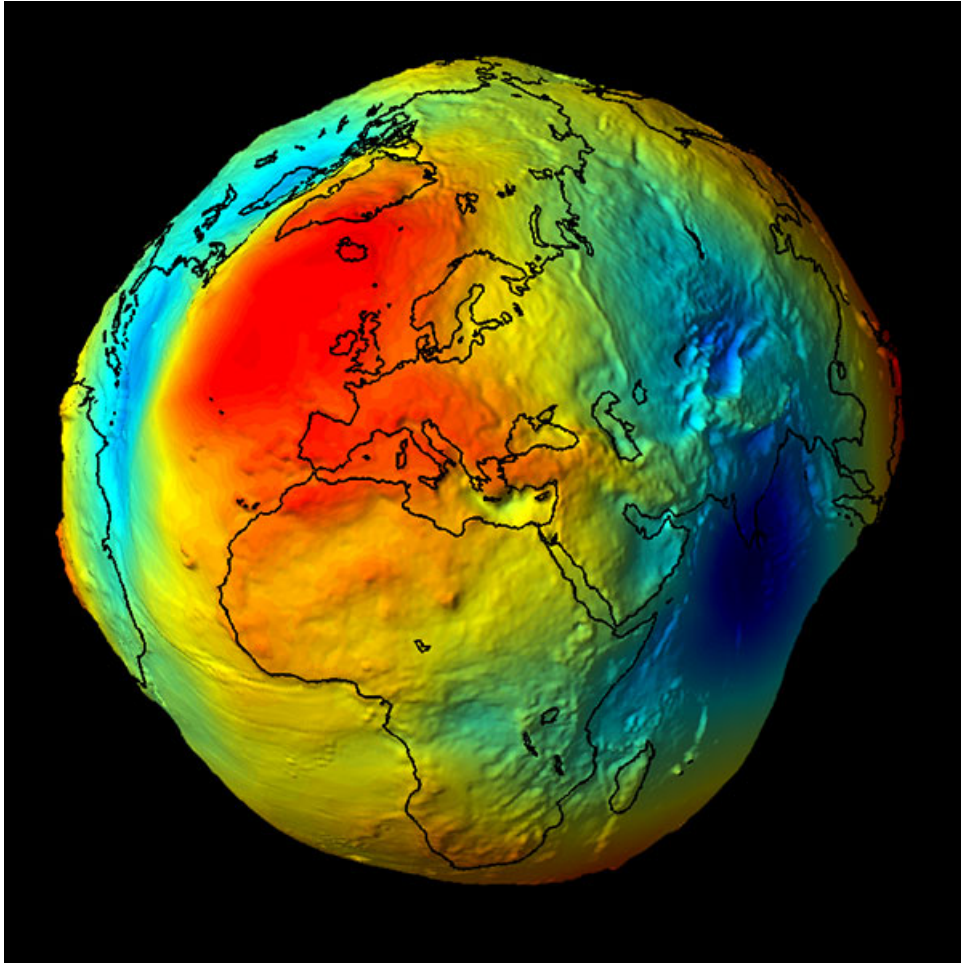
Az 1700-as évek végén, az 1800-as évek első felében rendkívül sok ellipszoidot publikáltak, mint a Föld alakjának mind jobb és jobb közelítéseit. Ezeket a közreadó tudós nevével és a közlés évszámával jellemezzük. Így pl. a Zách 1806-os ellipszoid a magyar földmérő-csillagász *Zách Ferenc* 1806-ban publikált ellipszoidalak-számpárosát jelenti.



9. ábra. Az „épp legkorszerűbb” ellipszoid nagytengelye (balra) és inverz lapultsága (jobbra) az idő függvényében. Az első adatok a geoid európai alakjára utalnak, majd a gyarmati felmérések módosítják a képet. A görbe végül a globálisan legjobb értékekhez tart.

Az ellipszoidok nagytengelye és inverz lapultsága nem teljesen független egymástól. A 9. ábrán láthatjuk e két számérték időbeli változását az adott kor legelfogadottabb ellipszoidjait figyelembe véve 1800-tól napjainkig. Az első időszakot a nagytengely-bebecslések növekedése, és az inverzlapultság-bebecslések csökkenése jellemezte. A Föld nagyobb és gömbszerűbb volt, mint azt az első észlelők gondolták. A nagytengely és a lapultság megállapítása azonban technikai és észlelési szempontból nem igazán bonyolult feladat. Miért hát az eltérő eredmények és miért ez a változás?

Az első észlelők egy-egy meridiánív mentén, egy adott fokmérést végezve publikálták adataikat. Az oszták *Walbeck* 1819-ben kiadott ellipszoidja volt az első, amely több, öt független fokmérés adatainak *átlagán* alapult. Viszont, ha egy ellipszoidnak tartott test becsült nagytengelye és lapultsága helyről helyre változik, akkor az a test nem ellipszoid.



10. ábra. A Föld potenciálméleti alakja, a geoid, sok ezerszeres magassági torzításban (Forrás: GFZ Potsdam).

Ez az eltérés derült ki a későbbiekben (3.3. pont) tárgyalandó háromszögelési hálózatok kialakításakor is. A fejezet bevezetőjében említett gravitáció-elméleti alakleírást ennek alapján *Carl Friedrich Gauss* definiálta az 1820-as években, majd az említett *geoid* nevet *Johann Benedict Listing* javasolta 1872-ben. A geoid (10. ábra) ismeretében értelmezhetjük az ellipszoid-paraméterek becslésében mutatkozó trendet: a geoid európai darabja alapján a Föld kisebbnek és lapultabbnak tűnik. Ha azonban más földrészeken, pl. az épp ellenkező eredményeket adó Indiában is mérünk, és az eredményeket átlagoljuk, akkor a 9. ábrán látható trendnek megfelelő értékeket fogjuk kapni.

A ma használatos ellipszoidok (pl.: WGS84, GRS67, GRS80, lásd 3.3. pont) paramétereit már a teljes Földre meghatározott geoidalak figyelembevételével határozták meg oly módon, hogy

- az ellipszoid geometriai középpontja a Föld tömegközéppontjába essen;
- az ellipszoid forgástengelye a Föld forgástengelyével egybeessen, és
- az ellipszoid és a geoid térfogata azonos legyen és
- az ellipszoid és a geoid magassági eltérése a teljes felszínt figyelembe véve minimális legyen.

Adott ponton a geoid és a (választott vagy a legjobban illeszkedő) ellipszoid felülete között a függővonal mentén mért távolságot *geoid-undulációnak* nevezzük. A legjobban illeszkedő WGS84 ellipszoidhoz képest a geoidunduláció-értékek a Föld felszínén a ± 120 métert nem haladják meg.

Összegezve, mai ismereteinket: a Föld egyenlítői sugara kb. 6378 kilométer, az egyenlítői és a sarki sugár hosszának különbsége (a gömb alak torzulása, „hibája”) kb. 21 kilométer, az ellipszoid alak „hibája” pedig 120 méter.

3.2 A geoid és a forgási ellipszoid

A geoid matematikai leírása több módon lehetséges. Megadhatjuk a gömbi vagy ellipszoidi koordináták egyenközű rácshálója csomópontjaiban érvényes, a tömegközéppontból a geoidfelszínhez mutató sugárhosszakat. Megadhatjuk ugyanilyen rácshálóban a geoidfelszínnek a legjobban illeszkedő ellipszoid felszínéhez képest értelmezett magassági helyzetét, a fent definiált geoid-undulációt. Megadhatjuk a geoidot gömbfüggvény-sorfejtéses alakban is. Helyi, illetve regionális geoid-felszínadarab leírására vetületi koordináták (5. fejezet) szerinti rácshálót is használhatunk.

Bármelyik megoldást választjuk is, az nyilvánvaló, hogy a geoid igen bonyolult felület. Amennyiben a felszínt vagy annak egy darabját térképen akarjuk ábrázolni, ehhez valamilyen térképi vetületet kell majd választanunk. A vetületi egyenletek, amelyek a gömb leképezésekor még viszonylag egyszerűek, igen bonyolulttá válnak, ha ellipszoidról kívánunk vetíteni. A geoid, mint alapfelület ebből a szempontból matematikailag kezelhetetlen. Különösen pedig akkor számított annak, amikor a térképvetületek matematikáját kidolgozták, a XIX. században, amikor nem állt rendelkezésre számítógép. Emiatt a térképészeti és geodéziai alkalmazásokban a geoidot forgási ellipszoiddal helyettesítjük.

A közelítéshez használt forgási ellipszoid a legtöbb esetben valamely előre definiált, jól ismert paraméterekkel rendelkező alapfelület (3. táblázat). Figyeljük meg, hogy az egyes ellipszoidok nagytengelyei között, bár a név és az évszám azonos, különféle verziók is lehetségesek (pl. az Everest-ellipszoidok, Bessel 1841-ellipszoid). Ennek oka, hogy az alapfelületek nagytengelyeit nem metrikus rendszerben, hanem pl. yardban vagy lábban adták meg. Ebben az esetben a metrikus rendszerre való áttéréskor fontos az adott hosszúság és a méter közötti váltószám. Nem mindegy, hogy ezt a váltószámot hány tizedesjegyre definiálják: a negyedik tizedesjegy elhagyása a yard-méter átváltásnál a köznapi életben nem okoz problémát, de ha ebből a yardból több millió van (mint a fűldsugár esetében) az eltérés több száz méteres!

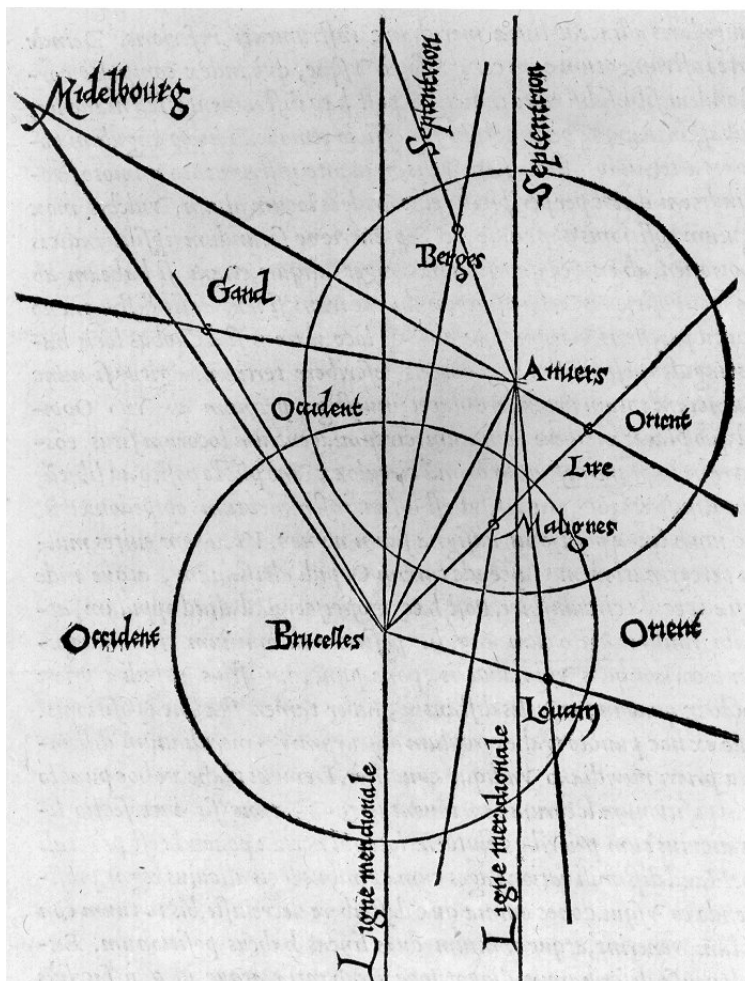
név	a	b	1/f	f	e
Laplace 1802	6376615	6355776.4	306.0058	0.003268	0.08078
Bohnenberger 1809	6376480	6356799.51	324	0.003086	0.07851
Zach 1809	6376480	6355910.71	310	0.003226	0.08026
Zach-Oriani 1810	6376130	6355562.26	310	0.003226	0.08026
Walbeck 1820	6376896	6355834.85	302.78	0.003303	0.08121
Everest 1830	6377276	6356075.4	300.8	0.003324	0.08147
Bessel 1841	6377397	6356078.96	299.1528	0.003343	0.08170
Struve 1860	6378298	6356657.14	294.73	0.003393	0.08231
Clarke 1866	6378206	6356583.8	294.98	0.00339	0.08227
Clarke 1880	6378249	6356514.87	293.465	0.003408	0.08248
Hayford (Int'l) 1924	6378388	6356911.95	297	0.003367	0.08199
Krassovsky 1940	6378245	6356863.02	298.3	0.003352	0.08181
GRS67	6378160	6356774.52	298.2472	0.003353	0.08182
GRS80	6378137	6356752.31	298.2572	0.003353	0.08182
WGS84	6378137	6356752.31	298.2572	0.003353	0.08182
Mars (MOLA)	3396200	3376200	169.81	0.005889	0.10837

3. táblázat. A térképészetben használt néhány ellipszoid adatai: a: fél-nagytengely; b: fél kistengely; 1/f: inverz lapultság; e: excentricitás.

Az ellipszoidnak a geoidhoz való illesztése a geodézia egyik fontos feladata. A kozmikus geodézia eszközeinek megjelenéséig ez a gyakorlatban a háromszögelési hálózatok kialakításával és (később) kiegyenlítésével történt.

3.3 Háromszögelési hálózatok típusai, kialakításuk és a geodéziai kiegyenlítés

Két pont távolságának meghatározása – amennyiben a pontok nincsenek túl messze egymástól – a pontok közötti egyenesen a hossz mértéknek megfelelő egység egymás mögé fektetésével lehetséges. Amennyiben a két pont távolsága nagyobb, ez az eljárás hirtelen igen bonyolulttá és nehezen kivitelezhetővé válik. Egymástól több száz méter távolságban lévő pontok távolsága ilyen módon már nagyon munka- és költségigényes.



11. ábra. Gemma Frisius 16. századi belgiumi háromszögelésének vázlata.



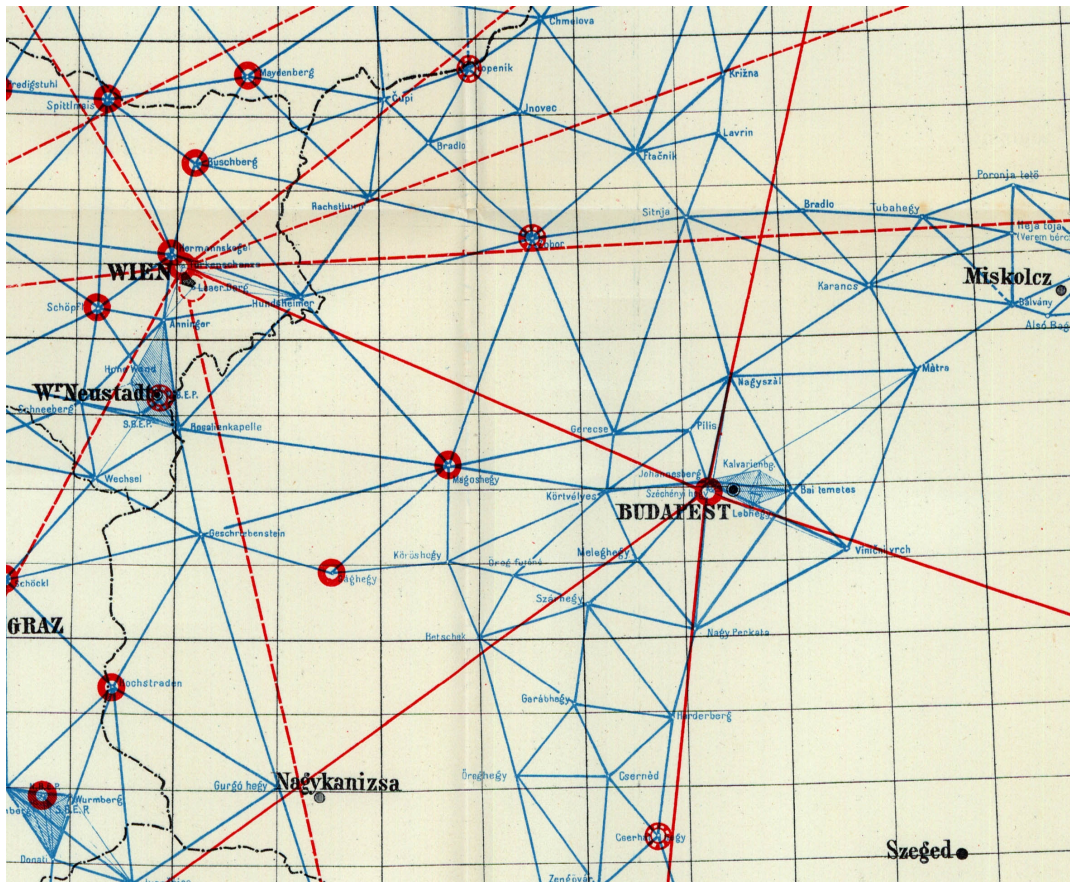
12. ábra. Snellius 1615-ös holland háromszögelésével állapították meg Alkmaar (északon) és Breda (délen) távolságát, mocsarakon és folyókon keresztül.

Már a XVII. század elején kifejlesztették azt a módszert, amellyel a nagyobb távolságok megmérése visszavezethető egy kisebb távolság és több-kevesebb szög megmérésére. Az 1500-as években *Gemma Frisius* kísérletei (11. ábra) nyomán 1615-ben a holland *Snellius* végezte el híres háromszögelését, amellyel két város, az egymástól elég messze eső Alkmaar és Breda templomtornyai közötti, mintegy 140 kilométeres távolságot mérte meg (12. ábra). A mérés során a két város között elhelyezkedő templomtornyok (mint csúcspontok) között háromszöghálóat létesített, és a háromszögek szögeit mérte meg, mert az erre szolgáló műszert, a teodolitot, addigra kifejlesztették. Ezek után *csak egyetlen* oldalhosszt kellett hagyományos módon megmérni, s a háromszögháló valamennyi oldalhossza kiszámítható volt. *Snellius* mérése egy érdekes felfedezéshez járult hozzá: a háromszögek mért szögeinek összege nem 180° -nak, hanem annál kicsivel többnek adódott (13. ábra). Ez a Föld gömbszerű (nem sík) alakjának következménye, mivel a gömbfelületen értelmezett háromszögek szögeinek összege az ún. gömbi szögfölösleggel tér el a 180° -tól. A geometria új ága, a gömbháromszögtan születésének volt ez a pillanata.

120									
Johannes Berg	382	Lőrövölés	75° 50'	3110	0,70	75° 50'	28,90	-220	
	384	Pilis	93° 45'	25,82	0,73	93° 45'	23,67	-216	
	386	Kerepes	69° 57'	28,26	0,66	69° 57'	27,36	-090	
	389	Alsó-Mennye	78° 47'	32,54	1,14	78° 47'	31,84	-070	
	383	Meleghegy	41° 39'	8,03	0,73	41° 39'	8,23	+020	
	360	Lőrövölés							
	360		0	5,76		360	0	0,00	-5,76

13. ábra. A János-hegy alappontból észlelt geodéziai alappontok iránya közt szögek, és azok összege (osztrák-magyar felmérés, 1901). A szögek összege a gömbszerű alapfelületi mérés miatt 5,76 szögmásodperccel meghaladja a 360 fokot.

A háromszögelési hálózatokkal nemcsak távolságok, hanem koordináták is meghatározhatók. Ehhez az szükséges, hogy a hálózat egy pontjának meghatározzuk a földrajzi koordinátáit. Ezért van az, hogy a háromszögelési hálózatok főalappontjának általában egy csillagvizsgálót választottak: a helymeghatározás itt a legegyszerűbb. A hálózat szükséges része még az ún. alapvonal: két, a hálózatba kapcsolt pont, amelynek távolságát hagyományos módon nagyon pontosan megméri. Amennyiben ezek adottak, s a háromszögelési hálózat csomópontjainak magasságát is megméri, a köztük fellépő szögeket meghatározzák, úgy – itt nem részletezett módon – valamennyi alappont földrajzi koordinátája megbecsülhető egy előre kiválasztott ellipszoidot feltételezve. A kapott koordinátákban a földrajzi hosszúság a csillagvizsgáló délköréhez – meridiánjához – képest értelmezett szögműködés lesz (14. ábra).

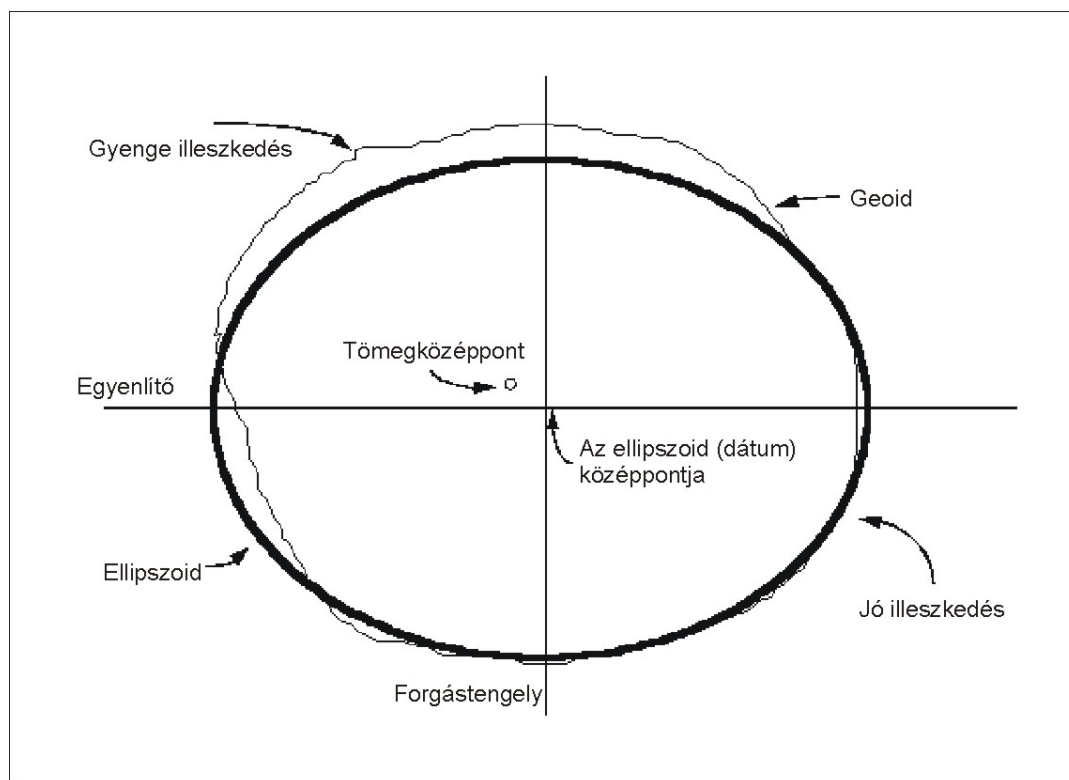


14. ábra. Az 1901-es felmérés háromszögelési hálózata Bécs és Budapest térségében.

Ez utóbbi megállapítás a magyarázata annak, miért ismeretes olyan sok kezdőmeridián a XVIII. és XIX. századi geodéziai felmérésekben: a szikratávíró feltalálása előtt nagyon körülményes feladat volt két távoli csillagvizsgáló hosszúságkülönbségét pontosan meghatározni. A közös háromszögelési hálózatba kapcsolás nem volt mindig megoldható – és mint azt mindjárt látni fogjuk –, az sem vezetett volna teljesen pontos eredményre. Emiatt rendkívül változatos, és sokszor igen szellemes módokat találtak arra, hogyan is mérhetik meg valamely csillag pozícióját a két obszervatóriumban pontosan ugyanabban a pillanatban. A Jupiter-holdak fogyatkozásai, illetve más esetekben az obszervatóriumok közötti hegytetőkön végzett löpor-robbantások is eszközül szolgáltak ehhez. A greenwich-i kezdőmeridián csak a XX. század első felében kezdett általános „szabvánnyá” válni és még ma sem kizárólagos (lásd 2.2. pont).

Az egyes alapponti koordináták meghatározásának ellenőrzéseként a háromszögelési hálózatokba több alapvonalat is bekapcsoltak, illetve – ami az eljárást forradalmasította – több alapponton (az ún. *Laplace*-pontokon) is meghatározták a földrajzi koordinátákat, csillagászati eszközökkel. Az így *mért* helyzet azonban eltért a más mérések alapján a háromszögháló felhasználásával *számított* helyzettől. Az eltérés mindig jelentkezett és nem volt előre jóslható. Az eltérés oka a Föld ellipszoidtól eltérő volta, a Föld geoid alakja. Az egyes pontokon végzett csillagászati helymeghatározás a helyi vízszintes és függőleges irány ismeretén alapul, ezek az irányok azonban az ellipszoidról eltérő alak miatt helyről helyre kismértékben változnak. Az alak majdnem ellipszoid – de nem teljesen az.

A probléma a XIX. század első felében akkora jelentőségű volt, hogy *Carl Friedrich Gauss* éppen ennek a megoldására fejlesztette ki a legkisebb négyzetek módszerét. A cél az, hogy az alappontok koordinátáit úgy változtassuk meg, hogy a Laplace-pontokon fellépő eltérések négyzetösszege minimális legyen. Az eljárás neve: a geodéziai hálózat kiegyenlítése, lényegében a geoid alak okozta hibák egyenletes elosztása, „elkenése” a hálózat területén. A kiegyenlítés eredménye: a terepen állandósított alappontok és azok rögzített, „kőbe véssett” koordinátái.



15. ábra. A geodéziai hálózat-kiegyenlítés eredménye: az ellipszoid jól illeszkedik a geoid felmért darabjához, középpontja viszont nem esik egybe a Föld tömegközéppontjával.

Mit eredményez a kiegyenlítés, mármint geometriai szempontból? Egy olyan ellipszoidot, amelynek méretparamétereit a hálózati feldolgozás elején rögzítettük, amelynek kistengelye (közel) párhuzamos a Föld forgástengelyével, és amely térben a legjobban illeszkedik a geoidnak ahhoz a darabjához, amelyre a kiegyenlített háromszögelési hálózat kiterjed. Ennek az ellipszoidnak a középpontja nem esik egybe a Föld tömegközéppontjával (15. ábra). Ily módon az ellipszoidnak már nemcsak a méretparamétere ismertek, de a térbeli elhelyezése is adott.

A térbeli elhelyezés és annak módja szempontjából három típust különítünk el:

Önkényes elhelyezés: csak egy csillagászati alappont van, a hálózat nincs kiegyenlítve, az ellipszoid térbeli helyzete a geoid egy pontjának normálisához rögzített. Jellemzően a kis óceáni szigetek önálló geodéziai rendszerei ilyenek, sokszor ASTRO megjelöléssel. A korai, de geodéziai alappal már rendelkező térképművek alapfelülete is sok esetben ilyen.

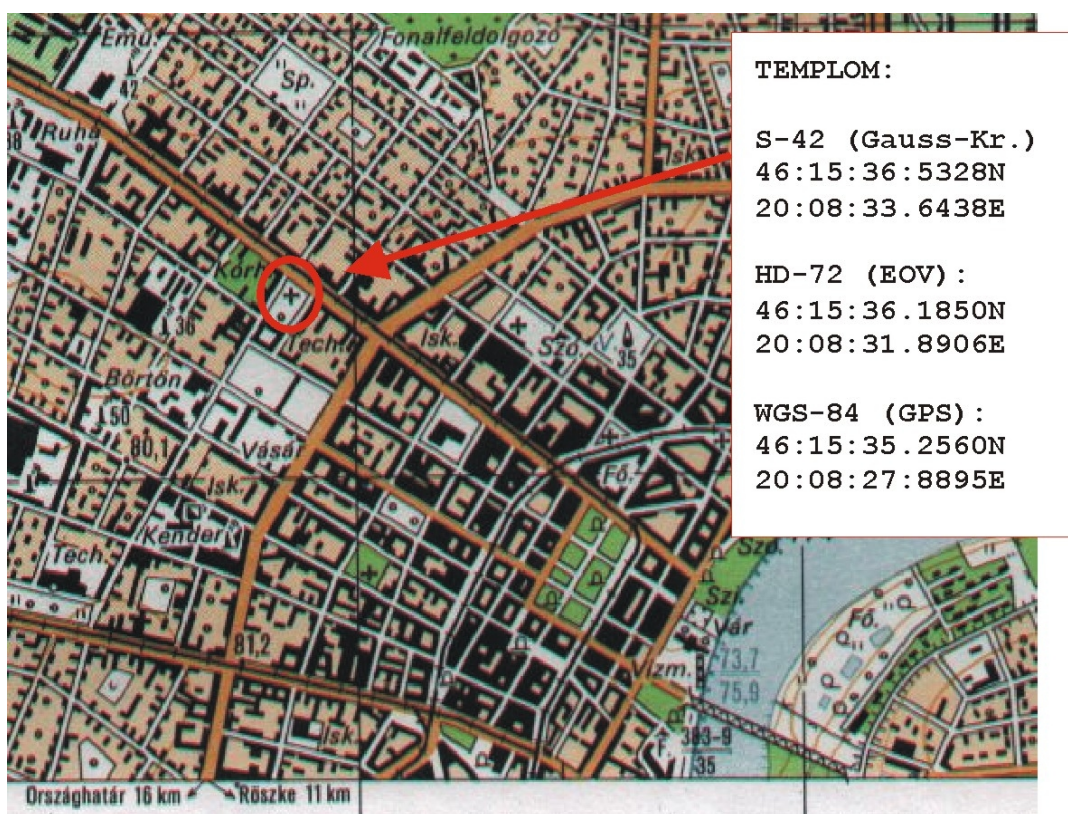
Relatív elhelyezés: a háromszögelési hálózat kiegyenlítése megtörtént, annak eredményeként az ellipszoid térbeli helyzete a geoid egy felületdarabjához képest optimális.

Abszolút elhelyezés (földi ellipszoid): az alapfelület geometriai középpontja a tömegközéppontban van, kistengelye a forgástengellyel egybeesik. Hagyományos, földi geodéziai-geofizikai eszközökkel nem valósítható meg (felszíni mérésekkel a tömegközéppont iránya nem határozható meg), definiálásához műholdas geodéziai eszközök (Dopplermérések, GPS) szükségesek. Az 1960-as éveket megelőzően földi ellipszoidokat nem definiáltak.

4. fejezet - Geodéziai dátumok

A *geodéziai dátum*, az alapfelületként választott ellipszoid méretére és alakjára vonatkozó adatokat jelenti, kiegészítve az ellipszoid elhelyezésével és tájékozásával kapcsolatos paraméterekkel. Ez az adatsor többféleképpen megadható. Az alábbiakban ezeket a lehetőségeket mutatjuk be.

Elöljáróban fontos megjegyezni, hogy mivel a különböző dátumok ellipszoidjának mérete, elhelyezése és tájékozása különböző, ezért a különböző dátumokon értelmezett (különböző háromszögelési vagy más hálózatokon alapuló) alapponti és terepi koordináták eltérőek. Egy konkrét tereppont ellipszoidi koordinátái más-más dátumokon értelmezve különbözők (16. ábra)! A térinformatikai rendszerek képesek arra, hogy ezek között átszámításokat végezzenek, ha az érintett dátum kezeléséhez szükséges adatokat ismerik. E fejezet az ismeretükhöz szükséges paramétereket és azok meghatározásának lehetőségeit írja le.



16. ábra. A szegedi felsővárosi templom ellipszoidi koordinátái különbözőek az eltérő geodéziai dátumokon. Ez minden tereppontra igaz!

4.1 A háromszögelési hálózatok paraméterezése

Amint az előző fejezetben bemutattuk, a háromszögelési hálózatok a terepen állandósított alappontokkal és azok koordinátaival jellemezhetők. A háromszögelési hálózat is a geodéziai dátum része. Ahhoz, hogy térinformatikai rendszerbe illesszük, tudnunk kell, hogy milyen módon lehet a sok alappont adatait tömörebb formában, ugyanakkor mégis a teljes hálózatra jellemzően megadni, illetve azt is, hogy a térinformatikai rendszerek milyen adatokkal tudják definiálni az egyes dátumokat.

A geodéziai gyakorlatban a legelterjedtebb leírási mód az, hogy az ellipszoid geometriai paramétereit mellett megadják a háromszögelési hálózat egyik kiténtetett pontjának

- ellipszoidi koordinátáit;

- csillagászati koordinátáit, ill.
- az onnan kiinduló egyik háromszögoldal ellipszoidi és csillagászati azimutját.

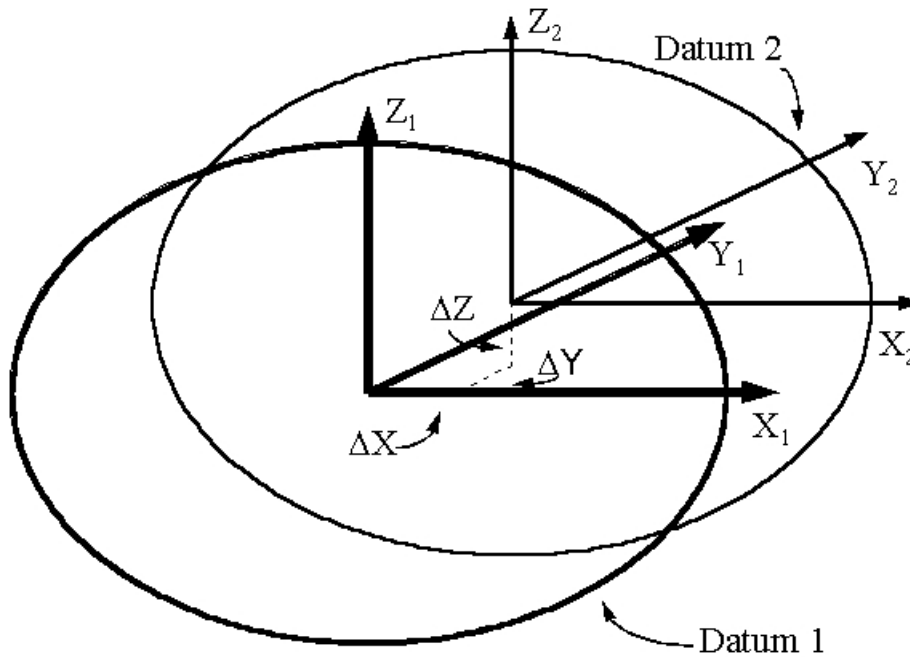
Míthogy a kiegyenlítés az ellipszoidnak a geoidfelülethez történő simuló elhelyezését jelenti, ezért általában a kitüntetett ponton a geoid-unduláció nullának tekinthető. Ha bármilyen okból nem annyi, akkor annak az értékét is meg szokták adni. A magyarországi 1972. évi kiegyenlítés (*Hungarian Datum 1972*) geodéziai kezdőpontja a Szőlőhegy nevű elsőrendű alappont. A dátumot úgy definiálták, hogy itt az ellipszoid 6,56 méterrel a geoid alatt van. Egy korábbi hálózatban ezen az alapponton ilyen undulációérték adódott (a Kraszovszkij-ellipszoidnak a Varsói Szerződés területéhez „simított” dátumának az itteni undulációja) és a dátumot egyéb megfontolásból ehhez kötötték. Ezt az értéket tehát a dátum definíciójakor meg kell adni, különben függőleges értelemben elhelyezési hibát vétünk.

Ez lényegesen kevesebb információ, mint a pontok koordináta-adatainak összessége. Feltételezzük, hogy ehhez a ponthoz illesztve az adott méretű és alakú ellipszoidot, az alapponti koordináták pontosan kiszámíthatók. Ez természetesen nem igaz. A hálózat, a dátum minőségét nagymértékben jellemzi, hogy ezek a koordináták milyen pontossággal rekonstruálhatók a fenti, redukált adatsor alapján. Az így adódó átlagos hiba Magyarország-méretű területen, XIX. század végi hálózatoknál 2-3 méter, XX. század közepi hálózatoknál 1,5-2 méter, modern dátumoknál fél méter körüli.

A térinformatikai rendszerek (GIS) számára azonban a fenti adatok nem megfelelő formátumúak, ráadásul ezek a programok más filozófiát is követnek a dátumok definiálásakor. A GIS programok egyik fontos feladata, hogy képesek átszámításokat végezni az egyes dátumokon értelmezett koordináták között. Ehhez ismerniük kell az érintett dátumok elhelyezése és tájékozása közötti különbségeket. A gyakorlatban a legtöbb térinformatikai szoftver ezt úgy oldja meg, hogy kijelöl egy kitüntetett dátumot (praktikusan a WGS84-et), és *minden* általa ismert dátum paramétereit *ehhez képest* tárolja. Ily módon meg kell adni az egyes dátumok ellipszoid-középpontjainak a tömegközépponthez képest értelmezett térbeli helyzetét és esetleg a kitüntetett irányokhoz képest értelmezett elforgatását.

4.2 A Mologyenszkij-féle áthidaló dátumparaméterezés

Két geodéziai dátum közötti kapcsolat megadásának legegyszerűbb módja az, hogy csak a két ellipszoid középpontját összekötő vektort adjuk meg (17. ábra). A vektort a 2. fejezetben ismertetett, geocentrikus derékszögű koordinátarendszerben értelmezett komponenseivel, méterben kell megadni. Nyilvánvaló, hogy amennyiben a két dátum középpontja azonos (például mindkettő tömegközépponti elhelyezésű), akkor a kapcsolatot a nullvektor írja le, amelynek komponensei: (0,0,0). Meg kell jegyeznünk, hogy a nemzetközi, és ennek nyomán a hazai szakirodalom egy része is a Mologyenszkij, illetve Mologyenszkij-Badekas-féle paraméterezés néven említi ezt az igen egyszerű leírási formát, annak ellenére, hogy a *Mihail Szergejevics Mologyenszkij* által leírt eredeti dátumtranszformációs formulák ennél bonyolultabbak. A továbbiakban „áthidaló Mologyenszkij”-formulákként, vagy ÁM-rövidítéssel hivatkozunk ezekre.



17. ábra. Az áthidaló Molodtsov-transzformáció egy egyszerű eltolás a két dátum-ellipszoid között, amelyet az eltolási vektor három komponense jellemez.

Az áthidaló Molodtsov-féle leírás három paramétere: dX , dY és dZ , méterben adott távolságok írják le a vizsgált dátumellipszoidok geometriai középpontjainak egymáshoz képest értelmezett helyzetét. Ha a céldátum a WGS84 földi alapfelület, úgy a kiinduló dátum dX , dY és dZ paraméterei az ellipszoidnak a földi tömegközépponthez viszonyított helyzetét adják meg. Amennyiben egy alappont derékszögű koordinátáit ismerjük az egyik (1.) dátumon, a paraméterek segítségével a második (2.), ún. céldátumon értelmezett geocentrikus koordináták a következő egyszerű összefüggéssel megkaphatók:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

A kiinduló és a céldátumon értelmezett ellipszoidi koordináták közötti szögműködés a geocentrikus koordinátákra történő átszámítás és azokról való visszaszámítás nélkül is elvégezhető az áthidaló Molodtsov-formulák segítségével:

$$\Delta\varphi'' = \frac{-dX \sin\varphi \cos\lambda - dY \sin\varphi \sin\lambda + dZ \cos\varphi + (a \cdot df + f \cdot da) \sin 2\varphi}{M \sin\lambda} \quad (4.2.2)$$

$$\Delta\lambda'' = \frac{-dX \sin\lambda + dY \cos\lambda}{N \cos\varphi \sin\lambda} \quad (4.2.3)$$

$$\Delta h = dX \cos\varphi \cos\lambda + dY \cos\varphi \sin\lambda + dZ \sin\varphi + (a \cdot df + f \cdot da) \sin^2\varphi - da + dZ \cdot \sin\varphi \quad (4.2.4)$$

ahol $M(\Phi) = a \frac{1-e^2}{(1-e^2 \sin^2\varphi)^{3/2}}$ a meridiángörbületi sugár; $N(\Phi) = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2\varphi}}$ a harántgörbületi sugár; $\Delta\varphi''$ és $\Delta\lambda''$ a kiinduló és a céldátumon értelmezett szélesség- és hosszúságkülönbség szögmásodpercben; Δh az ellipszoid feletti magasságok különbsége; a és f a kiinduló dátumellipszoid fél-nagy tengelye és lapultsága; da és df pedig ezek különbsége a kiinduló- és a céldátum között. Ha az ellipszoidi magasságok nem adóttak, megbecsülhetjük őket helyi vagy globális geoidmodellek felhasználásával, vagy a (4.2.4) egyenletet el is hagyhatjuk a számításnál.

Mint korábban láthattuk, a térinformatikai programok az egyes dátumokat általában egy közös vonatkoztatási rendszerhez, a WGS84 dátumhoz képest definiálják, így hidalják át azt a problémát, hogy az egyes dátumok egyszerűen leírható eszközökkel önmagukban nem, csak más dátumokhoz képest definiálhatók. Amennyiben két független dátum és a WGS84 közötti paraméterek adottak, a két dátum közötti közvetlen AM-transzformáció paraméterei a linearitás következtében egyszerűen megadhatók. Legyen az A transzformáció az 1. dátum és a WGS84 közötti, a B pedig a 2. dátum és a WGS84 közötti. C-vel jelöljük az 1. és 2. dátum közötti közvetlen transzformációt. Ennek paraméterei:

$$\begin{bmatrix} dX_C \\ dY_C \\ dZ_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dX_A \\ dY_A \\ dZ_A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} dX_B \\ dY_B \\ dZ_B \end{bmatrix} \quad (4.2.5)$$

függetlenül attól, hogy az 1. és 2. dátum mely ellipszoid egy-egy realizációja.

A szakirodalomban több esetben igencsak eltérő számhármassokat találunk egy-egy alapfelület és a WGS84 dátum közötti AM-transzformáció paramétereiként. Bár ez a térbeli elhelyezés pontos leírása szempontjából nyilvánvaló hibára utal, vízszintes értelemben az eltérés nem feltétlenül nagy ezek között. Két, különböző számhármassal, (mint AM-paraméterekkel) jellemzett dátum esetében, ahogyan azt mindjárt látni fogjuk, mindig van olyan ellipszoidi pont, amelyre nézve a két transzformáció azonos vízszintes eltolást jelent. A kérdés az, hogy ez a pont az adott dátum érvényességi területére (és lehetőleg annak közepére) esik-e? Amennyiben igen, akkor mindkét paramétersor használható, és az is eldönthető, hogy ebben a pontban függőleges értelemben mennyi az eltérés. A különbség általában a geoid-unduláció figyelmen kívül hagyásából származik.

Jelölje \mathbf{r}_1 a WGS84 ellipszoid geometriai középpontjától az 1. dátum középpontjába húzott helyvektort, \mathbf{r}_2 -vel pedig a jelöljük a WGS84 középpontjától a 2. dátum középpontjába húzott helyvektort. Képezzük a két helyvektor háromdimenziós különbségét:

$$\mathbf{r}_{diff} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (4.2.6)$$

Lássuk, hogy ez a helyvektor a középpontból az alapfelület milyen szélességgel és hosszúsággal megadott pontjára mutat:

$$\varphi_r = \arctan\left(\frac{dZ_{diff}}{\sqrt{dX_{diff}^2 + dY_{diff}^2}}\right) \quad (4.2.7)$$

$$\lambda_r = \arctan\left(\frac{dY_{diff}}{dX_{diff}}\right) \quad (4.2.8)$$

míg a különbségvektor hossza (a háromdimenziós eltérés, méterben):

$$|r_{diff}| = \sqrt{dX_{diff}^2 + dY_{diff}^2 + dZ_{diff}^2} \quad (4.2.9)$$

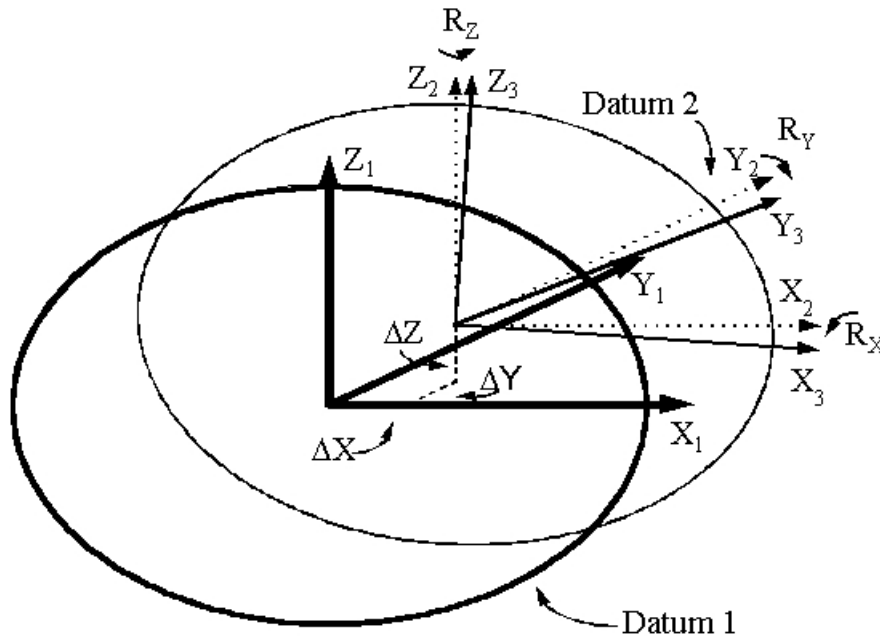
Amennyiben a (φ_r, λ_r) pont a dátum érvényességi területén van, úgy mindkét paramétersor alkalmazható. Ebben az esetben a különbségvektor hossza általában az ezen a ponton érvényes, a WGS84 ellipszoidhoz képest értelmezett geoidunduláció-érték körül adódik (lásd 4.6. pont), vagyis az egyik paraméter-hármas nem veszi figyelembe a dátumellipszoid térbeli helyzetét. Ha a (φ_r, λ_r) pont a Föld felszínén másutt helyezkedik el, akkor valamelyik paramétersor hibás.

4.3 A Burša-Wolf-féle dátumparaméterezés

A Burša-Wolf-féle paraméterezés (a cseh *Milan Burša* és a német *Helmut Wolf* munkája nyomán) annyiban tér el az előző pontban tárgyaltól, hogy figyelembe veszi a két alapfelület közötti tájékozási eltéréseket (18. ábra), illetve

azt, ha a két alapfelület mérete az ellipszoidok méretéhez képest kismértékben más. A transzformáció bemenő és kimenő adatai a pont derékszögű koordinátái:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} + (1+k) \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_Z & -\varepsilon_Y \\ -\varepsilon_Z & 1 & \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y & -\varepsilon_X & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \quad (4.3.1)$$



18. ábra. A Bursa-Wolf-transzformáció nemcsak az elhelyezési, hanem a tájékozási különbségeket is figyelembe veszi két dátum-ellipszoid közt.

A (4.3.1) képlet úgy származtatható, hogy a három irány szerinti elforgatási mátrix szorzataként előálló általános forgatási mátrix (az ún. térbeli Helmert-transzformáció mátrix) elemeiben elvégezzük a nagyon kicsi (néhány, vagy maximum néhány tíz szögmásodperces) szögelfordulás esetében megtehető elhanyagolásokat és behelyettesítéseket.

A (4.3.1) egyenletben megadott forgatási mátrix nem diagonális elemeinek előjel-konvenciója kétféle lehet. Amennyiben a mátrixot a (4.3.1) egyenletben adott módon írjuk fel, akkor az a „koordináta-rendszer elforgatása” (*coordinate frame rotation*) konvenciónak felel meg, ekkor ugyanis a kiinduló alapfelülethez rögzített koordináta-rendszert forgatjuk el a felsorolt kis szögértékekkel. Amennyiben a mátrix nem diagonális elemeinek előjelét megfordítjuk, akkor az ún. „helyvektor elforgatása” (*position vector rotation*) konvenciónak megfelelő leíráshoz jutunk. Ebben az esetben a kiinduló alapfelülethez képest megadott, a vizsgált ponthoz mutató helyvektor elforgatásának komponenseit adjuk meg.

A két említett konvenció közül nincs kiválasztott szabvány. Az Egyesült Államok, Kanada és Ausztrália a „koordináta-rendszer elforgatása” konvenciót, míg a nyugat-európai országok inkább a „helyvektor elforgatása” konvenciót preferálják. Az ISO19990 szabványtervezet (*draft*) is ez utóbbit ajánlja, azonban az USA ellenállása miatt ennek szabványkénti elfogadása belátható időn belül kétséges. Mivel a térinformatikai szoftverek többségét az Egyesült Államok - Kanada - Ausztrália országcsoportban készítik, e programcsomagokban az ennek megfelelő konvenció az alapértelmezés.

Amennyiben a Bursa-Wolf paraméterezésnek megfelelő paramétercsoporthoz jutunk, feltétlenül meg kell tudnunk, hogy az melyik konvenció szerint van értelmezve. Ha ez nem tudható meg, akkor először értelmezzük a „koordináta-rendszer elforgatása” módszer szerint, végezzünk ellenőrzést a saját adatainkon, és ha a transzformáció hibásnak bizonyul, fordítsuk meg a forgatási mátrix nem-diagonális elemeinek előjelét.

Az előző fejezetben, a Mologyenszkij-paraméterek esetében bemutatott, az egymás utáni transzformációk paramétereinek összegzéssel való meghatározhatósága, az ún. linearitás a Burša-Wolf transzformációra is igaz. Ez az első pillantásra talán meglepő állítás matematikailag egyszerűen belátható. Az alábbiakban az érdeklődők számára bemutatjuk, hogy két, Burša-Wolf-féle dátumtranszformáció egymás utáni elvégzése hogyan és milyen pontossággal helyettesíthető egyetlen átalakítással, és e helyettesítő transzformációnak melyek a paraméterei.

A (4.3.1) egyenlet két transzformáció egymás utáni alkalmazása esetén:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{dx}_2 + (1+k_2)\mathbf{A}_2[\mathbf{dx}_1 + (1+k_1)\mathbf{A}_1\mathbf{x}] \quad (4.3.2)$$

alakban írható fel, ahol \mathbf{dx}_1 és \mathbf{dx}_2 a két eltolási vektor, k_1 és k_2 a két méretaránytényező, \mathbf{A}_1 és \mathbf{A}_2 a két forgatási mátrix, \mathbf{x} a transzformáció bemenő geocentrikus helyvektora, \mathbf{x}' az eredmény. Az egyenlet átrendezve:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{dx}_2 + (1+k_2)\mathbf{A}_2\mathbf{dx}_1 + (1+k_2)(1+k_1)\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{x} \quad (4.3.3)$$

alakra hozható, innen pedig az “eredő” transzformáció \mathbf{dx}_e, k_e és \mathbf{A}_e paraméterei:

$$\mathbf{dx}_e = \mathbf{dx}_2 + (1+k_2)\mathbf{A}_2\mathbf{dx}_1 \quad (4.3.4)$$

$$k_e = k_1 + k_2 + k_1k_2 \approx k_1 + k_2 \quad (4.3.5)$$

$$\mathbf{A}_e = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \approx \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \quad (4.3.6)$$

Az (4.3.5) egyenlet végén írt közelítés azonnal, a (4.3.6) egyenletben írt pedig a mátrixszorzás elvégzésével megérthető, ha elhagyjuk a méretaránytényező, illetve az igen kis elforgatási szögek négyzetének nagyságrendjébe eső tagokat. A (4.3.4) egyenlet jobb oldalán levő összeg megfelel a második transzformációnak a \mathbf{dx}_1 eltolásvektorra alkalmazásakor előálló eredménynek. A milliomod nagyságrendű méretaránytényező elhagyásával

$$\mathbf{dx}_e = \mathbf{dx}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{dx}_1 \approx \mathbf{dx}_1 + \mathbf{dx}_2 \quad (4.3.7)$$

alakban írható. Az így kapott közelítés a transzformációkba általában behelyettesítetthez képest igen rövid vektorra alkalmazás esetén helytálló – az egyszerűsítésből származó eltérés maximum centiméteres nagyságrendű, az ezáltal okozott horizontális hiba pedig ennél is kisebb. Az eredő transzformáció paraméterei tehát valóban előállíthatóak a két egymás után alkalmazott transzformáció megfelelő paramétereinek összegeként.

4.4 Az áthidaló Mologyenszkij- és a Burša-Wolf-féle paraméterezés összehasonlítása

Az áthidaló Mologyenszkij (ÁM) és a Burša-Wolf-féle (BW) paraméterezés közötti legfontosabb különbségeket a 4. táblázat mutatja be.

Áthidaló Mologyenszkij-paraméterezés	Burša-Wolf-paraméterezés
Egyszerűbb	bonyolultabb
általában pontatlanabb	általában pontosabb
paraméterei könnyen számíthatók	paramétereinek becslése nehezebb
A paraméterek jelentése egyértelmű	az elforgatási paraméterek kétfajta konvenciót követhetnek
Minden térinformatikai szoftver ismeri	számos (de nem minden) térinformatikai szoftver ismeri

4. táblázat. Az áthidaló Mologyenszkij- és a Burša-Wolf transzformációs eljárás összehasonlítása

Itt jegyezzük meg, hogy az Egyesült Államok térképészeti hatósága, az NMA (*National Mapping Agency*), és elődei (NIMA: *National Imagery and Mapping Agency*; DMA: *Defense Mapping Agency*) az ÁM paraméterezést, míg a NATO a Burša-Wolf-féle paraméterezést tartja követendőnek.

Bármely paraméterezést választjuk, az alapfelületek közötti átszámításnak (az egyes alapfelületek kiegyenlítési hibái miatt) a hibája csak igen kis területen elégíti ki a geodéziai számítási pontosságot, tehát marad a hiba néhány

centiméteren belül. A nagy pontosságú átszámítási feladatokat más eljárással, a gyakorlatban általában magasabbfokú polinomiális illesztéssel kell megoldani. A térinformatikai szoftverek ugyanakkor csak a legkritikább esetben engedik meg a felhasználónak, hogy ilyen polinomsorokat definiáljon. A térinformatikai pontosságot (ami kb. a térképi leolvasás hibájának felel meg, és topográfiai térképek esetén 5-10 méter körüli) azonban bármelyik paraméterezésen alapuló eljárás kielégíti. Az 5. táblázatban megadjuk az egyes térképi felmérések alapfelülete és a WGS84 közötti átváltás jellemző országos pontosságát Magyarország mai területére, a kétfajta paraméterezés alkalmazásával.

felmérés	ÁM átlagos (max.) hibája	BW átlagos (max.) hibája
II. katonai felmérés	30 (200)	nem definiált transzformáció
III. felmérés-sztereo rendszer	5 (12)	1,5 (4)
DHG (1943)	2 (5)	2 (5)
EOV (1972)	1	0,2 (0,5)
Katonai Gauss-Krüger (1983)	1	0,2 (0,4)

5. táblázat. A magyarországi felmérések és a WGS84 közti transzformációk hibái méterben az áthidaló Mologvenszkij- és a Burša-Wolf eljárással

A kétféle rendszer alkalmazásakor elkövethető legnyilvánvalóbb hiba az, hogy a ÁM- és BW-paraméterek között az esetek túlnyomó részében nem lehet egyszerűen átszámítani. Ha ismerjük a transzformáció 7 BW-paraméterét, akkor abból nem származtatható a ÁM-transzformáció 3 paramétere a 3 elforgatási és egy méretarány-tag egyszerű elhagyásával!

Az a hiba is előfordul, hogy egy nem kellően pontos BW-paramétersort úgy próbálnak javítani, hogy eltolási tagjait egy másik transzformációból, vagy egy ÁM-paramétersorból egyszerűen kimásolják. Ez a művelet azonban így nem végezhető el a BW-paraméterek meghatározása csak egységes algoritmussal történhet, a következő pontban leírtaknak megfelelően.

Amennyiben egy paramétersor pontatlan eredményt szolgáltat (különösen, ha az átváltási hiba kétszerese a dátumtranszformáció nélküli eltolásnak), próbálkozzunk a paraméterek előjelének (mindegyiknek) a megfordításával.

Ha így sem jutunk pontosabb átszámítási eredményekhez, akkor a BW-eljárás esetén fordítsuk meg csak az elforgatási tagok előjelét. Ellenőrizzük, hogy az elforgatási tagok mértékegysége egyezik-e a szoftver által igényelttel (szögmásodpercben vagy radiánban adottak-e az értékek). Van, ahol a méretaránytényezőt ppm-ben (*part per million*; milliomodrész) kell megadni, és akad olyan szoftver, ahol a tényleges arányt, egy 1-hez igen közeli tört számként kell megadni (a „nincs méretarány-különbség” számértéke az előbbi esetben nulla, az utóbbiban pedig 1). Végezetül: sok térinformatikai rendszer csak úgy „vesz tudomást” az adatfile-jaiban manuálisan módosított paramétereiről, ha újraindítjuk a programot.

4.5 A transzformációs paraméterek becslése

Ha adott a geodéziai alappontok egy olyan halmaza, amelynek ellipszoidi koordinátái két függetlenül meghatározott (kiegyenlített) alapfelületen is ismertek (közös alappontok), akkor meghatározhatjuk a két alapfelület (dátum) közötti áthidaló Mologvenszkij-féle, illetve Burša-Wolf-féle paramétereket.

Az ÁM-paramétereknek, tehát a két dátumellipszoid középpontja közötti vektor komponenseinek számítása viszonylag egyszerű, és már abban az esetben is végrehajtható, ha csak egyetlen pont, például a hálózat kezdőpontja ellipszoidi koordinátái ismertek. Ebben az esetben a koordináták, az ellipszoidok méretparaméterei és az (ismert vagy becsült) geoidunduláció-értékek felhasználásával kiszámítjuk a pont térbeli derékszögű koordinátáit mindkét rendszerben. Ezután e két koordináta-hármaszt a pont két rendszerbeli helyvektoraként értelmezve, ezek különbségvektorának komponensei adják a keresett paramétereket. Először a kezdőponti koordinátákat a

$$X = (N + h) \cos \varphi \cos \lambda$$

$$Y = (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \tag{4.5.1}$$

$$Z = [N(1 - e^2) + h] \sin \varphi$$

egyenletekkel geocentrikus derékszögű koordinátákká alakítjuk előbb a vizsgált dátumon, majd a WGS84 ellipszoidon, végül a paraméterek a

$$\begin{aligned}dX &= X_{WGS84} - X_{helyi} \\dY &= Y_{WGS84} - Y_{helyi} \\dZ &= Z_{WGS84} - Z_{helyi}\end{aligned}\tag{4.5.2}$$

különbségek képzésével kaphatók meg.

Itt hívjuk fel a figyelmet arra, hogy a (4.5.1) képletben a h magasság az ellipszoid feletti magasságot jelenti (vö. 3. fejezet). Amennyiben az alappont tengerszint feletti magassága nem ismert, az eljárás a következő: a jellemző dátumon a h magasságot az ott az adott dátumellipszoidhoz képest értelmezett geoidunduláció-értékre állítjuk. Amennyiben erről nincs adatunk, válasszunk zérus értéket. A WGS84 feletti magasságértéket helyettesítsük a ponton érvényes, a WGS84-ben érvényes geoidunduláció-értékkel, amelyet lokális vagy globális geoidmodellből, pl. az EGM96 modellből könnyen megkaphatunk. Az EGM96 modell és az undulációt kiszámító program az Interneten elérhető.

Amennyiben több közös alappontunk van, úgy a fenti műveletet pontonként is elvégezhetjük, és a végeredményként megadott paramétereket a pontonként meghatározott paraméterek átlagaként adhatjuk meg.

A fenti számítással olyan paramétereket kapunk, amelyek a transzformációt térben optimalizálva írják le. Arra is van lehetőség (bár lényegesen bonyolultabb számításokat igényel), hogy azt a paraméter-hármaszt határozzuk meg, amely vízszintes értelemben minimális hibával írja le a transzformációt. A szükséges számítások elérhetőségét a fejezet végi irodalomjegyzékben találhatjuk meg.

A Burša-Wolf transzformáció paramétereinek becslése lényegesen bonyolultabb feladat. A jegyzet mellékletében megadjuk a számítás egy lehetséges, matematikailag zárt módját. A megadott levezetés áttanulmányozása és megértése csak az ezzel a problémával közvetlenül foglalkozó felhasználók számára szükséges, a többiek elegendő ha elfogadják, hogy a paraméterek becslése így is lehetséges.

A továbbiakban egy ennél egyszerűbb módszert ismertetünk.

A mellékletbeli levezetéssel kapott paraméterek – az együttes becslés következtében – *egyenként* ritkán hordoznak információt a hálózatok közötti valódi elhelyezési viszonyokról. Általánosságban is elmondható, hogy nagyon különbözőnek látszó paramétersorok is hasonló pontossággal írhatják le két alapfelület egymáshoz képest érvényes helyzetét, és nem ismerünk olyan eljárást, amely a Mologyenszkij-transzformációhoz hasonlóan, egyszerűen kimutatja két paramétersor ekvivalenciáját. Létezik azonban olyan eljárás, amellyel a transzformáció 3 elhelyezési, 3 tájékozási és egy méretarányparamétere egymástól függetlenül megbecsülhető, pusztán a hálózatokkal kapcsolatos néhány alapinformáció segítségével.

Tételezzük fel, hogy egyik alapfelületünk a WGS84 geocentrikus dátum, míg a másik valamelyik regionális háromszögelési hálózat, amelynek adott a kezdőpontja (amelynek koordinátáját ismerjük), és adottak a pont WGS84 ellipszoidi koordinátái is. Első lépésben a (4.5.2) képletnek megfelelően kiszámítjuk a két rendszer közötti Mologyenszkij-paramétereket, majd ezekhez az alábbiak szerint úgy választjuk meg a további 3+1 paramétert, hogy a horizontális, illetve a térbeli transzformáció pontosságát a lehető legnagyobb mértékben javítsuk.

Ehhez először is fel kell használnunk azt, hogy a méretaránytényező változtatása a horizontális koordinátákra gyakorlatilag elhanyagolható. A vízszintes illeszkedést az elforgatási paraméterek befolyásolják, míg a méretaránytényező ettől függetlenül más mennyiséghez, a geoid-undulációhoz kapcsolódik.

Észre kell vegyünk továbbá, hogy a három elforgatási paraméter (r_X, r_Y, r_Z), illetve a regionális rendszer kezdőponti koordinátái (φ, λ) és a kezdőpont körüli elforgatás α szöge (3 adat) között egyértelmű megfeleltetés létesíthető a következő módon:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{r_z}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}\right) \quad (4.5.3)$$

$$\lambda = \arctan\frac{r_y}{r_x} \quad (4.5.4)$$

$$\alpha = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \quad (4.5.5)$$

illetve az inverz irányban, ellipszoidi esetben:

$$r_x = \frac{\alpha \cos \varphi \cos \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (4.5.6)$$

$$r_y = \frac{\alpha \cos \varphi \sin \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (4.5.7)$$

$$r_z = \frac{(1 - e^2) \alpha \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (4.5.8)$$

Ezen adatok közül a kezdőpont koordinátáit ismerjük. A kezdőpont körüli elforgatás szögére vonatkozóan csak akkor tehetünk számításon alapuló becslést, ha mind a kezdőpontnak, mind pedig a tájékozáshoz használt másik alappontnak (tehát a megadott azimuttal rendelkező háromszögoldal, ld. 3.3. pont, mindkét végpontjának) ismerjük *mindkét* rendszerben a koordinátáit. Ha nem is ez a helyzet, a problémát akkor is visszavezettük egy egydimenziós minimumkeresési problémára: az ismert alappont körül milyen elforgatási szög eredményez minimális hibát a két alapfelület közötti transzformációban? Ez a feladat iterációval oldható meg a legegyszerűbben, amelyet akár táblázatkezelő program segítségével, manuálisan is elvégezhetünk.

A méretaránytényezőt, amely a kiindulási rendszerhez és a célrendszerhez felhasznált alapvonal(ak) hosszúságetalonjai közti különbségre – lényegében az alapvonalak mérésének hibájára – utal, szintén megbecsülhetjük a fentihez hasonló iterációs eljárással.

Ezzel a módszerrel nemcsak megkerülhetjük a többdimenziós paraméterbecsléshez szükséges bonyolult matematikai eljárást, de a kapott paraméterek fizikai-geometriai jelentéssel is bírnak.

4.6 A korrekciós rács és alkalmazása

A fenti pontokban tárgyalt, különböző alapfelületeken értelmezett koordináták közti átszámítási módszerek pontossága elegendő a térinformatikai alkalmazások számára, de elmarad a felmérési geodézia igényeitől. Még a BW-módszer is, a modern háromszögelési hálózatok és a WGS84 dátum közti átszámításnál fél méter körüli maradék hibával működik egy Magyarország-méretű területen. A felmérési geodézia pontosságigénye ennél sokkal nagyobb, centiméteres nagyságrenddel jellemezhető (belterületeken 3-10 cm, külterületeken pedig néhány deciméter). Emiatt az ezeket kiszolgáló eljárások általában magasabb fokszámú polinomiális illesztést alkalmaznak. Hasonló pontossági szint érhető el akkor, ha olyan, ún. lokális BW-paraméterkészletet használunk, amely csak a kívánt átszámítandó pont körüli közös pontok koordinátáin alapul. A geodéziai gyakorlatban az ilyen lokális transzformáció a leggyakoribb megoldás.

Bár a polinomiális átszámítás elegendően pontos, van egy nagyon komoly hátránya: a legtöbb térinformatikai szoftver ezeket nem támogatja, ezekben nem definiálhatók, paraméterezhetők, így általában nem is tudjuk ezt az eljárást a szokásos térinformatikai környezetben használni.

Egy másik lehetséges megoldás, hogy a BW-paraméterekből készítünk egy földrajzi rácsnálót – valójában a hét paraméternek megfelelő hétsatornás képet – és egy pont átszámításakor az oda eső rácsértékeket használjuk a transzformációhoz. Ezt a módszert sem támogatja a szoftverek egy része, és a paraméterrács létrehozása sem egyszerű feladat. Van azonban egy olyan módszer, amely kellően egyszerű és szinte minden – köztük több szabad felhasználású, pl. a GDAL-on alapuló Quantum GIS – térinformatikai szoftver támogatja: ez a *korrekciós rács*,

amelyet sokszor az angol nyelvű nevéből (*Grid Shift Binary*) képzett szabvány file-kiterjesztés miatt GSB-nek is nevezünk.

Az áthidaló Mologyenszkij- és a BW-transzformációkhoz hasonlóan ez az eljárás különböző dátumokon értelmezett földrajzi (ellipszoidi) koordináták közötti átszámítást végez. A korrekciós rács egy, a szélességi és a hosszúsági irányokban egyenközű hálózati rács, valójában négy külön rács: a két dátumon értelmezett koordináták közt az adott ponton meghatározott keleti és északi irányú eltolásértékeket tartalmazza. Emellett, amennyiben rendelkezésünkre áll, minden rácspontban megadhatjuk a két irányban történő eltolás hibáját, amennyiben ez nem áll rendelkezésre, e mezőket zérussal tölthetjük fel. A rácspontokon az eltolásértékeket olyan kerethálózati pontok koordinátáiból számíthatjuk ki egyszerű különbségképzéssel, amelyek helyzete mindkét dátumon ismert. A keleti és északi (illetve negatív előjelek esetén: nyugati és déli) irányú eltolásértékeket és a hibákat egymástól elkülönítlen kezeljük, így valójában két, a hibaértékekkel együtt pedig négy külön rácsunk van. Az előre beállított felbontású rács pontjain az eltolásértékek az alapponti különbségek interpolációjával állíthatók elő.

```

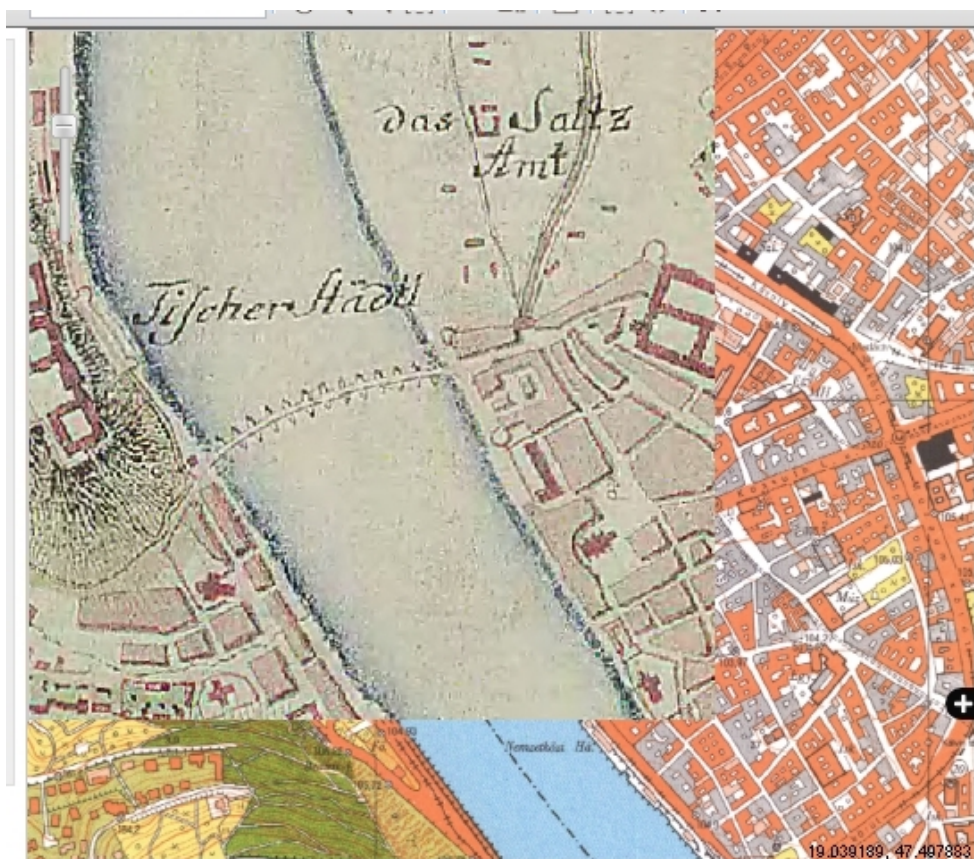
NUM_OREC 11
NUM_SREC 11
NUM_FILE 1
GS_TYPE SECONDS
VERSION NTv2.0
DATUM_F HD72
DATUM_T WGS84
MAJOR_F 6378160.000
MINOR_F 6356774.516
MAJOR_T 6378137.000
MINOR_T 6356752.314
SUB_NAMEOGPSH95
PARENT NONE
CREATED 04-10-10
UPDATED 04-10-10
S_LAT 164520.000000
N_LAT 174960.000000
E_LONG -82800.000000
W_LONG -57600.000000
LAT_INC 180.000000
LONG_INC 180.000000
GS_COUNT 8319
-0.00000000 -0.00000000 -0.001000 -0.001000
-0.00000000 -0.00000000 -0.001000 -0.001000
-0.00000000 -0.00000000 -0.001000 -0.001000

```

19. ábra. A korrekciós rács meta-adatai. Az első tizenegy sor az általános leírás, a következő tíz sor az al-rácsok (itt egyetlen egy) kiterjedését és felbontását adja meg. Ezt követi az adatpontok száma, majd az eltolási- és hiba-adatokat tartalmazó adatsorok.

Ezeket a rácsokat, kiegészítve a kiterjedést, felbontást és más adatokat tartalmazó meta-adatokkal (19. ábra) együtt egy bináris állományba kell szervezni. Az állomány több, akár átfedő, különböző felbontású rácskészletet is tartalmazhat, ekkor a szoftver minden pontban az ott rendelkezésre álló legjobb felbontású készletet fogja alkalmazni. Így készíthetünk olyan átszámítási módszert, amely egységes pontosságot biztosít egy nagyobb régióra, miközben bizonyos fontos, kisebb kiterjedésű területeken (pl. városokban) a pontosság ehhez képest jobb lehet.

Ismét kiemeljük, hogy a korrekciós rács közvetlenül a különböző alapfelületeken értelmezett koordináták közti átszámítást támogatja. Sem az áthidaló Mologyenszkij-, sem a BW-eljárás alkalmazására, paraméterezésére nincs szükség a használatához. A GSB-módszer a modern hálózatok közt – a felhasznált kerethálózat függvényében – akár centiméteres pontosságot biztosít, de a történeti térképek georeferálását is nagyon pontosan elvégzi, ha elegendően sűrű illesztőpont-adatbázis alapján készítettük el (20. ábra).



20. ábra. A korrekciós ráccsal meglepő pontossággal tudunk régi térképeket a maiakhoz illeszteni. Az I. katonai felmérés térképe Pest-Budáról; ne feledjük, hogy a pesti part a mai helyzetétől keletebbre húzódott)

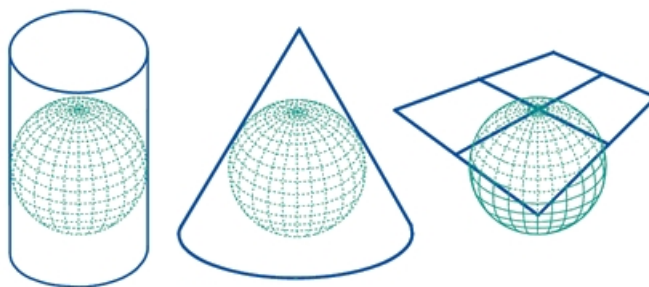
5. fejezet - Térképek és vetületek

A térinformatika számára a térképek fontos adatforrást jelentenek. Sok esetben a térkép szkennelt formában, mint raszteres kép áll rendelkezésre, és az adatokat a képi információk hordozzák. Előfordul, hogy a térkép adatainak egy részét vektoros formában rögzíteni, digitalizálni szeretnénk. Az ilyen információk hasznosításához elengedhetetlen, hogy a térkép kiegészítő információit felhasználva geokódolni tudjuk annak tartalmát. Ebben a fejezetben felsoroljuk e kiegészítő információkat és megadjuk az értelmezésükhöz és kezelésükhöz szükséges ismereteket.

A térképek az alapfelület vetítéssel történő síkbafejtésének eredményei. Így minden térképnek kell hogy legyen alapfelülete, dátuma (4. fejezet), amelynek felszínét valamely vetület egyenleteinek felhasználásával síkba fejtjük. A térinformatikai szoftverek általában ismerik a fontosabb vetületek egyenleteit, így e fejezetben igyekszünk úgy áttekinteni a vetületeket, hogy azok egyenleteinek konkrét felhasználására az Olvasó, ha lehet, ne legyen rászorulva.

5.1 Vetületek és paraméterezésük

A Föld geoid-, illetve közelítőleg ellipszoid alakjának felszínét térképi ábrázolásokhoz síkba kell fejteni. Ez a művelet nem végezhető el torzításmentesen sem a gömb, sem az ellipszoid felszínéről. A síkba fejtés művelete a vetítés. A gömb, illetve az ellipszoid felszínének pontjait hengerpalástra, kúppalástra vagy síkfelületre lehet vetíteni (21. ábra), a henger- és a kúppalást pedig már síkba „teregethető”.



21. ábra. A gömbfelület síkra vetítése: henger-, kúp és síkvetület.

A vetületeket vetületi egyenletek valósítják meg. Ezek az egyenletek írják le a kapott síkkoordináták (vetületi koordináták) és a gömbi vagy ellipszoidi koordináták közötti kapcsolatot. A vetületi egyenletek általános alakja a következő:

$$E=f_1(\varphi, \lambda, p_1, \dots, p_n); \quad (5.1.1)$$

$$N=f_2(\varphi, \lambda, p_1, \dots, p_n). \quad (5.1.2)$$

Ahol E és N a vizsgált pont vetületi síkkordinátái. Az elnevezéssel (E : *Eastings*; N : *Northings*; tehát keleti és északi irányú koordináták) feltételezzük, hogy a vetített koordináta-rendszer tengelyei keleti és északi irányba növekvő értékeket jeleznek, tehát a rendszer északkeleti tájékozású. Ez a legtöbb esetben igaz, a lényeges eltérésekre még visszatérünk. A térkép méretarányának pontos definíciója: az a (általában 1-nél jóval kisebb) szám, amellyel a kapott E és N koordinátákat meg kell szoroznunk ahhoz, hogy a kívánt területet a térkép papírján ábrázolni tudjuk. Az

$$\varphi =g_1(E, N, p_1, \dots, p_n); \quad (5.1.3)$$

$$\lambda =g_2(E, N, p_1, \dots, p_n). \quad (5.1.4)$$

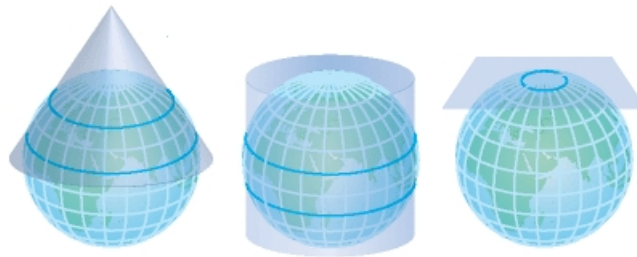
egyenletek a vetület ún. inverz egyenletei. Az f_1 és f_2 , illetve a g_1 és g_2 függvények a vetület típusától függenek, és sokszor igen bonyolult alakúak. A térinformatikai gyakorlatban általában nem szükséges, hogy a vetületek konkrét alakját ismerjük, vagy hogy azokkal számolni tudjunk: az általunk használt térinformatikai szoftver, vagy adott esetben a GPS-vevő szoftvere általában ismeri ezeket, és elegendő, ha mi ezek kezelését ismerjük.

A vetületi egyenletek a gyakorlatban egzaktaknak tekinthetők, ami azt jelenti, hogy a direkt és az inverz egyenletek egymás utáni alkalmazásakor az eredeti koordinátákat milliméternél pontosabban kapjuk vissza.

A p_1, \dots, p_n paraméterek a konkrét vetülettől függenek, és a paraméterek számát a vetület típusa szabja meg. Például a transzverzális szög tartó hengervetületnek öt paramétere van, de a ferdetengelyű szög tartó hengervetületnek hat. Ezeket a paramétereket (általában 5 vagy 6 számot) és a vetület típusát vagy a használt szoftvernek, vagy – ami sokkal megnyugtatóbb – nekünk magunknak, ismerni kell. Lássuk, milyen paraméterek tartoznak a vetületekhez.

Bármilyen vetületre igaz, hogy tartozik hozzá egy ún. vetületi kezdőpont, amelynek ellipszoidi szélessége és hosszúsága két vetületi paraméter. A kezdőpont a sík, a kúp vagy a henger (tehát a képfelület) és az alapfelület érintési pontja. Amennyiben a képfelület az alapfelülethez képest forgás-szimmetrikusan helyezkedik el, akkor a kezdőpont hosszúsága önkényesen választott, de a szabványosított vetületek esetén előre rögzített érték. Amennyiben az érintés egy vonal mentén történik, ezt a vonalat vetületi középvonalnak nevezzük.

További paraméter az ún. méretaránytényező. A vetítés ugyanis nemcsak érintő, hanem metsző helyzetű képfelületre is történhet (ebben az esetben a kezdőponttól, illetve a középvonaltól nagyobb távolságig tart az „elfogadhatóan alacsony torzulás” zónája). A képfelületet (síkot, kúpot, hengert) a méretaránykálátényezővel kicsinyítjük (a kivétel Írország, ahol nagyítás van), redukáljuk (22. ábra). Az érintési, illetve metszési pontokban nem lép fel torzulás.

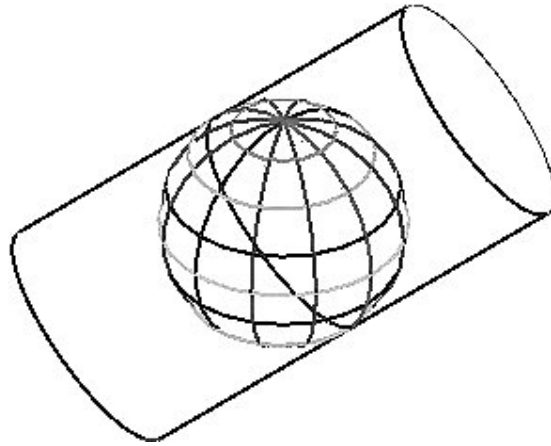


22. ábra. Amennyiben a kúpot, a hengert vagy a síkot metsző helyzetben alkalmazzuk a vetítéskor, a vastagon jelölt metszésvonalakon nem lesz hossztorzulás.

A vetületi kezdőpont tényleges vetületi koordinátái, tehát a keleti és északi irányú eltolás, a „hamis” keleti és északi koordináták (*FE: False Eastings; FN: False Northings*), általában méterben értelmezett paraméterek. Ezek lehetnek zérus értékek is: az ettől való eltérést azért vezetik be, hogy a térképezett területen mindenütt pozitív vetületi koordináták legyenek, és esetleg az északi vagy a keleti koordináták közül az egyik a teljes térképezett területen nagyobb legyen, mint a másik („bolondbiztos” vetületi definíció).

A redukált kúpvetületek esetén a méretaránytényező helyett megadható annak a két paralelkörnek a szélessége, ahol a képfelület és az alapfelület metszi egymást, ezeket standard paralelköröknek nevezzük.

A ferdetengelyű hengervetületek vetületi kezdőpontja lehet a középvonalnak az Egyenlítőtől legtávolabbi pontja (Laborde-vetület) vagy az Egyenlítővel való metszéspontja (Hotine-vetület). A vetület definiálásakor általános értelemben a középvonal bármely pontja lehet a vetületi kezdőpont. Meg kell emiatt adni a középvonalnak a kezdőponton vett áthaladási irányát, azimutját. A középvonal definiálható kép adott pontjával is (23. ábra).



23. ábra. A ferdetengelyű Mercator-vetület (ilyen a magyar EOVI is) érintési vonala ferde főkör; e mentén minimális a hossztorzulás.

A vetületeket leíró szabványok sokszor említik ún. kettős vetítést. Ekkor a vetületi egyenletek két lépésben írhatók fel. Első lépésben az ellipszoidról gömbre vetítünk, majd a gömből a képfelületre. Ennek az az oka, hogy a számítógép előtti időben a közvetlen vetítés elvégzése túl bonyolult számításokat igényelt. Ez ma általában nem jelent gondot, a térinformatikai szoftverek által használt formulák nagyon jó közelítései a kettős vetítésnek, az eltérés a milliméter töredéke. Ha a gömb és az ellipszoid metszéspontjának szélessége (az ún. normálparalelkör) nem esik egybe a vetületi kezdőponttal, akkor a későbbiekben említett közelítő egyenletek módszerét használhatjuk.

A világon használt vetülettípusok száma több tízre tehető, ezek közül azonban csak néhány az, amely a topográfiai térképezésben használatos a világ országaiban. A következő bekezdésekben a három legelterjedtebb változatot: a transzverzális Mercator-vetületet, a Lambert-féle kúpvetületet és a sztereografikus síkvetületet tekintjük át. Előrebocsátjuk, hogy mindhárom tárgyalt vetülettípus szögtartó, azaz egy adott tereptárgytól két másik ponthoz húzott terepi egyenes szöge megegyezik a terepi egyeneseknek megfelelő térképi görbe vonalaknak a tereptárgynál vett érintői által bezárt szöggel.

A transzverzális Mercator-vetület esetén a hengerpalást forgástengelye az Egyenlítő síkjába esik. A vetületi kezdőpont az Egyenlítőn van. Érintő esetben az alapfelület és a képfelület egy meridiánív mentén érinti egymást, ez a vetület középvonala. Ha a méretaránytényező 1 (például a Varsói Szerződés által korábban használt Gauss-Krüger vetület esetén), akkor a henger érintő helyzetű, és a középmeridián mindkét oldalán kb. 180 kilométerre nyúlik az a sáv, amelyen belül a hossztorzulások 1/10000 alatt maradnak. 1-nél kisebb méretaránytényező esetén (például az UTM; *Universal Transverse Mercator*, vetület esetén, ahol 0,9996) a hengerpalást metsző helyzetű, és az alacsony hossztorzulású sáv szélesebb. A kezdőpont vetületi koordinátái közül az északit rendszerint (de nem mindig!) nullának választják, a keletit pedig úgy definiálják, hogy az értelmezett tartományon sehol ne legyen negatív (pl. 500000 méter).

A Lambert-féle szögtartó kúpvetület esetén a kúppalást forgástengelye az alapfelületnek használt ellipszoid kistengelyével esik egybe. A vetületi középvonal a kúp és az ellipszoid metszévonalát jelentő paralelkör (az ún. normálparalel) valamely kijelölt pontja. Ennek vetületi koordinátáit általában úgy választják meg, hogy a térképezett területen mindenütt pozitív koordináták adódjanak. Ezt a vetületet ritkán használják érintő változatban, általában egy 1-nél kisebb méretaránytényezővel redukálják. A vetület definiálható a kezdőponttal és a méretaránytényezővel, vagy a kezdőponttal és a két metsző paralelrel, az ún. standard paralelkörökkel.

A sztereografikus síkvetület (Roussilhe-vetület) esetén az alapfelület valamely pontjához síkot illesztünk, és erre végezzük el a vetítést. A kezdőpont a sík és az ellipszoid érintési pontja. Ha a méretaránytényező 1 (érintő helyzet), akkor a kezdőpont körül kb. 127 kilométer sugarú körön belül marad 1/10000 alatt a hossztorzulás. 1-nél kisebb méretaránytényező (metsző sík) esetén ez a tartomány szélesebb lesz.

A felsorolt három (és az összes többi) vetület esetén tehát van olyan zóna, amelyben a hossztorzulás elfogadhatóan alacsony. A transzverzális Mercator-vetület esetén ez a zóna egy meridián mentén húzódó, észak-déli irányú sáv. A Lambert-féle szögtartó kúpvetület esetén a zóna egy paralel mentén húzódó, kelet-nyugat irányú sáv, míg a sztereografikus síkvetület esetén egy pont körüli, nagyjából kör alakú tartomány.

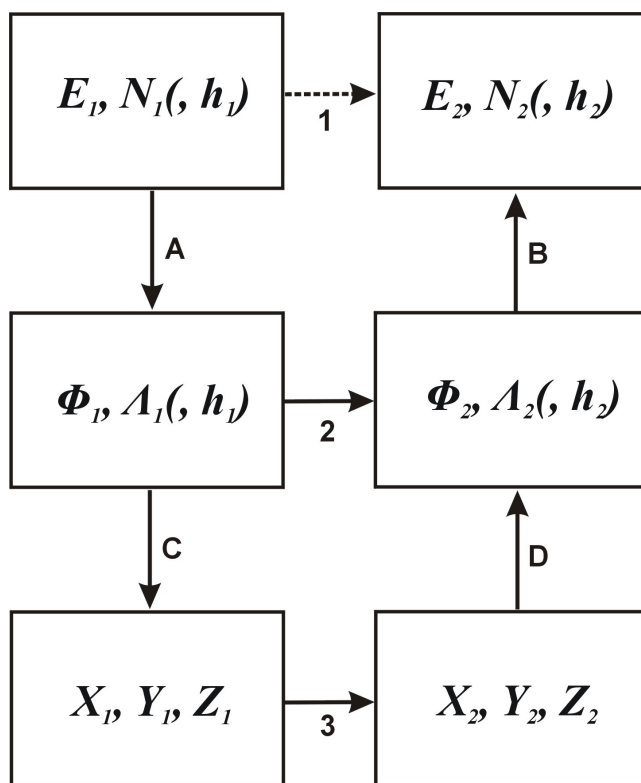
Amennyiben a térképezendő terület túlnyúlik ezen a sávon (pl. nagyobb országok, tartományok, vagy az egész Föld felszíne esetén) akkor több, eltérő kezdőponttal rendelkező vetületet definiálnak az egyes zónák számára. Például Franciaországban 4 darab Lambert-kúpvetület alkotja a 4, kelet-nyugati irányban elnyúló zónát. Németországban 5, Ausztriában 3 darab transzverzális Mercator-vetület alkotja az észak-déli irányú zónákat. Lengyelország 1965-ös zónarendszere 4 darab sztereografikus és egy transzverzális Mercator-vetületből áll. Ezeket a vetület-csoportokat vetületi rendszereknek nevezzük.

Kisebbs országok esetén egy vetület is elegendő. Hollandia esetén elegendő egyetlen sztereografikus síkvetület definiálása. Romániában, bár az ország területe jócskán meghaladja a kis torzulás zónáját, szintén egyetlen sztereografikus vetületet definiáltak. Az országok, vagy a térképezendő tartományok alakja megszabhatja, hogy milyen vetületet érdemes választani annak érdekében, hogy egyetlen, de kellően alacsony torzulású zóna alkalmas legyen a térképezésre. Észak-déli irányban elnyúlt országok (pl. Chile, Portugália) a transzverzális Mercator-vetületet választották, míg kelet-nyugati irányban elnyúlt államok (mint Belgium vagy Észtország) számára a Lambert-vetület az alkalmas. Svájc és Magyarország ezért választott ferdetengelyű hengervetületet (bár a Lambert-vetület is alkalmas lenne egy zónának). A két világháború közötti Csehszlovákia (a mai Csehország és Szlovákia területe mellett Kárpátalja is ide tartozott) csak ferdetengelyű kúpvetület esetén volt egy zónába osztható. Az egyes országokban használt vetületek típusait és paramétereit a Mellékletekben találhatjuk meg.

A vetületi egyenletek felhasználásával készült térképen azok a vonalak, amelyek azokat a pontokat tartalmazzák, amelyek az északi vagy a keleti irányban azonos vetületi koordinátával bírnak (ún. vetületi koordináta-vonalak) egyenesek, és a két irány szerint egymásra merőleges egyenes-sereget alkotnak. A fokhálózati vonalak képe általában valamilyen görbe vonal. Csak bizonyos kitüntetett paralellkörök vagy meridiánok képe egyenes. A hálózati észak (a vetületi koordináta-vonalak északra mutató vége) és a földrajzi észak (a meridiánok képe) közötti szög az ún. meridián-konvergencia, amely általában helyről helyre változik (egyes vetületeknél, pl. a normál elhelyezésű Mercator-vetület esetében, mindenütt nulla). Mindig tartsuk észben, hogy még az olyan kisméretarányú térképek esetében is, amelyeken a vetületi koordináták nem, csak a fokhálózat van feltüntetve, a vetületi koordinátavonalak alkotják a láthatatlan „négyzethálót”.

5.2 Átszámítások különböző vetületi koordináták között

A vetületi koordináták közötti átszámítás elnevezés nemcsak a két vetület paramétereinek – illetve legalábbis a szoftverben, a felhasználó számára láthatatlanul – a vetületi direkt és inverz egyenletek ismeretét igényli, hanem a két vetület alapfelületeinek, a dátumoknak az egymáshoz képest értelmezett helyzetét is ismernünk kell. Ebből a szempontból az a legkönnyebb eset, ha a két vetület ugyanazon a geodéziai dátumon van értelmezve. A legtöbbször azonban nem ez a helyzet.



24. ábra. Átszámítási folyamatára az 1-es indexszel jelölt kiinduló és a 2-essel jelölt célrendszerbeli vetületi koordináták közt. 1: direkt polinomiális transzformáció; 2: áthidaló Mologyenszkij-transzformáció vagy korrekciós rács szerinti eltolás; 3: Bursa-Wolf-transzformáció.

Az átszámítás három lehetséges módját a 24. ábra mutatja be. Természetesen, ha az alapfelület azonos, akkor dátumtranszformációkra nincs szükség. Ha azonban a kiinduló és a céldátum különböző, akkor az ábrán feltüntetett utak valamelyikét kell válasszuk.

A közvetlen átszámítás az azonos pontok különböző vetületi rendszerben értelmezett koordinátái alapján, magasabbrendű polinomok együtthatóinak becslésén alapul. Itt ezzel az eljárással nem foglalkozunk, mert – bár pontossága (illeszkedése) a legjobb az összes lehetséges megoldás közül – mint már említettük, a térinformatikai szoftverek túlnyomó többsége nem támogatja ezt az eljárást.

A második lehetőség az, hogy a kiinduló vetület inverz egyenleteit felhasználva kiszámítjuk a kiinduló dátumon értelmezett ellipszoidi koordinátákat. Ezeket az áthidaló Mologyenszkij-formulák (4.2. pont) segítségével átszámítjuk a céldátumon értelmezett ellipszoidi koordinátákra, majd a cél-vetület egyenleteit használjuk arra, hogy ezekből vetületi koordinátákat kapjunk. Az átszámítás hibáját a dátumtranszformáció, tehát az egyes alapfelületeket megvalósító háromszögelési hálózatok belső torzulása közötti különbség okozza. Ezt az eljárást használja a legtöbb GPS-vevő beépített vetületszámító szoftver is, azzal a megkötéssel, hogy a bemeneti adat itt nem vetületi, hanem WGS84 ellipszoidi koordinátákból áll, így ebben az esetben az első lépés, az inverz vetületi egyenletek alkalmazása elmarad. Ezt az algoritmust alkalmazzák azok a térinformatikai szoftverek is, amelyek csak az egyszerűbb áthidaló Mologyenszkij-féle paraméterezést támogatják, de a bonyolultabb Burša-Wolf-félét nem.

Amennyiben a Burša-Wolf transzformáció paraméterei is a rendelkezésünkre állnak, és a szoftver ismeri ezt az eljárást, úgy a kiinduló dátumon értelmezett geocentrikus koordinátákat is ki kell számítanunk, majd ezeket, a Burša-Wolf transzformációt elvégezve, alakítjuk a céldátumon értelmezett geocentrikus koordinátákká. A célrendszerben érvényes ellipszoidi koordinátákat ezekből az egzakt, de bonyolult algoritmuson alapuló Borkovskivagy a Bowring-féle közelítő formulákkal (5.2.1-5.2.3) kaphatjuk meg. Az átszámítás hibája itt is a dátumtranszformáció hibájából származik. Az igen egyszerű, zárt Bowring-formula alkalmazása további, 1 centiméter körüli hibát okoz.

$$\Phi' = \arctan\left(\frac{Z + e^2 b \sin^3 \theta}{p - e^2 a \cos^3 \theta}\right) \quad (5.2.1)$$

$$\Lambda = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) \quad (5.2.2)$$

$$h' = \frac{P}{\cos \Phi} - N(\Phi) \quad (5.2.3)$$

ahol $p = \sqrt{X^2 + Y^2}$, $\theta = \arctan \frac{Za}{pb}$, $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$, a és b az ellipszoid fél nagy- és kistengelye.

A gyakorlatban a legritkább esetben szorulunk arra, hogy ezeket az átszámításokat mi magunk végezzük el. A szoftverek beépített vetületkonverziós moduljai elvégzik helyettünk ezt a munkát, ugyanakkor a használatukkor tisztában kell lennünk azzal, hogy mi is történik „a doboz belsejében”.

5.3 Helyettesítő vetületek

A térinformatikai gyakorlatban előfordul, hogy az általunk használt szoftver nem ismeri a használni kívánt vetület típusát, és az sem ritka, hogy olyan adatot, térképet kell geokódolnunk, amelynek vetülete nem ismert. Ebben a pontban az ilyenkor követendő eljárást tekintjük át.

A szoftverekbe a kevésbé elterjedt, illetve kis piaci szegmenst jelentő országok vetületeit nem minden esetben építik be. A magyarországi EOVS (Egységes Országos Vetület) speciális kettős vetítést tartalmazó rendszerének, vagy a korábbi Csehszlovákia által használt Krovák-féle ferdetengelyű kúpvetületnek a vetületi egyenletei sokszor nincsenek beprogramozva. Az egyszerű felhasználó nem tudja a fejlesztői csomagok felhasználásával maga programozni és a szoftverhez illeszteni ezeket. Azt viszont megteheti, hogy kiválaszt egy másik, a szoftver által használt vetületípust, és annak paramétereit (5.1. pont) úgy választja meg, hogy az így definiált helyettesítő vetület és a valódi rendszer között a vizsgált területen a legkisebb legyen az eltérés. Az alábbiakban az említett két vetületi rendszer közelítésére mutatunk be esettanulmányokat.

A) Az EOVS (Egységes Országos Vetület) helyettesítése Laborde- vagy Hotine-típusú ferdetengelyű szögtartó hengervetülettel

Az EOVS szabványa szerint kettős vetítést tartalmaz: első lépésben az IUGG67 (GRS67) ellipszoidról az új magyarországi Gauss-gömbre, majd második lépésben a ferde elhelyezésű hengerpalástra vetítünk. Az ellipszoidról a gömbre vetítés érintő paralelköre (normálpáralel) nem esik egybe a gömbről a hengerre történő vetítés vetületi kezdőpontjával. A térinformatikai szoftverekben a Laborde- és a Hotine-vetületek (van, ahol utóbbit RSO; *Rectified Skew Ortomorphic*; néven használják) gyakorlatilag az olyan kettős vetítésnek felelnek meg, ahol a normálpáralel és a vetületi kezdőpont szélessége azonos. Az EOVS speciális esete nincs beépítve a szoftverekbe, így az nem is paraméterezhető a szabványnak megfelelően.

Ha tehát az EOVS-t be akarjuk építeni a programcsomagokba, akkor közelítő vetületet kell találnunk. A vizsgálatok azt mutatják, hogy a kettős vetítéssel származtatott vetület több nagyságrenddel érzékenyebb a kezdőpont megváltoztatására, mint a Gauss-gömb helyzetének módosítására. Emiatt a gömb és az ellipszoid érintési pontját megváltoztatjuk úgy, hogy az egybeessen a vetületi kezdőponttal. Az így definiált helyettesítő vetület az ország területén mindenütt 0,2 milliméter alatti hibával közelíti az EOVS-koordinátákat. Ez nemcsak a térinformatika, hanem a szélső pontosságú geodéziai alkalmazások igényeit is kielégíti.

A Laborde-vetület paraméterezése az EOVS-szabvány szerint egyszerűen megtehető: a vetületi kezdőpont ellipszoidi és vetületi koordinátái és a méretaránytényező mellett a középvonalnak a kezdőponton áthaladásakor fellépő 90 fokos azimutot kell megadni. A Hotine-vetület paraméterezése csak annyiban tér el ettől, hogy a kezdőpont keleti irányú vetületi koordinátájából (*False Eastings*) ki kell vonni a kezdőpontnak és az Egyenlítőnek a középvonal mentén mért távolságát.

B) Az EOVS helyettesítése Lambert-féle szögtartó hengervetülettel

A Laborde- és a Hotine-féle vetületek azonban nem különösebben elterjedtek, ezért több térinformatikai szoftverben nem, vagy helytelenül építették be az egyenleteiket. A Lambert-féle szögtartó kúpvetület azonban eléggé elterjedt, ezért érdemes ennek paraméterezésével is közelítő vetületet keresni. Busics György vetette fel azt a gondolatot, hogy mivel a Lambert-kúpvetület középvonala normálpáralelkörön marad, míg a ferdetengelyű hengervetület esetén a kezdőpontban ahhoz simul és az ország területén attól csak néhány méterre tér el, ez a helyettesítés használható. A gyakorlatban az EOVS ismert paramétereit a normálpáralelkörrel és méretaránytényezővel definiált Lambert-féle szögtartó kúpvetület paramétereiként is meg lehet adni. A közelítés maximális hibája az ország területén 2 méter alatt marad, tehát a térinformatikai pontosságigény teljesül.

1. C) Az EOVS helyettesítése kis területen transzverzális Mercator vetülettel

Egyes GPS-vevők (pl. a Garmin-típusok) kizárólag a transzverzális Mercator-vetület paraméterezését teszik lehetővé a felhasználó számára, hogy a műszer által nem ismert, saját vetületet (*User Grid*) definiáljon. Takács Bence bemutatta, hogy - bár az eredeti és a közelítő vetület középvonala gyakorlatilag merőleges - egy 15-20 kilométer sugarú tartományban a speciálisan ahhoz a helyhez definiált paraméterkészlettel a térinformatikai pontosság elérhető. Az eljárás ebben az esetben a következő:

- megmérjük a GPS-szel a tartomány egy olyan központi pontjának a hosszúságát, amelynek ismerjük az EOVS-koordinátáit (E_{EOV} ; N_{EOV});
- definiálunk egy transzverzális Mercator-vetületet, amelynek kezdőpontja az Egyenlítő és az előző pontban megmért hosszúsági kör metszéspontja, méretaránytényezője az EOVS esetén ismert 0,99993;
- leolvassuk a mért pont koordinátáit ebben a vetületben (E_{TM} ; N_{TM});
- az imént definiált transzverzális Mercator-vetület kezdőpontjának vetületi koordinátáiként (FE : *False Eastings*; FN : *False Northings*) a

$$FE = E_{EOV} - E_{TM};$$

$$FN = N_{EOV} - N_{TM} \text{ értékeket állítjuk be.}$$

D) A budapesti sztereografikus vetület helyettesítése Roussilhe-féle vetülettel

A budapesti sztereografikus vetület esetén a közelítés problémája az A) pontban említett kettős vetítésből adódik: a normálpáralel és a kezdőpont szélessége itt is eltérő, és az eltérés lényegesen nagyobb az EOVS esetén definiálnál. Az eljárás itt is ugyanaz: a paraméterezésnél figyelmen kívül hagyjuk az ellipszoidról a gömbre vetítés normálpáraleljét, és csak a vetületi kezdőpont koordinátáit adjuk meg. A nagyobb szélességkülönbség miatt a hiba is nagyobb, de az ország területén sehol nem haladja meg a 2 centimétert.

E) A cseh-szlovák Krovák-vetület helyettesítése Lambert-féle szögtartó hengervetülettel

A Krovák vetület ferdetengelyű szögtartó hengervetület, amelyet kizárólag a volt Csehszlovákiában és utódállamaiban használtak ill. használnak. A térinformatikai rendszerek túlnyomó része nem ismeri e a típus egyenleteit (és ha mégis, akkor éppen azért ismeri, mert ezt a vetületet beépítették). A vetületi középvonal Kárpátalja délkeleti sarkán kelet-nyugati irányú, ettől nyugat felé távolodva egyre inkább észak felé kanyarodik. Ilyen középvonalat más vetülettel nem lehet definiálni, ezért a közelítés csak érdemi hibával lehetséges.

A Lambert-féle szögtartó kúpvetület paraméterezésével közelítő vetületeket definiálhatunk külön-külön Szlovákia és Csehország területére (más-más paraméterkészlettel). Mivel Szlovákia területén a középvonal kevésbé tér el a Lambert-vetület esetén elvárt kelet-nyugati iránytól, a hiba itt kisebb lesz: átlagosan 6 méter, maximum pedíg 12 méter, ami az 1:25000 méretarányú térképek vagy a Landsat ETM űrfelvételek (15 méteres pixelméret) esetén még elfogadható, pontosabb alkalmazásokban nem.

A csehországi közelítés átlagos hibája 40 méter, maximum 82 méter. 1:100000 méretarányú térképek, az SRTM domborzati modell (90 méteres pixelméret) vagy MODIS-űrfelvételek (250 méteres képpontok) a közelítés elfogadható.

Végezetül: amennyiben a geokódolandó térkép vetületéről nincs semmilyen metaadatunk vagy irodalmi információnk, akkor a fókálózathoz jól illeszkedő vetülettípust kell választanunk, és azt paramétereznünk. Ezt az eljárást a 6.2. pont ismerteti részletesebben.

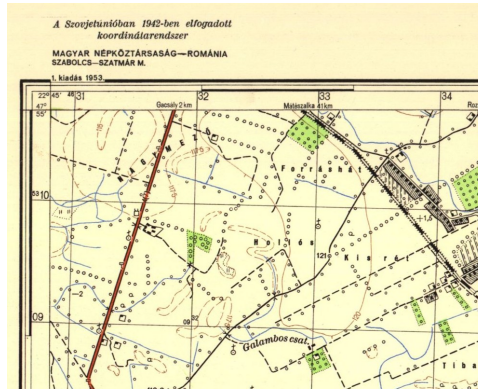
5.4 A térképek szelvényezése és a szelvényezés által hordozott georeferencia

A nagyobb területet, pl. egy országot vagy az egész Föld felszínét ábrázoló, általában nagy vagy közepes méretarányú térképművek külön lapokból, szelvényekből állnak, amelyek a teljes célterületnek csak egy kisebb részét ábrázolják. Ekkor az egyes szelvények számozása is segít bennünket abban, hogy az egyes szelvények egymáshoz képest tett helyzetét megállapítsuk anélkül, hogy a vetületi koordináta-vonalakat vagy földrajzi fókálózatot kellene figyelniük. Olyan térképsorozatok is vannak, amelyek semmilyen koordinátát nem tartalmaznak, azonban a szelvények széleinek, és még inkább azok sarokpontjainak a szelvényezés ismeretében kiszámíthatjuk a koordinátáit.

A térképszelvények határait vagy vetületi koordináta-vonalak, vagy fókálózati vonalak jelentik. Előbbi esetben a térképszelvény térképi része téglalap vagy négyzet alakú, a második esetben pedig az alak foktrapéz. A szelvényezés egyértelműen megszabja a határoló vonalakat és a sarkok koordinátáit a vetületi, illetve a második esetben az ellipszoidi koordináták szerint.

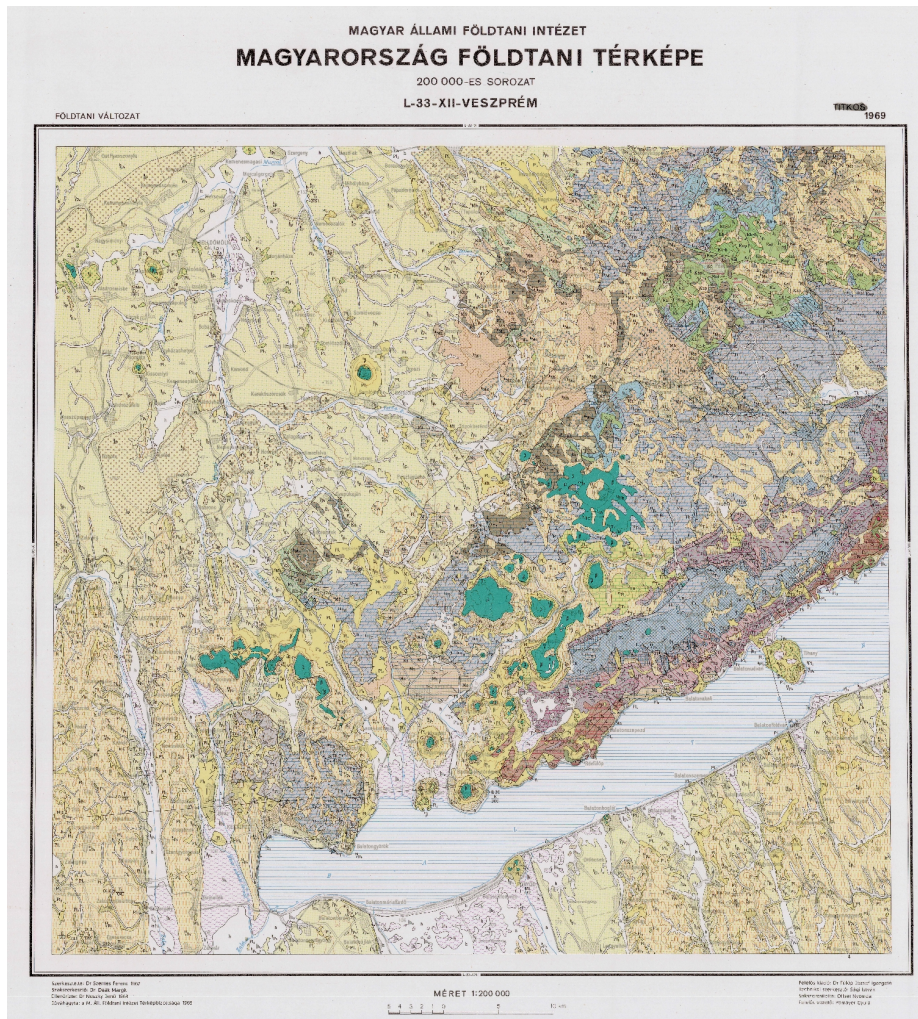


25. ábra. Az EOV-térképszelvényen nincsenek földrajzi koordináták feltüntetve; a térképszelvények határa a vetületi koordináta- vonalakat követi.



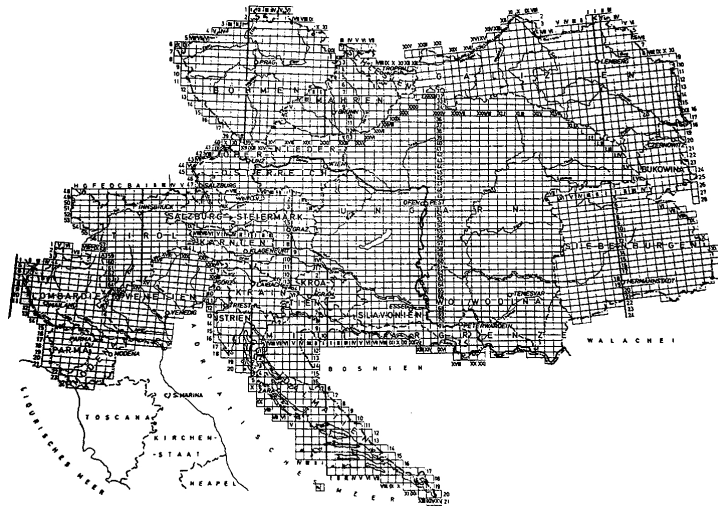
26. ábra. A Gauss-Krüger térképek szelvényhatárai a szélességi és hosszúsági köröket követik.

Magyarországon az EOV-térképek szelvényhatárát az EOV-hálózat vonalai adják (földrajzi fokhálózat nincs is ezeken feltüntetve; 25. ábra). A Gauss-Krüger, illetve a régebbi sztereografikus vetületben készült szelvények határolóvonalai paralelkörök és meridiánívek (26. ábra). Ha nem topográfiai térképünk, hanem abból származtatott, vagy azt munkatérképnek felhasználó szkennelt adatbázisunk van, amelynek szelvényezése és szelvényezés számozása valamelyik topográfiai térképművel megegyező, akkor a sarokponti koordinátákat akkor is ki tudjuk számítani, ha a térképen egyébként semmilyen koordináta nincs megadva (27. ábra).

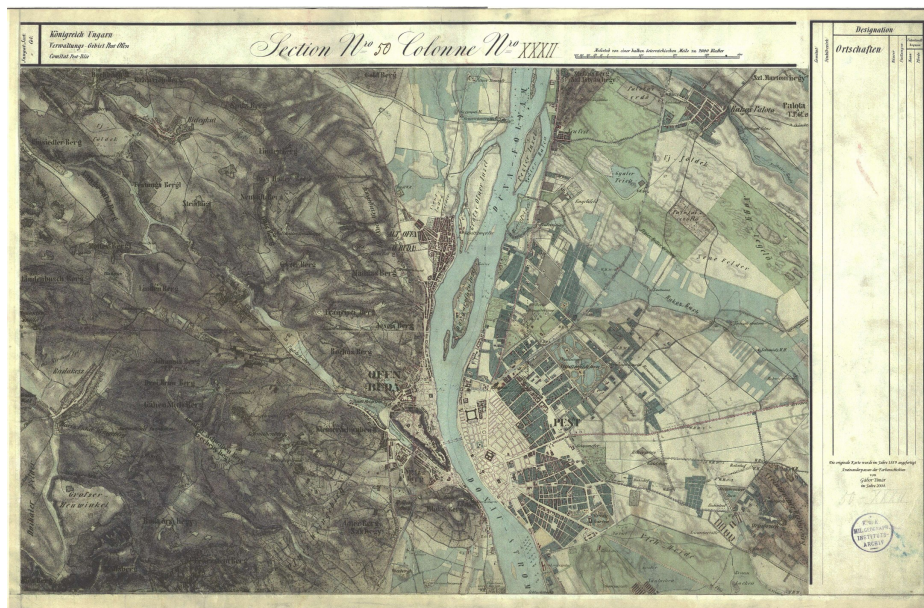


27. ábra. Amennyiben semmilyen koordinátamegírást nem találunk a térképen, a szelvényezés (itt: L-34-XII) és a szelvényezés segítségével megadhatjuk a sarokponti koordinátákat.

Ugyanez a helyzet a Habsburg birodalom II. katonai felmérésének 1:28800 méretarányú felmérési szelvényeivel is (28. ábra). A térképeken nem találunk sem vetületi sem földrajzi koordináta-hálózatot (29. ábra), azonban a térképmű feltételezett vetületi rendszerében a szelvénytérkép megértelműen meghatározza a sarokpontok koordinátáit a vetületi kezdőponthoz képest, így a szelvények első közelítésben terepi illesztőpontok nélkül is geokódolhatóak.



28. ábra. A Habsburg-féle második katonai felmérés szelvényhálózata.



29. ábra. A második katonai felmérés szelvényein sem találunk koordináta-megírást: a georeferenciát itt is a szelvénytérkép (Section 50 Colonne XXXII) hordozza.

6. fejezet - Térképek georeferálása

A térképek és térképi adatbázisok geokódolása azt jelenti, hogy a szkennelt raszteres képformátumú állomány képpontjait georeferenciával látjuk el. Kezdeti állapotban a szkennelt raszteres kép képpontjainak csak a kép síkkoordináta-rendszerében érvényes pixel-koordinátái vannak. Ebben a koordináta-rendszerben (amely az egyes térinformatikai rendszerekben eltérő lehet) például a kép bal felső sarka kapja a (0,0) koordinátákat, és minden képpont 1-1 növekményt jelent a koordinátákban.

A geokódolás során illesztőpontokat (GCP; *Ground Control Point*) választunk, amelyeknek megadjuk mind a pixelkoordinátáit (a kép előbb említett koordináta-rendszerében), mind pedig a térképi koordinátáit (a térkép vetületének koordináta-rendszerében). A georeferálás azt jelenti, hogy a képelemekhez koordinátákat rendelünk és pontosan meghatározzuk, hogy azok milyen földrajzi vagy vetületi koordináta-rendszerben értelmezettek.

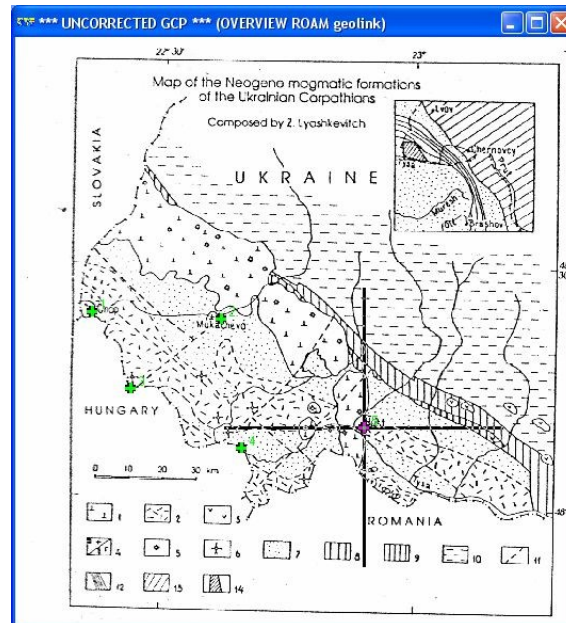
6.1 A geokódolás és a rektifikáció

Az illesztőpontok megadása során többféle eljárást választhatunk. Mindezekben közös, hogy elsőként meg kell határozni azt, hogy a képkoordinátákhoz milyen vetületben és milyen dátumon értelmezett koordinátákat rendelünk hozzá az illesztőpontokban. Már most meg kell jegyezzük, hogy lehetőség szerint azt a vetületet és dátumot válasszuk, amelyben a térkép készült, és ne azt, amelyben a végeredményt kell kapjuk. Azt is el kell dönteni, hogy az alkalmazott számítógépes program milyen eljárással illessze a vetületi koordináta-rendszert az illesztőpontokra. A felkínált eljárások leggyakrabban a polinomiális illesztést használják, ennek válfajai:

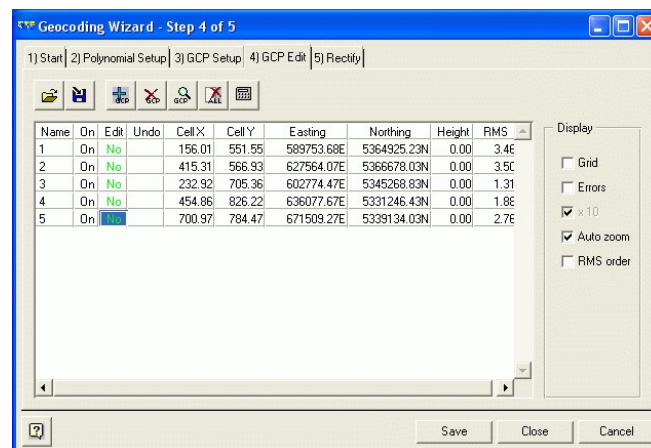
- lineáris;
- kvadratikus;
- köbös.

A *lineáris illesztés* esetén illesztőpontjainkra egy egyenközű, de elforgatott négyzethálót illeszt a program. A *kvadratikus* és a *köbös* változat másod- illetve harmadrendű polinomillesztést használ. Ez utóbbi esetekben a konkrét illesztőpontokhoz történő maximális illeszkedés könnyebben elérhető, ugyanakkor az illesztőpontok között fellépő hibák is nagyobbak, továbbá az eljárás lényegesen több illesztőpont definiálását követeli meg. Ha csak lehet, a lineáris eljárást válasszuk.

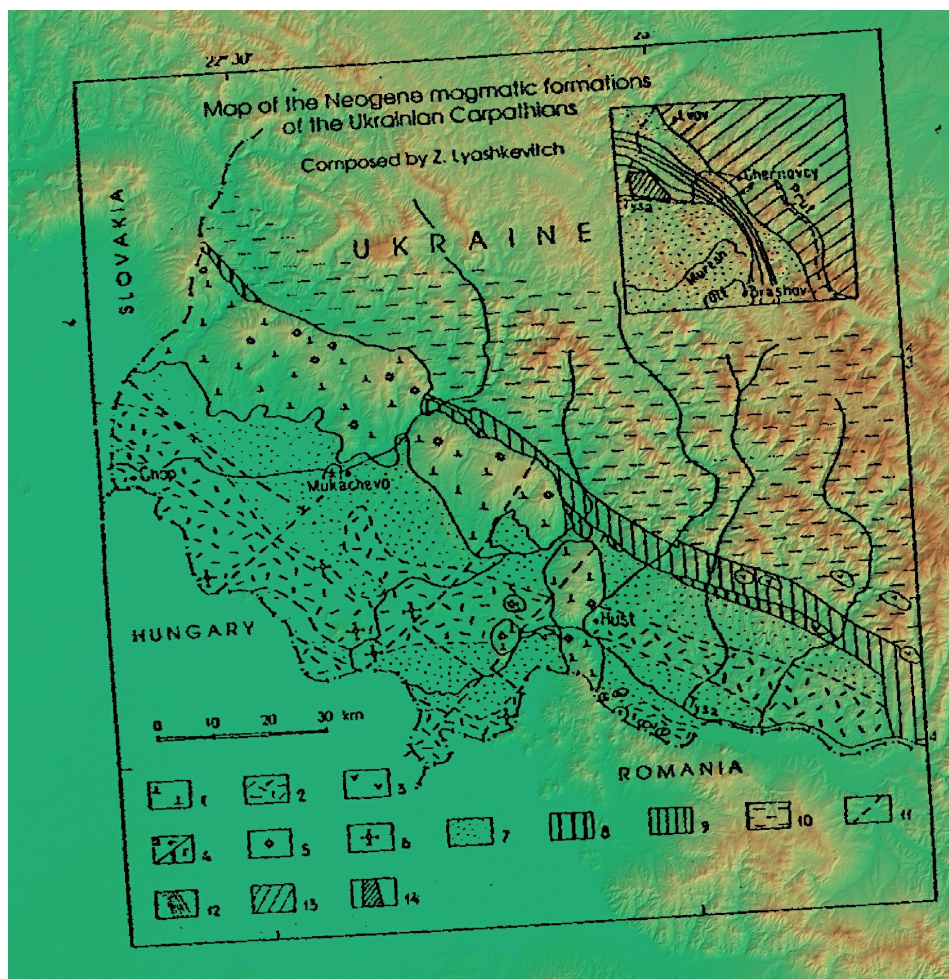
A polinomiális illesztési módszer mellett a háromszögeléses illesztés is általában választható lehetőség. Ekkor az illesztőpontok helye fix, nulla hibával, az eljárás a képet az illesztőpontok között háromszögekre osztja, és minden egyes háromszög tartalmát külön-külön függvények segítségével illeszti.



30. ábra. Illesztőpontok kiválasztása koordináta-megírás nélküli térképen. Itt ismert koordinátájú városokat jelölünk ki.



31. ábra. A kiválasztott illesztőpontok képi és vetületi koordinátái. Amennyiben a hiba néhány pixel körüli, az illesztés elfogadható.



32. ábra. Az illesztés eredménye: egy geológiai szakcikk ábrája domborzati modellen.

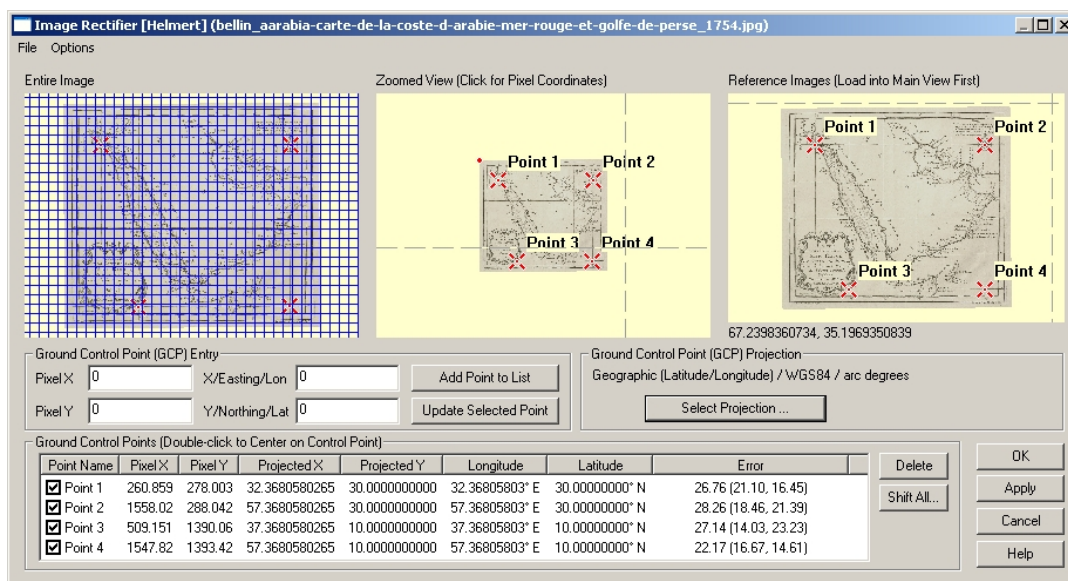
Az illesztőpontok definiálására leginkább elterjedt, ugyanakkor a legnagyobb hibalehetőséget magában rejtő módszer az, ha a szkennelt térképen egyes tereptárgyakat felismerünk, és más adatbázisokból megszerezzük és megadjuk azok koordinátáit (30., 31. és 32. ábrák). Miért hordoz magában ez a módszer nagy hibalehetőséget? Azért, mert a térképeken, különösen a régebbieken, az egyes tereptárgyak helye sokkal kevésbé pontosan meghatározott, mind a térkép „vázát” alkotó geodéziai alappontoké, és a térképi generalizáció következtében a tárgyak helyét sokszor csak 1-2 milliméteres térképi hibával határozhatjuk meg. Ezen túlmenően a módszer szinte csábít arra, hogy figyelmen kívül hagyjuk a térkép vetületét, amely, különösen kis és közepes méretarányú állományok esetén érdemi hibaforrás.

Ha a térképen adottak a vetületi koordináta-vonalak, és tudjuk az ezekhez tartozó koordináta-értékeket is, akkor a vonalak metszéspontjai (adott esetben az örkeresztek) szinte kínálják magukat illesztőpontoknak.

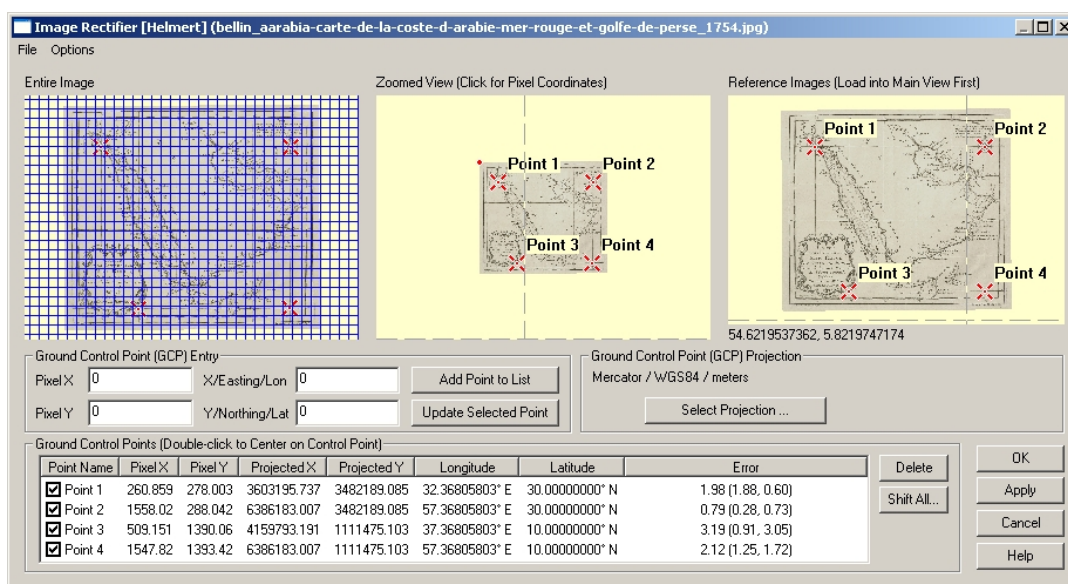
Ha ilyenek nincsenek, de a térképen megtaláljuk a földrajzi fókálózat vonalait, akkor azok metszéspontjai (kerek szélességi és hosszúsági koordinátájú pontjai) szintén alkalmasak illesztőpontnak. Amit nagyon meg kell jegyezzünk: ezekből az ellipszoidi koordinátákból ki kell számítanunk a vetületi koordinátákat (amennyiben erre a térinformatikai szoftverünk nem képes, akkor ez szinte az egyetlen olyan alkalmazás, ahol képeseknek kell lennünk a vetületi egyenletekkel ezek kiszámítására), és azokat megadni az illesztőpontokban. A földrajzi koordinátákat ilyen célra csak nagy torzulási hibát elkövetve használhatjuk!

Ha semmilyen koordinátát nem tartalmaz a térkép, de a szelvényezés adataiból kiszámíthatók a sarokpontok koordinátái (az EOVS bevezetését megelőzően készült magyarországi geológiai vagy erdészeti térképek sok esetben ilyenek), akkor a négy sarok vetületi koordinátáit kiszámítva azokat is használhatjuk illesztőpontnak.

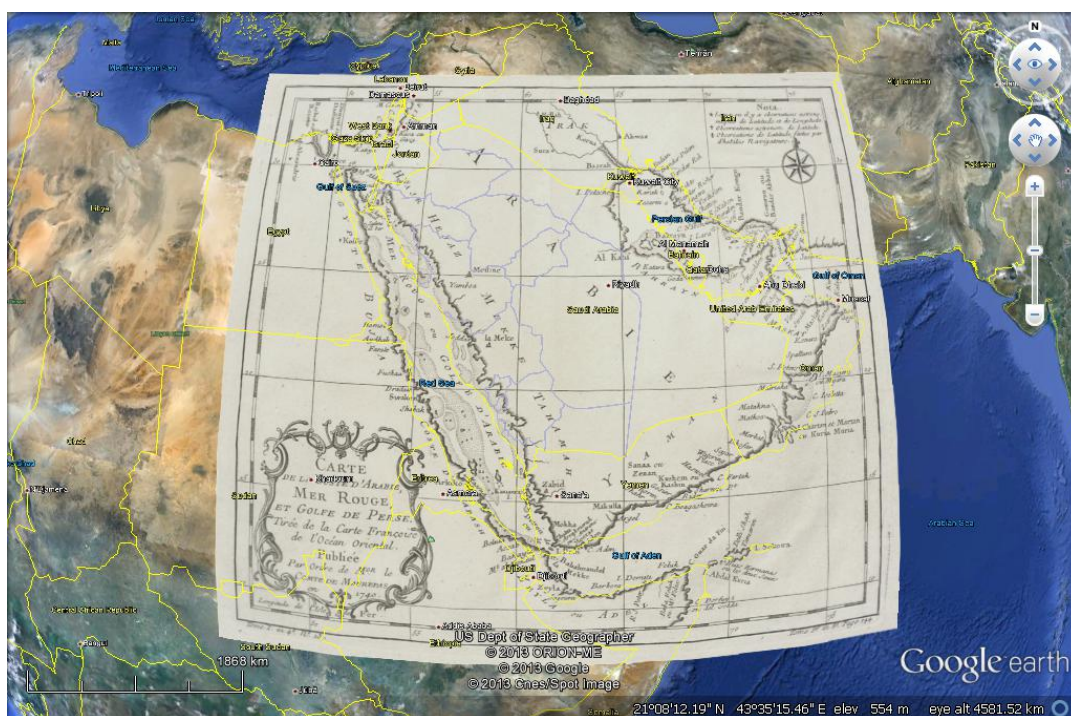
Ha még ez sem áll fenn, akkor nincs más választásunk, mint az elsőként említett, a tereptárgyak koordinátáin alapuló eljárás követése.



33. ábra. Amennyiben a térképünk koordinátavonalakat tartalmaz, azok metszéspontjai a legjobb illesztőpontok (itt: a ferói kezdőmeridián miatt a hosszúságok nem kerek értékek). A hibák túl magasak a földrajzi koordináták megadásakor.



34. ábra. Illesztőpontjaink koordinátáit át kell váltanunk vetületi (itt: Mercator) koordinátákra, ezáltal a hibák elfogadható értékekre csökkennek.



35. ábra. Az illesztés eredménye: Bellin 1754-es Arábia-térképe (David Rumsey Map Collection) a Google Earth fedvényeként. A hibák a korabeli felmérés pontosságára utalnak.

Ahogy az illesztőpontokat kijelöltük, a szoftver megadja, hogy az egyes pontoknak az összes (bekapcsolt) illesztőpontra illesztett koordináta-rendszerben mekkora a maradék hibája (33., 34. és 35. ábrák). Kiugróan magas pontbeli hiba esetén vizsgáljuk meg, nem írtunk-e be hibás koordinátát, vagy nem azonosítottuk-e el valamelyik pontot. Arra is figyeljünk, hogy az illesztőpontok ne essenek közel egy vonalba, hanem valós síkbeli szóródást mutassanak.

Ha legalább 5-6 (bilinéaris és affin esetben legalább 8-10), a teljes állományon jól elosztott illesztőpontot definiáltunk, és azok hibája megfelelően alacsony (pl. max. 2 pixel), akkor a következő lépés a **rektifikáció**. Ennek során a számítógép elhelyezi az illesztett koordináta-rendszert a raszteres állományra, és az általunk megadott rácsmérettel az eredeti állományt újramintavételezi. Ennek eredménye egy olyan állomány lesz, amelynek képsorai és képoszlopai a választott koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamosak, a pixelek mérete pedig megfelel az általunk megadott rácsméretnek.

Szintén a felhasználó adhatja meg az újramintavételezés algoritmusát. Ennek leggyakoribb lehetséges módszerei:

- legközelebbi szomszéd (NN: *Nearest Neighbour*);
- bilinéaris;
- konvolúciós.

Az NN-módszer azt jelenti, hogy az újramintavételezett kép minden pixele azt az értéket veszi fel, amely a középpontjához legközelebb eső, eredeti pixel értéke. Ez a leggyorsabb eljárás a három közül. Az eljárás garantálja, hogy az újramintavételezett kép pixelei csak olyan értékeket vehetnek fel, amelyek az eredeti képen is megvannak. Így amennyiben az egyes pixelértékek *kategóriákat* (egy osztályozott úrfelvételen például felszíntípusokat) jelentenek, mindenképpen ezt a módszert érdemes választani.

A bilinéaris algoritmus ebben az esetben azt jelenti, hogy az eredeti képek pixelértékei között lineáris interpolációval adja meg az értékeket, és ezeket rendeli hozzá az újramintavételezett kép pixeleihez. Ez a módszer különösen akkor hasznos, ha az eredeti képhez képest lényegesen finomabb felbontást akarunk használni.

A konvolúciós eljárás lényege az, hogy az újramintavételezett kép pixelrács-hálóját az eredeti képre helyezi, és az eredménypixelek értékét az eredeti pixelértékeknek a területtel súlyozott átlagaként határozza meg. Amennyiben

az eredeti kép pixelértékei valamilyen folyamatosan változó, mért értékeket jelentenek (pl. úrfelvételek csatornáin mért radianciát), akkor az eljárás az NN-nél finomabb átmintavételezést jelent az eredeti pixelek méretével nagyjából megegyező, vagy azt meghaladó rácsháló esetében.

A szoftver – általában a saját formátumában – tárolja is az újramintavételezett állománynak a definiált koordináta-rendszerben érvényes helyzetét. Léteznek több szoftver által ismert, a koordináta-rendszerben érvényes helyzetet leíró kvázi szabványok. Ilyen pl. az ún. „*World File*”, amelyet egyaránt alkalmaznak TIFF, JPEG típusú képfile-ok vagy akár MrSID-formátumú tömörített állományok leírására is, és amelyek rendkívül egyszerű szerkezete a következő:

A file 6 adatot tartalmaz, amelyek a következők:

- 1 pixel jobbra lépéskor az *Eastings* növekménye;
- 1 pixel lefelé lépéskor az *Eastings* növekménye;
- 1 pixel jobbra lépéskor a *Northings* növekménye;
- 1 pixel lefelé lépéskor a *Northings* növekménye;
- A bal felső sarok *Eastings* koordinátája;
- A bal felső sarok *Northings* koordinátája.

A file kiterjesztésére vonatkozóan nincs kötött szabály (bár a TWF, JWF és SWF az elterjedt változatok a TIFF, JPG és MrSID képekhez tartozó *World File*-ok esetén, de pl. a JPG mellett a JGW változat is előfordul). A *World File* nem tartalmazza a vetület/dátum kódját, azt magunknak kell kezelniük. Figyeljük meg, hogy az első négy adattal a koordinátásk elforgatása is kezelhető.

A rektifikált (újramintavételezett) állományról a szoftver rögzíti, vagy számára meg kell adjuk, hogy annak koordináta-rendszere milyen vetületben/dátumban értelmezett. Ennek alapján a szoftverek képesek azt egy másik vetületbe/dátumra átszámítani, természetesen csak akkor, ha mind a kiinduló, mind pedig a cél vetület/dátum paraméterei (4. és 5. fejezet) adottak.

Példa: a fentiek ismeretében tehát, ha egy szkennelt Gauss-Krüger 34. zónabeli vetületű (Pulkovo dátumú) térképre EOVS vetületben (HD72 dátumon) van szükségünk, akkor a következő lépéseket kell megtegyük:

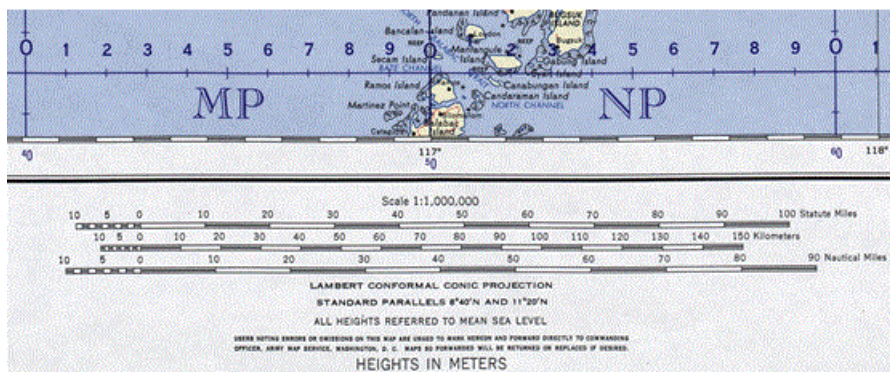
- a) definiáljuk, hogy az illesztőpontok a Gauss-Krüger 34. zóna vetületében, Pulkovo dátumon lesznek megadva, pl. lineáris illesztési móddal;
- b) megadjuk az illesztőpontok képi és Gauss-Krüger-koordinátáit;
- c) rektifikáljuk (átmintavételezzük) a képet a Gauss-Krüger koordináta-rendszerbe;
- d) átranzformáljuk az átmintavett képet az EOVS-rendszerbe.

Ismét felhívjuk a figyelmet arra, hogy nem helyes, és illesztési hibát okoz az, ha a Gauss-Krüger-vetületű térképen eleve EOVS-illesztőpontokat jelölünk ki. Ennek az az oka, hogy a Gauss-Krüger-térképen az EOVS-koordinátavonalak képe nem egyenes, hanem valamilyen görbe vonal. Kis, néhány kilométer kiterjedésű területeken ez nem okoz észrevehető hibát, azonban több pl. száz kilométer távolságon a görbe vonalakban jelentkező húrmagasság több tíz méter is lehet, amely semmilyen módon nem korrigálható. A fent ismertetett a)-d) pontok alkalmazásával ezt a hibát elkerülhetjük.

6.2 A vetületi analízis és az önkényes vetületválasztás

Gyakran előforduló eset, hogy a geokódolandó térkép vagy más raszteres állomány valódi vetületét nem ismerjük. Geokódolásra azonban ebben az esetben is szükség van. Ehhez viszont meg kell tudnunk (vagy, ha ez nem lehetséges, meg kell becsülnünk) az állomány vetülettípusát és paramétereit, illetve szükség esetén a geodéziai dátumát is.

Mielőtt a térkép vagy az adatrendszer vetületét/dátumát ismeretlennek deklaráljuk, próbáljuk irodalmi vagy térképészeti adatok alapján kinyomozni azt. Keressünk a vetületre utaló adatokat a térkép szöveges részében (36. ábra). Előfordul, hogy a vetülettípust megadják, de a paramétereket nem. Olyan esettel is találkozhatunk, hogy utalnak a nemzeti vetületre/dátumra, de nem ismertetik annak definícióját – ekkor irodalmi kutatás vagy internetes böngészés is segíthet. Topográfiai térképek a legritkább esetben készülnek „kitalálhatatlan” vetülettel (bár a hazai turistatérképek azért szép feladatot jelentenek az elemző számára). Az adott ország nemzeti vetületi rendszere és a kapcsolódó dátum akkor is jó kiindulópont, ha ez a térképen nincs feltüntetve. Ha egy országban több vetületi rendszert is használtak az adott időszakban, akkor mindegyiket érdemes megvizsgálni. A szelvényezés számadatai is segíthetnek a pontos vetület kiválasztásában.



36. ábra. Sok amerikai topográfiai térképen nemcsak a vetület típusát (itt: Lambert-féle szögtartó kúpvetület) adják meg, de a vetületi paramétereket (itt: a sztenderd vagy metsző paralelköröket) is.

Hazánkban egy-egy térkép vagy adatrendszer lehetséges vetületei általában: EO/V, katonai Gauss-Krüger vagy budapesti sztereografikus vetület. Az EO/V-vetületet 1975-ben vezették be, ezt megelőzően tehát nem készült ilyen térkép. A Gauss-Krüger vetületben készült topográfiai alapot az 1960-as évektől kezdve polgári célokra is felhasználták, maga a koordináta-rendszer azonban titkos volt, így ezeken a térképeken vagy nincs koordináta-megírás (a szelvények sarokponti koordinátái viszont számíthatók), vagy a sztereografikus koordináták vannak feltüntetve. Ha a szelvényszám „L/M-33/34”-gyel kezdődik (az osztásjel itt vagylagosságot jelent) akkor a térkép Gauss-Krüger vetületű. Az 1:75000 méretarányú sztereografikus térképek szelvény száma négyjegyű, az 1:25000-eseké egy kötőjel utáni, 1-4 közötti számjeggyel egészül ki, és a földrajzi hosszúságok sok esetben ferő kezdőmeridiánnal vannak jelölve. A hazai turistatérképek is legtöbbször a Gauss-Krüger topográfiai alap bázisán készültek, azonban a térképek úgy vannak elforgatva, hogy a négyzetháló (amely semmilyen vetületnek nem felel meg) északi iránya a mágneses észak felé mutasson.

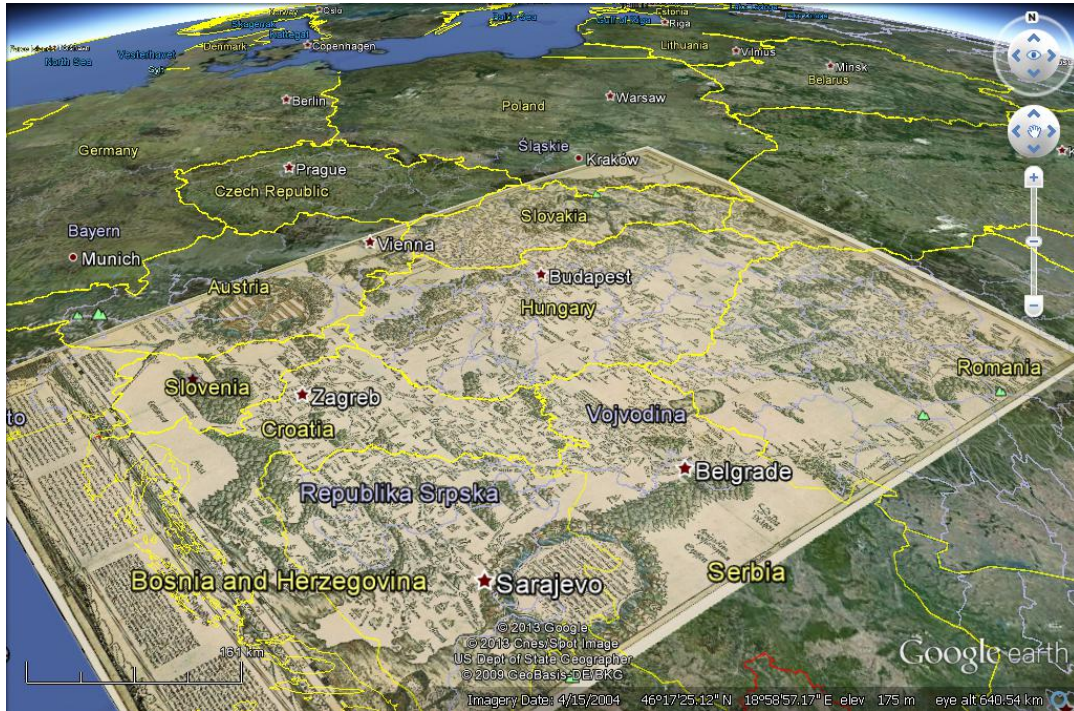
Ha az ismeretlen vetületű térkép által ábrázolt terület kicsi, akkor gyakorlatilag mindegy, hogy milyen vetületet választunk. 10-20 kilométeres távolságon belül a fellépő húrmagasságok nem fogják meghaladni a térinformatikai pontosságot veszélyeztető 5 méteres mértéket. Ebben az esetben inkább a geodéziai dátum megválasztására ügyeljünk, ennek paraméterezéséhez azonban egyetlen illesztőpont is elegendő. A dátumellipszoid méretei szintén alig befolyásolják a pontosságot, az elhelyezést pedig úgy kell beállítanunk, hogy kezelje a fellépő vízszintes eltolásokat.

Ha a térképünk méretaránya kicsi, és így viszonylag nagy területet fog át, akkor abból a szempontból szerencsés a helyzetünk, hogy a térképi leolvasás fél milliméteres pontosságának, vagy a szkennelt pixelek terepi méretének megfelelő távolság több száz méter is lehet, tehát bármilyen vetületet kiválaszthatunk, amely az adott területen ilyen pontossággal megközelíti a térkép valódi vetületét. Több száz méteres pontossági határ mellett a geodéziai dátumválasztás gyakorlatilag mindegy. A vetületválasztáshoz a fókálózat elemzésére van szükség.

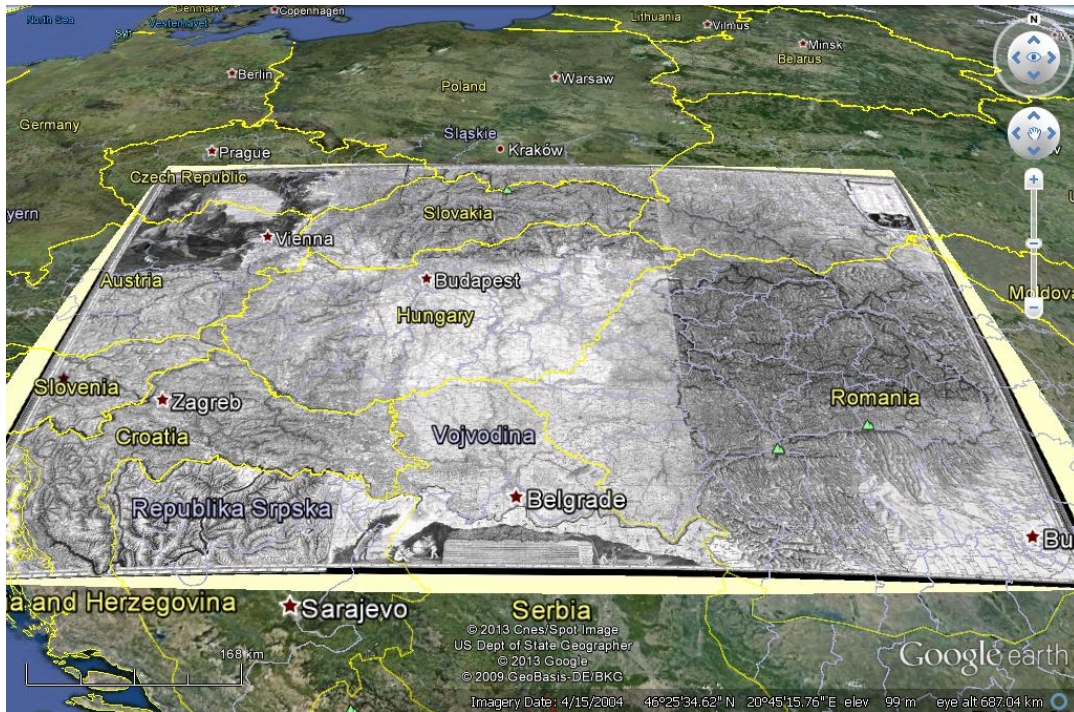
Közepes szélességeken (pl. Európában) az áttekinő térképeken a paralelkörök képei nagyjából koncentrikus körök, a meridiánok pedig a pólus irányába mutató, közel egyenes vonalak, és az egyenlő hosszúságkülönbségű meridiánívek képe közötti szög is egyenlő. Ebben az esetben akkor is közelíthetjük a térkép vetületét Lambert-féle kúpvetülettel, ha a térkép maga nem abban készült.

Végezetül két praktikus tanács. Ha kis méretarányú, nagyobb területet átfogó térképet georeferálunk, érdemes a fókálózati metszéspontokat illesztőpontnak választani és ezek definiálását követően a koordinátákat a térkép vetületének megfelelő koordinátákra váltani. Amennyiben a vetület típusát és a paramétereket jól becsültük meg,

a térkép az új rendszerben a függőleges és a vízszintes irányhoz illeszkedő téglalap lesz (37. és 38. ábrák). Egymilliósnál nagyobb méretarány esetén a geodéziai dátum megválasztása tetszőleges; az nem befolyásolja az eredményt.



37. ábra. Lázár deák Magyarország-térképe (1528) saját vetületében georeferálva: az eredmény egy torzítatlan téglalap.



38. ábra. Lipszky térképe (1810): a georeferált térkép szabályos téglalap, az azt körülvevő sárga zóna a befoglaltó foktrapéz.

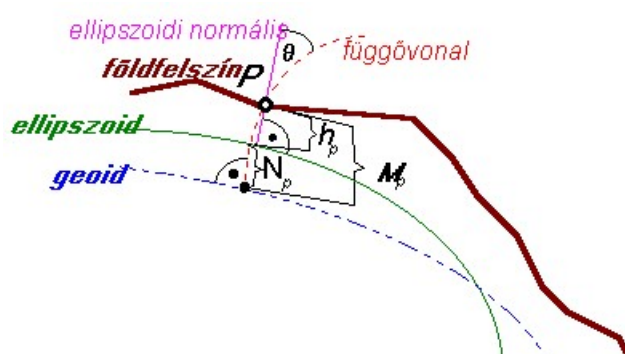
7. fejezet - Vertikális georeferencia

Az eddigi fejezetekben kizárólag az egyes pontok vízszintes helyzetével, georeferenciájával foglalkoztunk. Az ezzel kapcsolatos számításokban a pontok magassági helyzete nem játszott szerepet: valójában a pontok magassága a legtöbb számításban alig van hatással a horizontális koordinátákra. A hatás több száz kilométeres magasságban éri el a centiméteres nagyságrendet, ezért az eddigiekben a kérdéssel nem foglalkoztunk.

Vannak azonban olyan térinformatikai alkalmazások, amelyekben a pontok vízszintes pozíciója mellett azok magassági helyzete is lényeges. Ezen túlmenően, mint azt egy későbbi fejezetben is látjuk, olyan, tipikusan vízszintes típusú eredményt adó alkalmazás is van – az ortorektifikáció – amely a felvételi geometria miatt kötelezően igényli a terep és egyes illesztőpontok magasságának ismeretét. Ebben a fejezetben a magassági helyzet meghatározásához és leírásához szükséges ismereteket összegezzük.

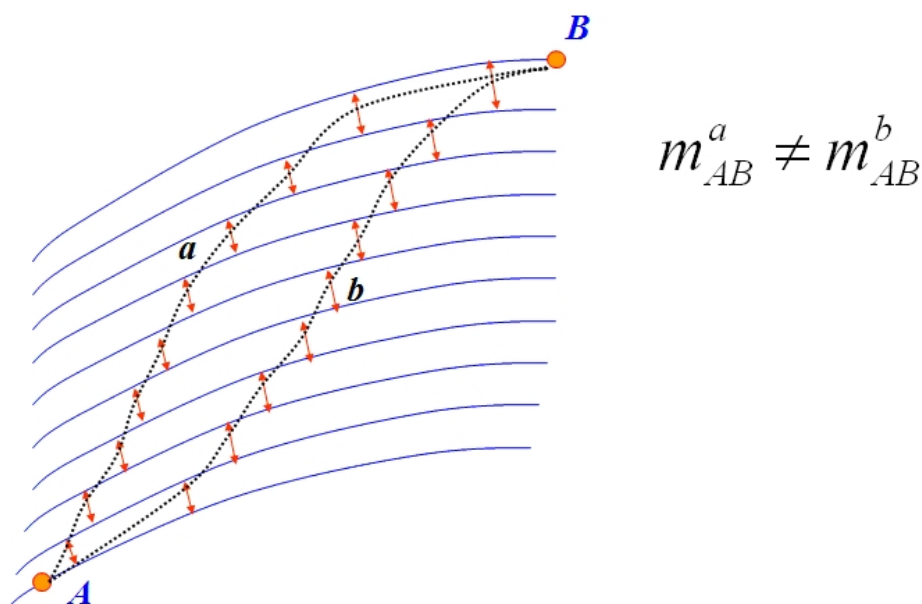
7.1 A magasságfogalom bizonytalanságai

Bármely pont térbeli helyzetének meghatározásához három lineárisan független koordinátát kell megadnunk. Ezt megtehetjük háromdimenziós derékszögű (Descartes-i), vagy polár-koordinátarendszerben is. A GPS rendszer például belső alkalmazásaiban ez előbbit: a Földhöz rögzített derékszögű koordináta-rendszert használja. Amennyiben a tengelyek irányítottága egyértelmű, az ilyen koordinátákkal definiált pontok helyzete is az. A derékszögű koordináták azonban a felhasználók túlnyomó része számára keveset mondanak a pont földrajzi helyzetéről. A gyakorlatban – különösen azért, mert, mint említettük, a koordináta-rendszerek valódi földközépponti elhelyezésére sokáig nem volt lehetőség – a földrajzi szélességgel és hosszúsággal és magassági adattal adják meg a pont helyzetét. A GPS-rendszerek a derékszögű koordinátákat WGS84 dátumon értelmezett földrajzi koordinátákká és ugyanezen dátum (vagyis geometriailag a középpontjával a Föld tömegközéppontjába elhelyezett WGS84 ellipszoid) feletti magassággá konvertálják.



39. ábra. A domborzat, a geoid és az ellipszoid.

Földünk elméleti alakja nem ellipszoid vagy gömb, emiatt a magasság meghatározása másképp történik. Amint azt korábban, a 3.2. fejezetben már tárgyaltuk, a Föld valódi alakja a geoid: a gravitációs és centrifugális erőter eredőjének a középtengerszinhez illesztett szintfelülete. A geoid a hozzá legjobban illeszkedő forgási ellipszoidtól vertikálisan mintegy 120 méteres mértékben térhet el (39. ábra). A geoid a tengervíz hőmérsékleti és sóviszonyai, a tengeráramlások és a jellemzően alacsony és magas légnyomású zónák miatt a tényleges tengerszinhez csak néhány méter pontossággal illeszkedik. A topográfiai térképeken látható magasságadatok rendszerint szintezésből vagy más magasságmérési technológiából származnak és a tengerszint feletti magasságot mutatják, de az előbb említett pontatlanság miatt nem mindegy, hogy melyik tenger melyik pontjáról indulunk. A feladatot tovább bonyolítja, hogy a földfelszín pontjai a kéregmozgások és a lemeztektonikai folyamatok miatt nemcsak vízszintesen, de függőleges értelemben is állandó mozgásban vannak. E mozgás pár évtizedes távlatban már a szintezéssel is észlelhető torzulásokat mutat az alappontok egymás közti helyzetében.



40. ábra. Különböző szintezési utak mentén a mért magasság különböző lesz (Busics Gy., 2012).

A fentiek miatt, továbbá a szintezés eredményének az útvonaltól való függősége miatt, az egyes pontok „tengerszint feletti magassága” nem egyértelmű adat. Ami egyértelmű lenne, az a nehézségi erőter pontbeli potenciálja, illetve annak eltérése a geoid kijelölésekor megadott potenciálértéktől. A potenciál azonban közvetlenül nem mérhető meg, és ha meg is tudjuk becsülni, csak közelítésekkel számítható magasságkülönbséggé, mivel a szintfelületek nem egyenközüek (nem „párhuzamosak”), így két kijelölt szintfelület egymástól való távolsága helyről helyre, ha kismértékben is, de változik (40. ábra).

Ezek azok a bizonytalanságok és folyamatok, amelyek a tengerszint feletti magasságmeghatározás egyértelműségét rontják.

7.2 Magasságfogalmak, magasságmeghatározás

Ellipszoid feletti és tengerszint feletti magasság

Az előző pontban tárgyalt bizonytalanságok miatt a magasságot többféle módon definiálhatjuk. Az első és lefontosabb az ellipszoid feletti és a tengerszint (geoid) feletti magasság megkülönböztetése. A kettő közötti különbséget a geoid-unduláció értékével adjuk meg. Minthogy pedig ez a 120 méteres értéket is elérheti, hazánkban pedig 39-46 méter között mozog, az ebből származó eltérés érdemi. A magasság helytelen használatából adódó hiba a legalapvetőbb terepi alkalmazásokban is elfogadhatatlan.

A különbség nyilvánvalóvá válik, amikor pl. az ellipszoid feletti magasság mutatására beállított GPS-szel egy ismert magasságú hegycsúcson mérünk. A Gellérthegy magassága a tengerszint felett 235 méter, a GPS azonban (hacsak nem építettek bele matematikai geoid-modellt) kitartóan a 278 méteres magasság körüli értékeket mutatja. Ez nem a műszer hibája: ez utóbbi érték a csúcsnak a WGS84 ellipszoid feletti magassága. Ebből levonva a 43 méteres geoidunduláció-értéket, vissza fogjuk kapni a tengerszint feletti magasság ismert értékét.

A tengerszint feletti magasság realizációi

A tengerszint feletti magasság szabatos mérése szintezési vonalak mentén végzett geometriai szintezéssel és a nehézségi gyorsulás értékének ehhez kapcsolódó mérésével történik. Ezekből az adatokból feltevésmentesen meg lehet határozni a vonal végpontjának magassági helyzete közötti potenciálkülönbséget:

$$K_p = \sum_0^p g_i \Delta H_i \quad (7.1)$$

Ebben az egyenletben a g_i mért gyorsulásértékeket a szintezési vonal mentén (az egyes szintezési szakaszokhoz tartozóan) határozzuk meg, a Δh magasságkülönbségek pedig az egyes szintezési szakaszokon meghatározott elemi magasságkülönbségek. Amennyiben az egyik végpont, vagy a szintezési hálózat egyik pontja a tengerszinten helyezkedik el, a potenciálkülönbséget ahhoz a ponthoz képest is meg tudjuk adni. Magával a potenciálértékekkel azonban – bár fizikailag egyértelmű adat – a térképészeti gyakorlatban nem tudunk mit kezdeni. A potenciál pontbeli számértékéből a pont és az alatta elhelyezkedő szintfelület közt „jellemző” nehézséggyorsulás-érték átlagával történő osztással levezethető a pont magassága:

$$H = \frac{K_p}{\tilde{g}_p} \quad (7.2)$$

ez a számítás azonban már nem feltevésmentes. A (7.1) egyenlettel szemben a gyorsulásérték itt nem a szintezési vonal mentén, hanem a pont és az alapfelület közötti függővonal mentén értelmezett, arra vonatkozóan különböző feltételezésekkel élhetünk.

Az ortométeres magasság meghatározásánál a (7.2) formula nevezőjében szereplő „jellemző gyorsulás” értékét feltevésekkel, erre vonatkozó modellek segítségével számítják ki. A végeredményként kapott számértékek értelmezésénél tudnunk kell, hogy az azonos ortométeres magasságú pontok különböző szintfelületekre esnek. Az ortométeres magasság alapfelülete a geoid.

A normálmagasság esetében a „jellemző gyorsulás” értékét a gravitációs normálformula segítségével a mérendő pont szélességét figyelembe véve határozzuk meg. Ezt tovább korrigáljuk a nehézségi gyorsulás magasságfüggését figyelembe véve. A gyorsulás értékét a pont és a szintfelület közti magasság felénél érvényes értékkel jellemezzük. A normálmagasság alapfelülete a kvázigeoid. Ahogy a normálmagasság és az ortométeres magasság különbsége alföldi és dombvidéki tájakon ritkán haladja meg a néhány centimétert (a Himalájában, illetve főként magashegységek meredek lejtőin a 2 métert is elérheti), a geoid és a fenti módon definiált kvázigeoid magassági eltérése is ennyi.

A dinamikai magasság a normálmagasság számítási formulájának szélességfüggését tünteti el. Számításánál a ponton érvényes nehézséggyorsulás-érték helyébe a normálformulának a 45 fokos földrajzi szélességen érvényes értékét helyettesítjük be.

Az ortométeres, a normál- és a dinamikai magasság mind a tengerszint feletti magasság realizációi. Függetlenül eltérésük a térinformatikai célú elemzések legtöbbje esetében elhanyagolható. Ismét felhívjuk a figyelmet arra, hogy a tengerszint és az ellipszoid feletti magasság eltérése ennél ezerszer-tízszerszer nagyobb hibát okoz.

7.3 A tengerszint fogalmának bizonytalansága: magassági dátumok

Amint a 7.1. pontban már említettük, a tenger valódi szintje nem pontosan követi a geoidként definiált szintfelületet. A geodéziai rendszerekben a geoidot a szintfelületet jellemző potenciálértékekkel definiáljuk. A tenger vízszintjének magassági helyzete ettől akár két méterrel is eltérhet, a változás helyről helyre átlagértékében is jellemző, továbbá időbeli változást is tapasztalhatunk.

A „tengerszint” vagy „középtengerszint” definíciója emiatt meglehetősen komplex. A tengerszint mérésére mareográfok szolgálnak: ezek rögzítik a vízszint magasságát az elhelyezési ponton az idő függvényében. A mareográfok nullpontjai önkényes helyzetűek: azok geopotenciális értéke csak egyes esetekben meghatározott, ennek következtében az egyes mareográfokon leolvasott értékek – bár kapcsolatuk statisztikailag elemezhető – direkt kapcsolatba nem állíthatók egymással. A mareográfokon leolvasott időbeli trendeket a globális – beltengerek esetén a lokális – tengerszintváltozás, illetve a mareográf térségének vertikális kéregmozgása is befolyásolja. Az előbbi a leolvasott értékeket, az utóbbi pedig a nulla szintnek a geopotenciális értékét befolyásolja. A tengerszintet az összes mareográfokon leolvasott magassági adat definiálja, a mareográfok vízszintes és nullpontjuk magassági helyzetével együtt. A tengerszint bizonyos időszakokra (epochákra) vonatkozóan értelmezhető a leolvasott adatok mérőhelyenkénti időátlagként (pl. 1905-1910-es középtengerszint).



41. ábra. A triezsti Molo Sartorio, az osztrák-magyar térképészet null-magassági pontjaként használt mareográf házával, 2003-ban (Mélykúti Gábor szívességéből).



42. ábra. A Molo Sartorio, egy yacht-klub székhelyeként, 2007-ben.

A gyakorlatban egy szintezési hálózat egy fizikailag megjelölt alapponton kapcsolódik a középtengerszinthez. Az Osztrák-Magyar Monarchia szintezési hálózata pl. a triezsti Molo Sartorion elhelyezett (41. és 42. ábrák), azóta már megszűnt mareográf egy adott epochájához valamint az 1-es számú alapponthoz (furatos falitáblához) rögzített. A Varsói Szerződés katonai térképészete a korabeli Leningrád (ma: Szentpétervár) melletti kronstadti tengerészeti nullpontjához kötött. Az Európai Unió magassági rendszere az amszterdami mareográfban kijelölt tengerszintet használja. Amennyiben egy ország nem rendelkezik tengerparttal, bármilyen szárazföldi alapponton rögzített magasság használható kiinduló adatnak, ilyenkor természetesen nem „nulláról indulunk”. Magyarország magassági alaphálózatának kezdőpontját az egykori Monarchia hét magassági főalappontja közül az egyikhez, a nadapihoz kötötték. 1951-ben, az új magassági hálózat kialakításakor a régi pont mellett egy új alappontot hoztak létre (43.

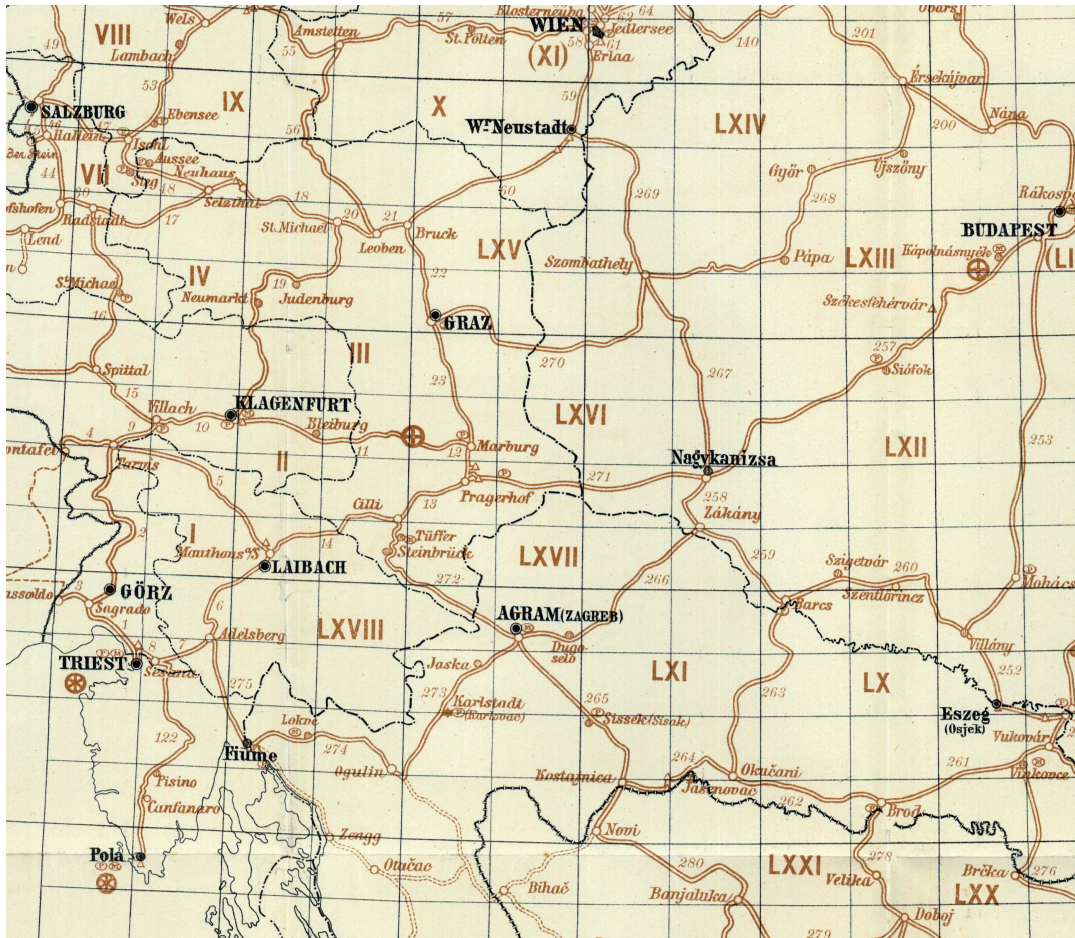
ábra), a hazai magassági nulla szint ez alatt, tizedmilliméter élességgel megadott távolságban húzódik (nadapi alapszint).



43. ábra. Az új nadapi alappont (középen) és a régi helye a domb oldalában (bal szélén): a magyarországi magassági alapponthálózat főpontja (Busics Gy., 2012).

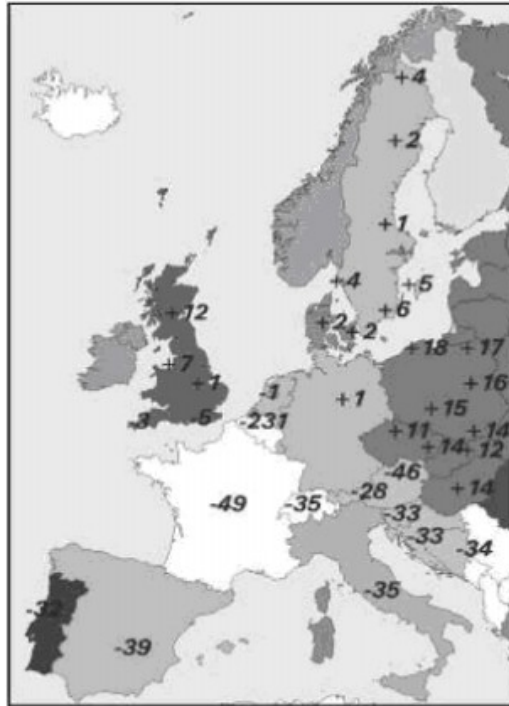
A topográfiai térképeken a vízszintes alapfelület (geodéziai dátum) és a vetület mellett meg kell adni, hogy milyen magassági rendszerben, ún. magassági dátumon értelmezték a magasságok. A hazai régi gyakorlatban használt „Adriai tenger felett”, illetve az 1960-ban bevezetett „Balti alapszint” ilyenek: előbbi a már említett trieszti, utóbbi pedig a kronstadti alapszinthez kötött. Az egyes magassági dátumok közti különbség magassági értelemben konstans. A tengeráramlások, a sótartalom eltérése és a Földközi-tenger párolgási többlete miatt a Balti-tenger szintje az adriai szinthez képest magasabban helyezkedik el. A különbség 67,47 centiméter, az adriai magassági rendszerben adott magasságokból ezt az értéket kell kivonnunk, hogy megkapjuk a balti rendszerben érvényes magasságot. Amikor 1960-ban Magyarország áttért az adriai szint használatáról a baltiéra, a turistatérképeken a hegycsúcsok többségének magassága emiatt csökkent egy méterrel, de mivel a különbség nem éri el az egy métert, nem minden esetben látható ez a kerek méterre történt kerekítés miatt.

Az egyes magassági dátumok realizációja – hasonlóan a vízszintes geodéziai alapfelületekéhez – alpponthálózattal valósítható meg. A hálózat alppontjainak fizikai helyei, illetve az azokhoz rendelt magasságértékek jellemzik a magassági dátumot, a környező tereppontok magassága helyi felmérési eljárásokkal azokról kiindulva határozható meg. A sok pontból álló hálózatok a pontok magasságmérési technikája szerint különböző rendű részhalózatokból állnak. Ezek közül az elsőrendű magassági alaphálózat az, amelynek a létesítési módja és pontossága jellemző fogja a teljes rendszert (44. ábra).



44. ábra. Az osztrák-magyar szintezési hálózat vonalai Triestt és Nadap közt, és a kapcsolódó területeken. A mérési vonalak a vasutak mentén húzódnak.

Az eltérő magassági dátumok közötti – egyszerű konstans eltolással megvalósítható – magassági korrekcióra, és annak irányára különösen olyan műtárgyak (hidak, alagutak) létesítésénél kell figyelemmel lenni, amelyek két végpontja más, eltérő magassági dátumot használó ország területén van. Napjainkban Európában a tudományos célú magassági rendszer nullpontjaként az amszterdami mareográfot használják, az egyes országokban, területeken használt helyi magassági dátumok ettől való eltérését a 45. ábra mutatja be.



45. ábra. Magassági különbségek centiméterben az európai nulla-szint (az amszterdami mareográf nullpontja) és a helyi magassági dátumok nulla szintjei között (Ádám et al., 2000).

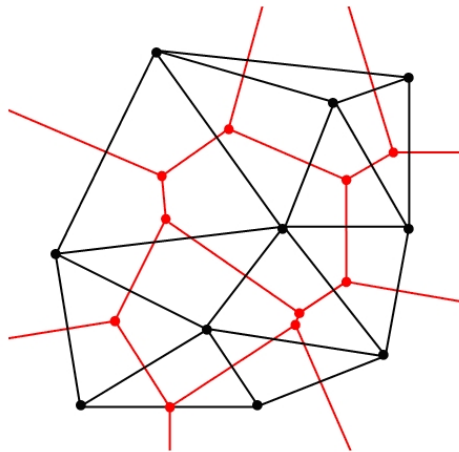
Végezetül meg kell említenünk, hogy a háromdimenziós adatgyűjtési és adatkezelési technikák elterjedésével a jövőben a külön vízszintes és külön magassági részre osztott geodéziai adatbázisok egységesítése várható. A jelenleg még jellemző megosztottság oka elsősorban a vízszintes és magassági referencia hagyományos fizikai-geodéziai megvalósításában mutatkozó módszertani, és ebből következő pontossági különbség.

8. fejezet - Felszínmodellek és domborzatmodellek

Ebben a fejezetben a georeferáláshoz szükséges magassági adatok térmodellbe szervezését mutatjuk be. Nem célunk, hogy a domborzat- és felszínmodellek kiterjedt szakirodalmának mélységében foglalkozzunk a témával. Mindenképp szükséges azonban, hogy a fogalmakat, az egyes modell típusokat és azok előállításának lehetőségeit olyan szinten ismertessük, hogy az a térinformatikában, és különösen a georeferálásban, a légifényképek ortorektifikációjában (9. fejezet) érdeklődő olvasó számára jó áttekintést biztosítson.

8.1 A domborzatmodell definíciója és típusai

Általánosságban felszínmodellezésnek tekintünk minden olyan eljárást, amely megadott helyzeti koordinátákhoz, mint bemenő adatokhoz képes valamilyen pontossággal megbecsülni egy felületnek az adott ponthoz tartozó jellemző magassági értékét. Ebben a definícióban a felület bármilyen egyértelműen definiált idom felülete lehet, ez esetben digitális felszínmodellről (DFM) beszélünk. A térinformatikai gyakorlatban azonban jellemzően a terepnek a szintvonalas térképekkel is ábrázolt magasságát, a domborzatot modellezzük így. Ebben az esetben modellünket domborzatmodellnek nevezzük (DDM – digitális domborzatmodell).



46. ábra. A Voronoi-diagram (piros): a hálózat háromszögei köré írt körök összekötött középpontjai (Wikipedia).

A domborzatmodell lehet vektoros vagy raszteres. A vektoros változat általában az adatok mintavételezésének szabálytalan térbeliségét fejezi ki, és a szabálytalan vízszintes ponthálózatához rendelt magasságértékeken, térbeli pontok koordináta-hármasain alapszik. A megadott pontok között valamilyen interpolációs módszerrel becsülhetjük meg a magasságot. Ennek legegyszerűbb módja a szabálytalan háromszögháló (Triangulated Irregular Network; TIN) alkalmazása. A meglévő, ismert magasságú pontokra optimális háromszöghálót fektetünk, célszerűen úgy, hogy a háromszögek élhosszainak összege minimális legyen (46. ábra). Így az alapsíkon vett értelmezési tartomány bármely pontja vagy alappontra esik, vagy egyértelműen hozzárendelhető egy olyan háromszöghöz, amelynek csúcsai esnek alappontokra. A háromszögekre illesztett egyértelmű sík – vagy más, bonyolultabb, de egyértelmű függvény – segítségével a pontok magassága megbecsülhető.

A georeferencia tárgyalt gyakorlata, a szkennelt térképek és térképi alkalmazások ugyanakkor a raszteres adatmodellnek felelnek meg. Ez szükségessé teszi a magassági és domborzati modellek raszteres változatának alkalmazását is. Annak semmi akadálya, hogy az előbb említett vektoros (TIN-bázisú) modellek segítségével egy tetszőleges síkbeli rácsháló pontjaiban megbecsüljük a magassági értékeket. A gyorsabb programfutás és az adatszintű kompatibilitás megteremtésére a rácshálókat elsősorban nem dinamikus lekérdezés formájában hozzuk létre, hanem egyszer, egy TIN → GRID konverzióval egy raszteres file-t töltünk fel adattal. A konverziós irány miatt az így létrejött raszteres domborzati vagy térmodell információtartalma az eredeti szabálytalan háromszöghálózathoz képest csökken, azt a rácshálós modellből visszaállítani már nem lehet. A továbbiakban az ilyen, raszteres modelleket tárgyaljuk részletesebben.

8.2 A domborzatmodell előállítása és jellemzői

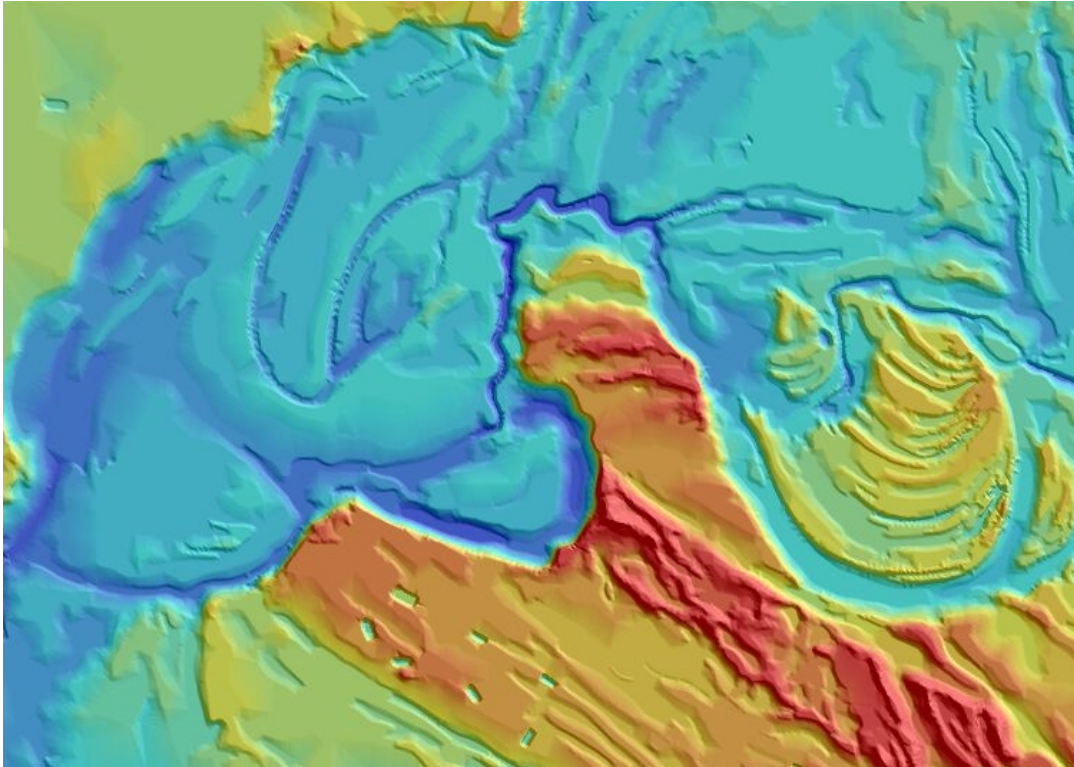
A domborzatmodelleket a következő adatok felhasználásával állíthatjuk elő:

- Eredeti terepi felmérési adatokból
- Szintvonalas térképek, kartometriai adatok alapján
- Sztereo légifénykép-párok kiértékelésével
- Radaros magasságmérési- vagy interferometria-adatokból
- Légi lézerszkennelési (LIDAR) adatokból

Az eredeti terepi felmérési adatok egy háromdimenziós pontthalmazt jelentenek, amelyeket valamely magassági rendszerhez (magassági alaphálózathoz) képest terepi felmérési módszerrel illetve műszerrel (mérőasztal, tahiméter, mérőállomás, szintezőműszer, GNSS) mértek fel. A pontok értelemszerűen szabálytalan vízszintes eloszlásúak. A sztereo-fotogrammetria elterjedése előtt ún. mérőasztalos felvétellel készítették el a szintvonalas domborzati térképeket. Ma csak kisebb területek felméréséhez használnak földi felmérési módszert. Akkor használhatjuk fel ezt a fajta adatot, ha a szintvonalas térképek elkészülte után azok munka-anyagait, így az eredeti terepi jegyzőkönyveket és a belőlük készült pontjegyzékeket megőrizték.

A szintvonalas térképek részben az előző bekezdésben említett terepi felmérések, részben a mindjárt említendő sztereo-fotogrammetria eljárásaival készültek. Adattartalmuk kisebb az eredeti terepi adatokénál. A szintvonalak manuális vagy automatikus digitalizálásával a szintvonal menti pontok vízszintes pozíciói illetve a szintvonalakhoz tartozó magasság ismét háromdimenziós pontthalmazt eredményez. Ez a pontthalmaz az eredeti terepi felmérési adatok egyfajta modelljének tekinthető, a raszteres adat ahhoz hasonlóképpen, a TIN→GRID konverzióval állítható elő. A digitalizált szintvonalakból készített modellek azonban háromféle jellemző hibával is torzítottak:

- A szintvonalak élesebb kanyarulataiban jellemzően létrejön egy vagy több olyan háromszög a szabálytalan hálózatban, amelynek minden csúcsa azonos szintvonalon van. A hegygerincek mentén minden szintvonalnál létrejön egy ilyen „virtuális plató” a modellben, amely a valóságban természetesen nincs ott. A domborzati modell hisztogramján emiatt a szintvonalak magasságértékei mellett gyakorisági csúcsok jelennek meg.
- Amennyiben a szintvonalak hosszú, egyenes szakaszain nem helyezünk el elegendő töréspontot a digitalizálásnál (legalább olyan sűrűséggel, mint a szomszéd szintvonal távolsága), illetve azt később sem sűrítjük be automatikus eljárásokkal, úgy a keletkező háromszögháló élei helyenként metszeni fogják a szintvonalakat. Ez az ábrázolt lejtő aljának vagy tetejének a „szálkásodását” fogja eredményezni (47. ábra).
- Főként alföldi területeken sokszor csak egyetlen szintvonal kanyarog nagyobb területeken keresztül. Hiába digitalizáljuk be ezt részletesen, követve pl. a morotvák és az övzátányok bonyolult rendszerét, a végeredmény mégis egyetlen sík lesz. Virtuális segéd-szintvonalak alkalmazásával kiemelhetjük a kanyargó eredeti szintvonalban tárolt eredeti adatokat is.



47. ábra. „Halszálka-hibák” egy domborzati modellen: amikor a szintvonalak digitalizálásakor a töréspontok túl messze vannak egymástól.

Sztereo-képpárok esetében az azonos területről különböző pozícióból átfedéssel készült, elsősorban légifelvételek (48. ábra) eltérő belső torzulási viszonyai tartalmazzák a területre vonatkozó magassági információt. A torzulásokat elsősorban a mindkét felvételen jól látható geodéziai ponthálózati elemek (ezek koordinátái mind a vízszintes, mind a magassági rendszerben ismertek) kölcsönös képi helyzete tartalmazza. Ezt kiegészíti a többi, nem ismert pozíciójú, de a felvételeken egymáshoz párosítható egyéb objektumok halmaza. Az eljárás végeredménye korábban legtöbbször valamilyen szintvonalas térkép lett, amelyből az előző pontban ismertetett módon készíthetünk domborzati modellt. A számítástechnika fejlődésével a képpárokból és a rajtuk azonosított alappontok adataiból szerencsés esetben közvetlenül is készülhet raszteres domborzati modell. Ehhez nemcsak légifényképeket, de közepesnél jobb felbontású űrfelvételeket is lehet használni (ASTER domborzati modell). Megemlítendő, hogy az azonosított és párosított képi elemek nem feltétlenül a talajszinten, hanem ahhoz képest magasabban (növényzet, épületek) helyezkednek el, ezeket vagy figyelmen kívül hagyjuk, vagy a létrejött modellt eleve nem domborzatmodellként, hanem az ezeket az elemeket is tartalmazó felszínmodellként értelmezzük.



48. ábra. Sztereo-képpár: ha szemünket a végtelenre fókuszáljuk, a kép térhatásban jelenik meg.

A radar-technológia két módon is kapcsolódik a domborzati modellezéshez. Az itt csak megemlített, de nem tárgyalt radar-interferometria elsősorban a felszín magassági *változásait* képes térképezni. A radar-alapú magasságmérés azonban a domborzat és a tereptárgyak magasságát is közvetlenül képes meghatározni. Ez az a technológia, amely a 2000-es évek első felében forradalmasította a digitális domborzati modellek elérhetőségét és óriási lökést adott a segítségükkel elvégezhető kutatásoknak. A Föld viszonylag sűrű légkörén áthaladni képes radarhullámokkal ugyanis nemcsak a felszínről követhetjük a repülőgépek pozícióját (amelyre a radart az 1930-as és 40-es években kifejlesztették), hanem légi- és űreszközök fedélzetéről, irányított radarnyalábbal a felszín távolsága is meghatározható. Az űrrepülőgép fedélzetén elhelyezett radarforrás-észlelő párossal rögzített adatokból 2003-tól készült el a következő pontban részletezett SRTM (Shuttle Radar Topography Mission)-adatbázis, amely a publikálását követő évtizedben – elsősorban ingyenessége és globálisan egységes jellemzői miatt – világszerte a leginkább használt felszínmodell lett, amelyet számos tudományág kutatói használnak szívesen. A technológia jellegéből következően az épített környezet és a növényzet részleges hatása is az adatokban van. Hátránya emellett a viszonylag kicsi, 100 méter körüli vízszintes felbontás.

Amennyiben a felbontást növelni szeretnénk, a legújabbban egyre elterjedtebbé váló légi lézerszkennelést (LIDAR) kell alkalmaznunk. A lézeres távmérés néhány évtizede, a hordozható lézerek megjelenése óta része a terepi geodézia eszköztárának. A lézer irányát egy adott térszögben változtatni képes, és a visszaérkező jelet rögzítő berendezés, a lézerszkennert azonban csak az utóbbi évtizedben vált és válik egyre általánosabban használt eszközzé. A lézerszkennert nemcsak földi ponton, hanem repülőeszköz fedélzetén is el lehet helyezni. A lézerszkennert jele a természetes és mesterséges objektumokról visszaverődik, nagy pontsűrűsége (akár több pont négyzetméterenként) miatt a növényzettel borított felszínek esetében időnként eléri a talajt is. Nagy felbontása miatt különösen alkalmas a közel sík területek mikro-domborzatának térképezésére.

A raszteres domborzati, illetve magassági modellek minőségi jellemzői:

- Vízszintes felbontás
- Függőleges adatábrázolás élessége
- Magassági pontosság

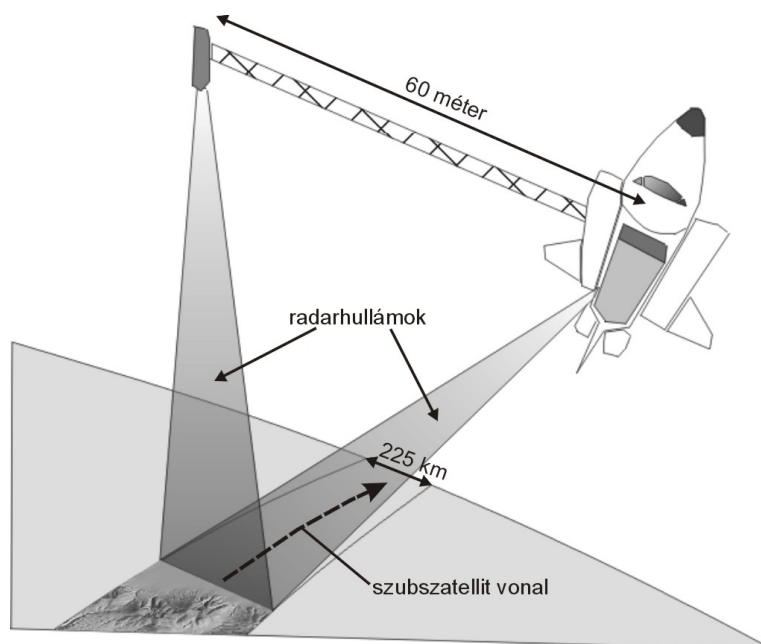
Amennyiben a forrás szintvonalas térkép, úgy megadandó:

- Az eredeti térkép méretaránya
- Az eredeti térkép alapszintköze és a felhasznált legkisebb szintvonalköz

Meg kell jegyezzük, hogy a magassági adatok ábrázolási élessége és pontossága nem azonos. A számábrázolási élesség azt mutatja meg, hogy mekkora az ábrázolható legkisebb magasságkülönbség (pl. 1 méter). Ez azonban eltér attól, hogy a magasságot milyen pontosan tudjuk becsülni (pl. 3 vagy 5 méter). Természetesen a számábrázolási élessége a pontosság alatt kell maradjon, különben ő maga rontja le azt. A raszteres domborzati modell egy kép, amelynek kép sorai és oszlopai valamilyen ellipszoidi vagy vetületi koordináta-rendszer alapirányáival párhuzamosak. E koordináta-rendszer, és valamely képpontnak az ebben értelmezett helye fontos meta-adatai a domborzati vagy felszínmodellnek.

8.3 A domborzatmodellek elérhetősége

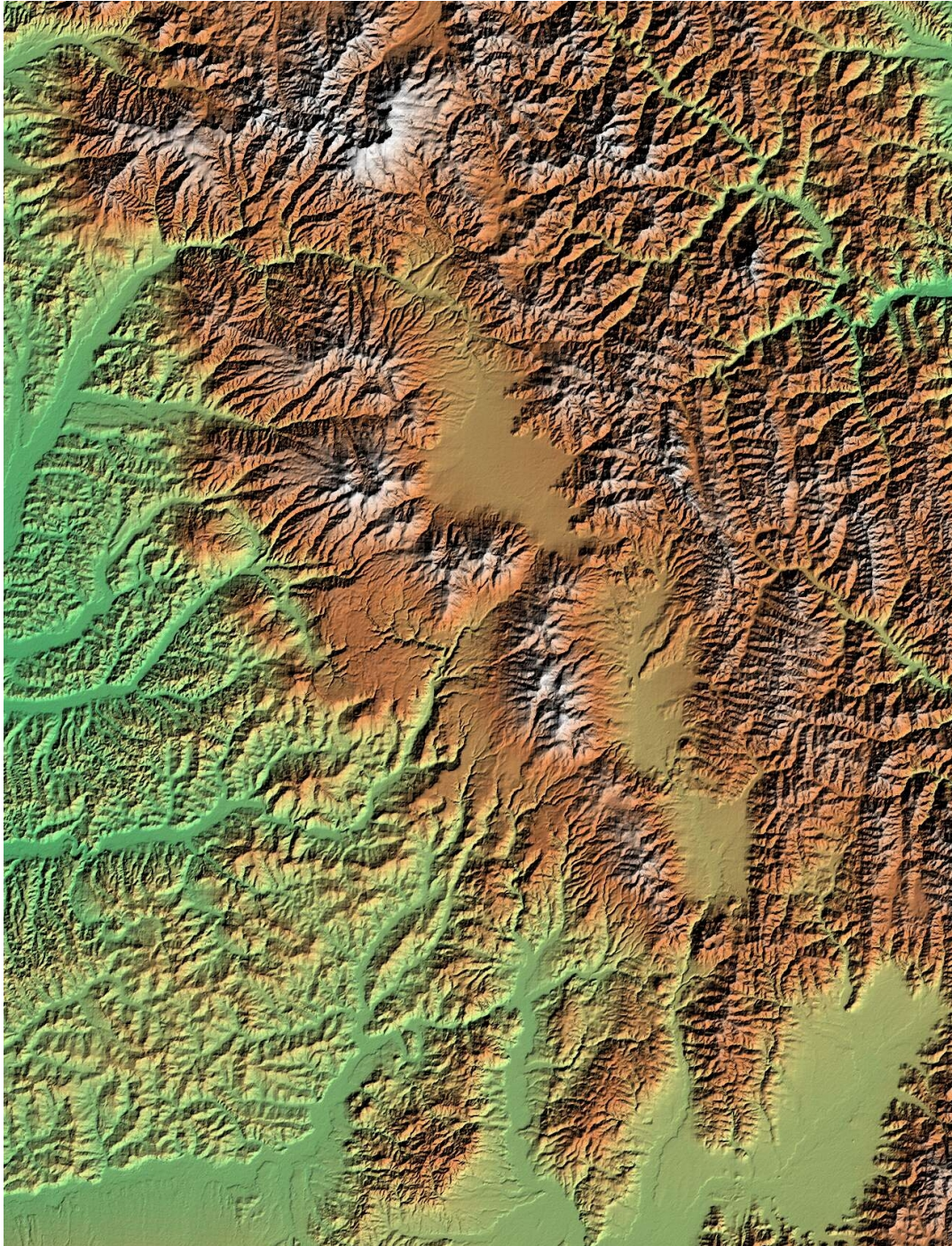
A korábbi években a nemzeti geodéziai/térinformatikai adatszolgáltatók általában az általuk forgalmazott topográfiai térképek szintvonal-adatbázisaiból fejlesztett domborzati modelleket forgalmazták, ma már egyre inkább jellemző a lézerszkennelt adatokból előállított domborzatmodellek elérhetősége. E modellek az illető ország vízszintes térképi koordináta-rendszerében mutatják a magasságot, a magasságértékek pedig szintén az adott ország magassági dátumához igazodnak. A modellek minőségi jellemzői is változnak, és alapvetően függenek a készítő ország technikai színvonalától, az elérhető topográfiai térképek méretarányától és minőségétől is. A lézerszkennelt adatok alapján generált domborzatmodellek élessége, felbontása és a legtöbb esetben a pontossága is jobb, mint a szintvonalas adatokból generáltaké. Az egyes nemzeti adatszolgáltatók általában nagy hangsúlyt fektetnek az adataik pontosságára és aktualizálására, azonban a Föld felszínének nagy részére ilyen igényű adatbázisok egyáltalán nem érhetők el.



49. ábra. Az űrepülőgépen végzett SRTM-mérés elvi vázlata.

A közepes felbontású globális domborzati modellek esetében más a helyzet. Az 1990-es években különféle nemzetközi csoportok alakultak globális modellek meglévő adatokból való összeállítására. Az évszázad végére el is terjedtek ilyen adatrendszerek (pl. a GTOPO30), azonban a szerkesztett mivoltukból adódóan ezek adatminősége helyről helyre nagyon változó volt. Ezen a helyzeten gyökeresen változtatott a 2003-tól publikált SRTM (Shuttle Radar Topography Mission). Az amerikai NASA (National Aeronautic and Space Administration) 1996-ban kezdte meg a programot, amelynek célja a Föld felszíne mintegy 80%-ának digitális domborzati térképezése volt, űrrepülőgép fedélzetén elhelyezett radarrendszer felhasználásával (49. ábra). Halasztás után az Endeavour űrrepülőgépet, fedélzetén a méréshez szükséges berendezésekkel 2000. február 11-én bocsátották fel. A teljes mérési kampány 11 napig tartott. Az űrbeli mérést kiterjedt felszíni GPS-mérésekkel és adott pozíciókon elhelyezett

mesterséges visszaverő felületek elhelyezésével is támogatták. A mérést követő adatfeldolgozás 18 hónapot vett igénybe, amelyet az amerikai védelmi minisztérium intézménye, a NIMA (National Imagery and Mapping Agency) fővállalkozásában végeztek. A NASA és a NIMA közötti 2003-as együttműködési megállapodásnak megfelelően, a NASA engedélyével az Egyesült Államok geológiai szolgálata, az USGS (United States Geological Survey) archiválja és a világhálón teszi elérhetővé az adatokat.



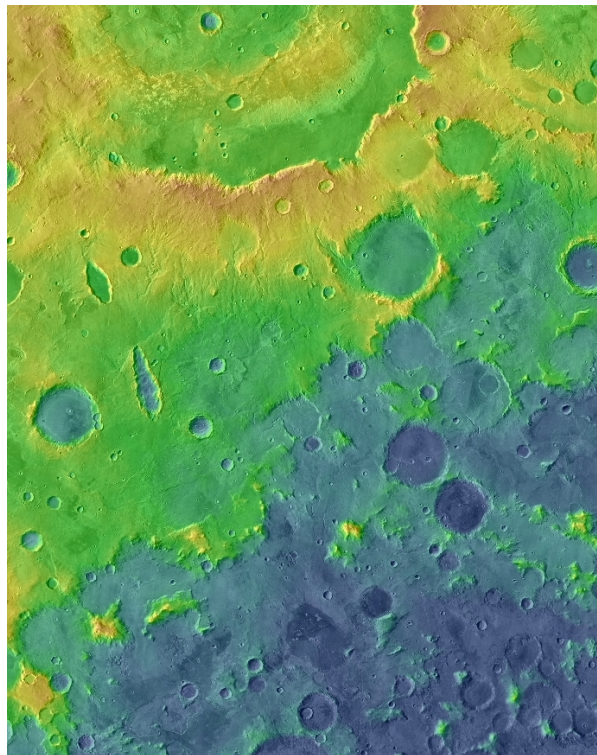
50. ábra. A Székelyföld domborzati modellje az SRTM-adatok alapján.

A projekt során a térképezett terület digitális domborzatmodellje két felbontásban készült el: a pontosabbnak 1 szögmásodperc, a kevésbé részletesnek 3 szögmásodperc a felbontása, amely utóbbi is százszoros adatsűrűségbeli javulást jelent az addig elérhető legjobb felbontású globális domborzatmodellhez, a GTOPO30-hoz képest. Ezzel olyan publikus adatbázis jött létre, amelynek létét és használhatóságát minden térinformatikával foglalkozó szakembernek érdemes ismerni (50. ábra).

A mérés során az űrrepülőgép fedélzetén elhelyezett radarberendezést használtak. Mivel az űrrepülőgépek pályainclinációja 57 fok, a poláris területeket nem érinti, így az SRTM-program keretében térképezhető és térképezett terület a 60 fokos északi, illetve az 57 fokos déli szélességi körök közötti régióra terjed ki. Nem tartalmazza tehát az adatbázis pl. Finnország domborzatát. Az eredményként kapott, 3 szögmásodperc felbontású (ill. az USA területét ábrázoló 1 szögmásodperc felbontású) adatok az Interneten bárki számára hozzáférhetők. A hálózat az ellipszoidi koordináták mentén egyenközü, az alkalmazott alapfelület a WGS84 földi ellipszoid. A pixelértékek – az alább tárgyalt kivételekkel – a magasságadatokat tartalmazzák. A magasságok a tengerszint feletti magasság becslései, amelyek a mérésekből származtatott WGS84 ellipszoidi magasság és egy globális modelltől vett helyi geoidunduláció-érték különbségeként álltak elő.

Az adatok használatakor figyelembe kell vennünk, hogy azokat radar-technológia alkalmazásával határozták meg. Vízfelületekről – az elkerülhetetlen hullámvisszaverés hatása miatt – bizonytalan jelek érkeznek, emiatt a tengereken és tavakon, illetve folyókon hamis adatok jelennek meg. Ezek egy részét a feldolgozás során kiszűrték, és a pixeleknek NULL értéket adtak. Hasonló NULL értéket kapott számos hegyvidéki pixel is, leginkább az olyan mély völgyek területén, amelyek a felvételi geometriából adódóan radarárnyékban voltak, és ahonnan nem érkezett visszavert radarjel. Értelemszerűen magasabb hegyvidékeken gyakoribb az emiatt bekövetkezett adathiány. Szükség esetén más, gyengébb felbontású modelltől pótolhatjuk az itt hiányzó értékeket. Az 5,6 centiméter hullámhosszú rádiójel nem hatolnak át a sűrű, vagy akár a közepes sűrűségű lombosodaton, és természetesen visszaverődnek az épületek szilárd tetőzetéről, burkolatáról. Így a magasságértékek az 5,6 centiméteres hullámhosszú elektromágneses jel számára reflektorként viselkedő réteg tengerszint feletti magasságát adják: városokban, erdők területén az épületek, a fák magassága is megjelenik az adatokban!

A Mars ritka légkörében lehetséges a pontos műholdas lézeres magasságmérés is. A MOLA (*Mars Orbital Laser Altimetry*) projekt egy az SRTM-hez igen hasonló, 500 méter körüli felszíni felbontású domborzati modellt szolgáltatott a bolygóról, természetesen az épített és növényzeti „zavarok” nélkül (51. ábra). Az utóbbi évtizedben a Mars magassági felmérése ehhez képest több nagyságrenddel finomodott.



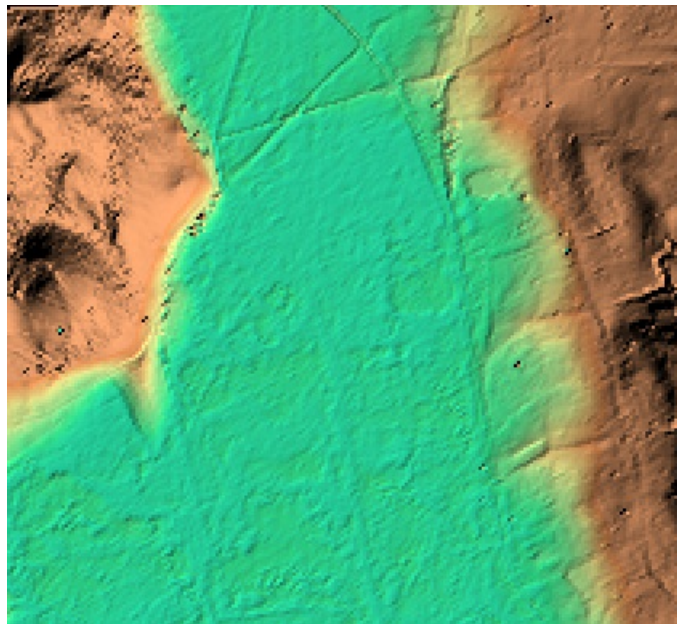
51. ábra. A marsi Huygens-kráter déli előtere a MOLA domborzati modellen.

8.4 Az épített környezet és a növényzet hatása: a felszínmodellek

Amint a korábbiakban láttuk, a domborzatmodellek készítésének egyes technikái nem, vagy csak komolyabb utófeldolgozási munkák segítségével képesek elkülöníteni a talaj és a növényzet, továbbá az épített objektumok magasságát. És amint azt a következő fejezetben látni fogjuk, a légifelvétel georeferálásakor ezekre az információkra is szükségünk van ahhoz, hogy a terepszintből kiemelkedő objektumok, épületek korrekt vetületi helyükre kerüljenek.

Emiatt a talaj, illetve a földfelszín magasságát mutató domborzatmodellek mellett szükségünk van a ténylegesen fényképezett felszín magasságát bemutató ún. felszínmodellekre (DFM) is. Ezek elkészítése kétféleképpen történhet:

- A domborzatmodell felülírjuk a növényzet és az épületek becsült, modellezett magasságával. Ahol nincs növényzet és épület, ott a felszínmodell és a domborzatmodell azonos magasságot mutat. Az épületeket valamilyen háromdimenziós hasábbal vagy ilyenek kombinációival tudjuk modellezni, míg a növényzetet a növényfajra (erdő fái, szántóföldi növények) jellemző magasság hozzáadásával. Ez a módszer kicsit emlékeztet pl. a vasútmodellező terepasztalra: az előzetesen meglévő domborzathoz adjuk a plusz magasságot megvalósító modell-elemeket.
- A felszínmodell közvetlenül is előállítható lézerszkennelt (Lidar-) adatokból. Mivel az aktív visszaverő felszín bármilyen szilárd tárgy (épület teteje, fák levelei) lehet, feldolgozó eljárásokkal biztosítható, hogy a lézerszkennelés eredményeként előálló háromdimenziós pontsokaságból felszínmodellét kapjunk (52. ábra).



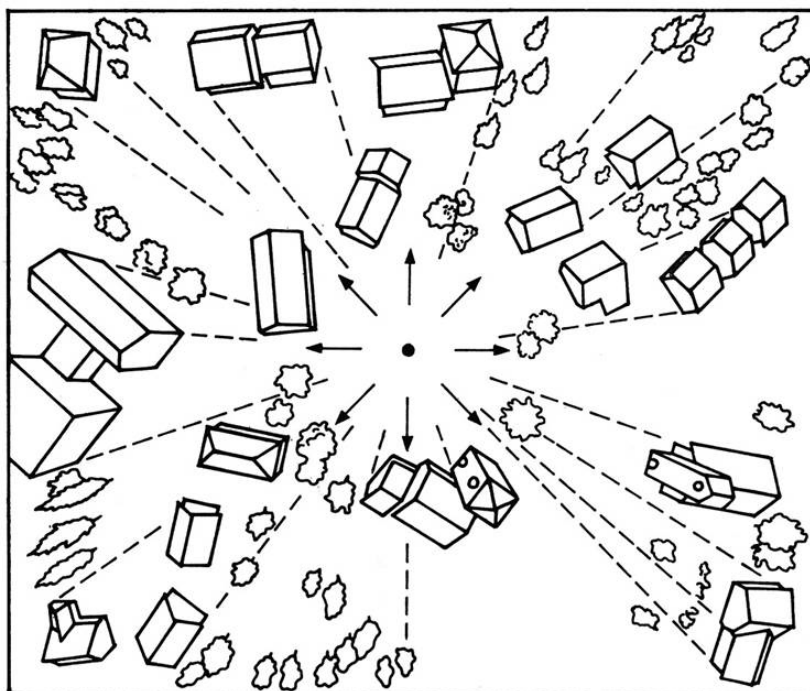
52. ábra. Mesterséges magassági elemek (utak, vasutak, gátak) a Badacsony és Szigliget közti lapály lidar-adatokból szerkesztett magassági modelljén (Zlinszky et al., 2012).

Itt kell ismét megemlítenünk, hogy az előző pontban említett, radar-bázisú SRTM domborzatmodell a növényzetre, illetve az épített környezetre utaló magassági elemeket is tartalmaz. A jelzett magasságnak a tényleges domborzattól való eltérése csak a növényzet illetve a városok kiterjedésére utal, de a tényleges magasságot nem is közelíti, minősített felszínmodellként nem használható.

A felszínmodellek a georeferálás gyakorlatában raszteres adatok. A vízszintes felbontás függvényében ez mindenképp modellhibát okoz, hiszen a raszter-modell nem képes a függőleges falak vagy az erdőhatárok háromdimenziós leírására. Ez a hiba azonban a légifénykép (vagy az ultranagy-felbontású műholdfelvétel) georeferálásánál pixelméret alatti vízszintes hibát okoz, ami mindenképp jóval kisebb eltérés, mint ami a magassági modell teljes figyelmen kívül hagyásából származna.

9. fejezet - Légifelvételek ortorektifikációja

A légifelvételek alapvető geometriája jelentősen eltér a térképekétől és térképszerű raszteres adatbázisokétól. A térkép eleve úgy készül, hogy az ábrázolandó tájat függőleges vetítéssel egy síkon ábrázoljuk, majd ezt kicsinyítjük le a kívánt méretarányba. A fényképfelvételek torzítási viszonyai teljesen mások. Itt természetesen fellép az optikai megvalósítás (a centrális vetítés) miatt fellépő perspektív torzulás (53. ábra).



53. ábra. Egy légifotó jellemző torzulásai.

Bár szinte tetszőleges irányultságú felvételek részleteihez tartozhat georeferencia, és a felszíni felvételek, tájképek földtudományi dokumentáció értéke is jelentős, ebben a fejezetben a térképszerűséget eleve legjobban megközelítő, túlnyomórészt repülő eszközök fedélzetéről készített légifelvételek koordináta-rendszerbe illesztésével és torzulásainak megszüntetésével foglalkozunk.

9.1 Az ortorektifikáció (ortofotó előállítás)

Az ortorektifikáció célja a légifelvétel pixeleinek egy olyan képi koordináta-rendszerbe történő újramintavételezése, amely egy általunk választott vízszintes felületen (a felvétel területén húzódó valamely szintfelületen) értelmezett és merőleges vetítésű képet eredményez..

Kétfajta torzító hatást kell korrigálnunk:

- A fényképezés geometriájából következő perspektív torzítást, és
- A felszíni magasságkülönbségek torzító hatását.

Bár az eddigiekben a georeferálásnál – épp a térképek síkmodell-jellege miatt – a magassági referenciát elhanyagoltuk, a mostani esetben ezt nem tehetjük meg. És nemcsak hogy nem tehetjük meg: az sem mindegy, milyen terepmodellt vagy térmodellt használunk. A légifényképeken ugyanis sokszor nem a talajt (a terepet) látjuk, mert a növényzet, vagy az épületek azt eltakarják. Ilyenkor a mi döntésünkötől, a rendelkezésre álló adatoktól és

az elérendő céltól függ, hogy a domborzat illetve a függőleges kiterjedésű tereptárgyak, terepfedezeti elemek magassága közül melyiket és hogyan vesszük figyelembe.

Az ortorektifikáció elkészítéséhez szükséges kiegészítő információk:

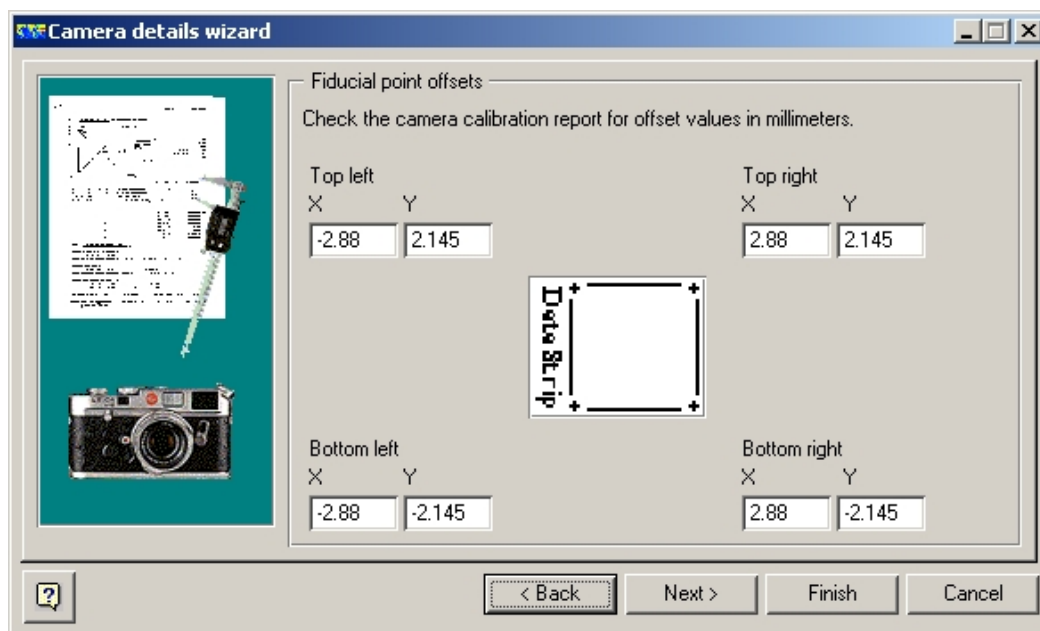
- A kameramodell és a belső tájékozási adatok,
- A külső tájékozási adatok, továbbá
- A fénykép területét átfogó domborzatmodell vagy felszínmodell.

9.2 A belső adatok

A kameraadatok a következők:

- a fókusz távolság, és
- a keretjелеk geometriai helyzetének leírása.

A professzionális légifényképező eszközök, különösen a régebben használatosak esetében a fókusz távolság adott kamera esetében rögzített érték. A képsíkon a felvételek értelmezéséhez néhány rögzített pontot, ún. keretjелеket helyeznek el. A keretjелеk a kép sarkai és/vagy oldalközéppontjai közelében helyezkednek el, pozíciójuk a kép középpontjához (a képfőponthoz) képest állandó. Pozíciójukat a fényképnegatív síkjában, a képfőpontra helyezett origójú koordináta-rendszerben fejezzük ki, amelynek tengelyei párhuzamosak a képszélekkel. A pozíciókat milliméter vagy centiméter egységekben adhatjuk meg (54. ábra). Ezen metaadatok megléte a pontos ortorektifikáláshoz elengedhetetlen. Egy archív légifénykép helyesbítéséhez fel kell kutatni, hogy az milyen géppel készült, és melyek voltak annak itt említett kamera-állandói. A térinformatikai szoftverek az ortorektifikációhoz szintén ilyen adatokat igényelnek: néhány szabványos, széles körben használt légifényképező kamera adatait esetleg beépítetten ismerik, de a fenti adatokkal magunk is létrehozhatunk ilyeneket.



54. ábra. A CCD-lapka sarokpontjainak – mint keretjелеknek – a helyzete milliméterben a kameraadatok megadásakor (lapkaméret: 1/2.5"; vö. 6. táblázat). A kameraleíráshoz a fókusz távolságot is meg kell adni.

További belső adat, hogy a modellben megadott keretjелеknek az adott és digitális formában meglévő felvételen melyek a képi (metrikus) koordinátái. Térinformatikai szoftver-környezetben ezt gyakorlatilag a kurzornak a keretjелеkre történő, előre meghatározott sorrendű mozgatásával és rögzítésével oldhatjuk meg.

9.3 A külső tájékozás

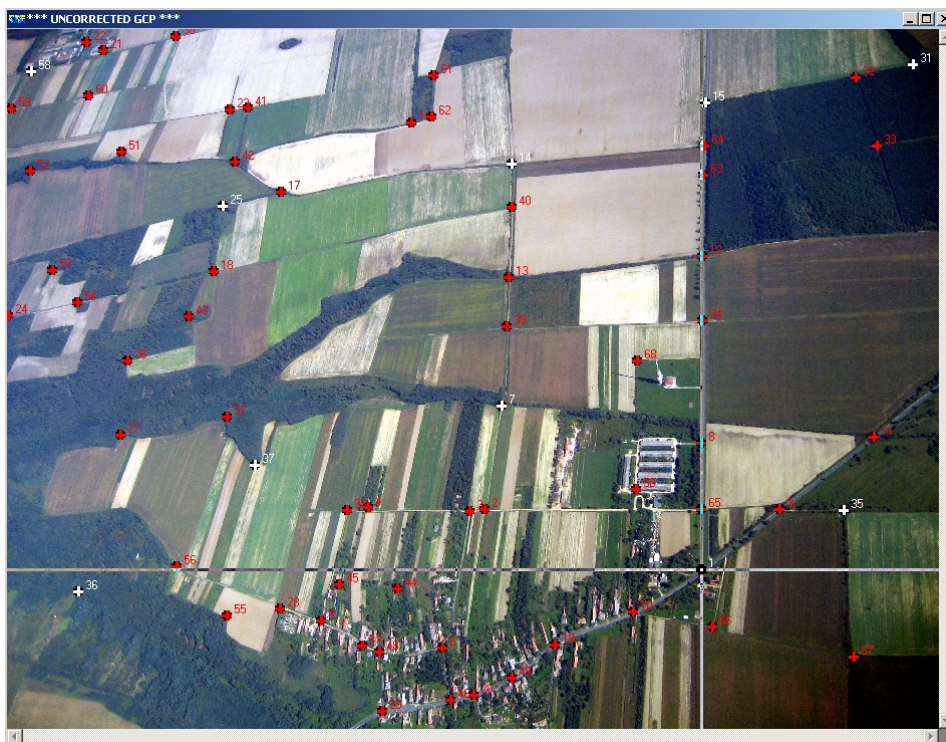
A felvétel ortorektifikációjához ismernünk kell a fényképezési geometriának az optikai középponttól a tárgy felé eső részét is. Tudnunk kell, hogy honnan és milyen irányban fényképeztünk. Vagyis szükség van a vetítési középpont 3 térbeli koordinátájára a terepi vonatkozási rendszerben valamint 3 szögértékre. Két szöggel adhatjuk meg a kameratengely térbeli helyzetét, egy szögadattal pedig a sugárnyaláb tengely körüli elfordulását a felvételkészítés pillanatában.

Amennyiben ezt a légifényképezéskor mérni akarjuk, a helymeghatározáshoz fedélzeti GPS-műszert kell használnunk, a szögek meghatározásához pedig inerciális rendszert. A GPS adatai azonban csak bizonyos korrekciókkal használhatók. A folyamatos adatrögzítési módban levő GPS-műszer adataiból interpolálunk kell a kép pontos rögzítési idején érvényes pozíciót. Emellett figyelembe kell venni (és ez sohasem lesz teljesen pontos), hogy a GPS-antenna és az optikai középpont nem esik egybe. Pozíciójuk a repülőgéphez rögzített rendszerben változatlan lesz egymáshoz képest, de a külső koordináta-rendszerbeli különbségvektort a repülőgép haladási iránya, oldalgása és bőlintása is befolyásolja.

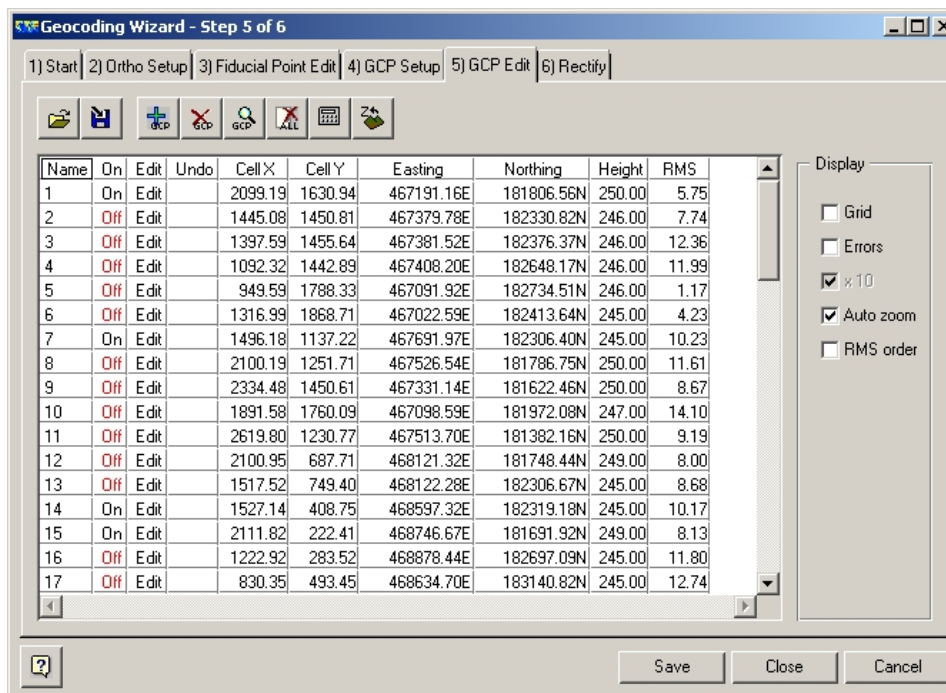
Utóbbiak természetesen lényegesek magának a képi geometriának a leírására is, így fedélzeti meghatározásuk is megkísérelhető. Ehhez giroszkópot használhatunk, amely a felszállás előtt beállított referencia-irányokhoz képest értelmezett tájékozást, az elfordulási szögeket (irány, billenés, bőlintás) méri. Ebben az esetben is megoldandó, hogy a felvétel rögzítési időpontjában érvényes tájékozási szögértékeket kapjuk meg. A pozíció három és a tájékozás másik három számadatát beírhatjuk az ortorektifikációt végző térinformatikai rendszerbe.

A georeferálási gyakorlatban azonban ezek az adatok a legritkább esetben állnak – akár közelítő pontossággal is – rendelkezésünkre. Szerencsére a külső tájékozás elemei nem pótolhatatlanok: azokat földi illesztőpontok segítségével utólag is számíthatjuk – sőt, e becslés esetenként pontosabb eredményt szolgáltat, mint a beépített mérőrendszer. A térinformatikai szoftverek általában fel vannak készítve erre: a külső tájékozás hat adatának megadása helyett felajánlják azok becslésének lehetőségét is.

Ehhez földi illesztőpontoknak a majdan kívánt (de mindenképp vetített, tehát nem földrajzi) koordinátarendszerben érvényes helyét és magasságát kell megadnunk, továbbá azonosítanunk kell ezen pontokat a légifelvételen is. A pontok magasságának megfelelő pontosságú megadása itt nagyon lényeges, az nagyban befolyásolja a paraméterbecslés pontosságát. A pontmagasságok becsülhetők domborzati modellből, de leolvashatók domborzati térképekről is. Készüljünk fel arra, hogy az illesztőpontokból történő paraméterbecslés kifejezetten „babra munka”, sok-sok pontosítással, nehéz pontazonosításokkal, már felvett pontok ki- és bekapcsolásával a becslési folyamatban (55. és 56. ábrák).



55. ábra. Illesztőpontok definiálása orto-rectifikációnál. A legjobban illeszkedő pontok megválasztása sokszor hosszadalmas munkát igényel.



56. ábra. Orto-rectifikációnál az illesztőpontok magassági helyzetét is meg kell adnunk.

A bevitt pont-adatok (tehát pontonként a három pozíció-adat és a két kép-koordináta) és a már megadott belső tájékozás alapján a szoftver kiszámítja a külső tájékozás hat paraméterét, és azt meg is adja nekünk. A paraméterbecslést azonban sokszor komoly hiba terheli, így minél sűrűbb és a teljes képre kiterjedő, és valóban egyértelmű illesztőpont-hálózatot kell kijelölnünk. A becslés pontossága annál jobb lesz, minél közelebb állt a kamera optikai tengelye a függőlegeshez – a horizontot is tartalmazó felvételhez a külső tájékozás elemei a legritkább

esetben becsülhetők meg! (Ez nem jelenti azt, hogy a horizontot is tartalmazó részt digitálisan levághatjuk; ezzel ugyanis a belső tájékozási adatokat veszítenénk el).

9.4 A kamera-adatok megadása kompaktgépek esetén

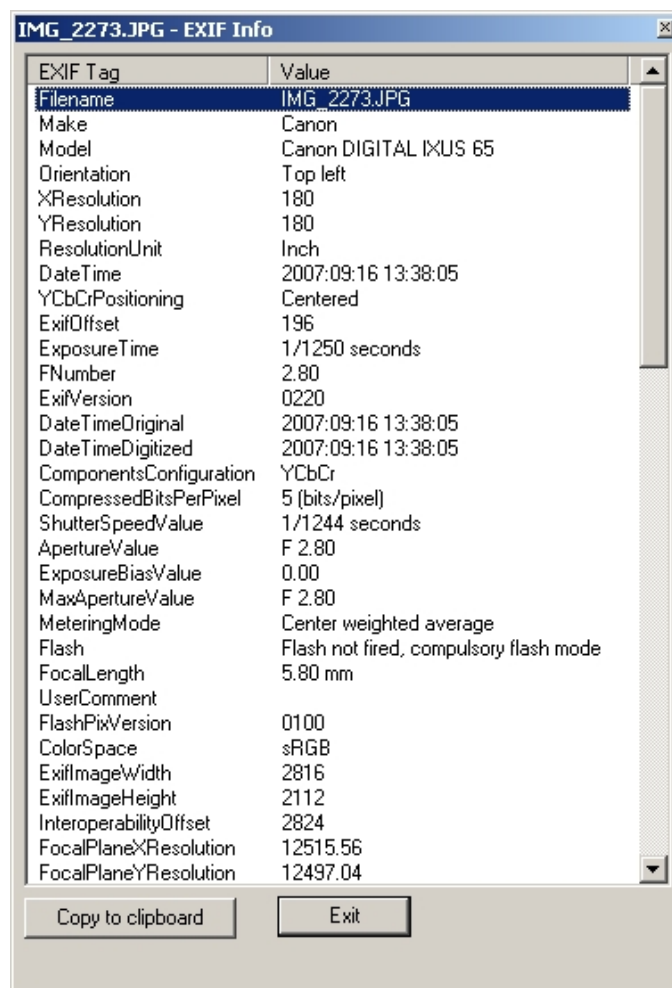
Itt jegyezzük meg, hogy a fenti adatokat jellemzően professzionális légifényképező eszközök esetében használják. Ezek több deciméteres fókusztávolsággal és negatív mérettel dolgoztak, állandó geometriai beállítások (belső adatok) mellett. Nincs azonban akadálya annak, hogy kézi kompakt hobbigépekkel repülőeszközök fedélzetéről készített felvételt ortorektifikáljunk (57. és 58. ábrák). Az ilyen fényképezőgépek fókusztávolsága változtatható és képenként eltérő lehet. A fókusztávolságot a digitális felvételen tárolt meta-adatok (gyakorlatilag az ún. EXIF-információk; 59. ábra) tartalmazzák. A fókusztávolság változtatása fix értékek mellett lehetséges, és emiatt azonos gép esetén is többféle kameramodellt kell definiálnunk, minden egyes fókusztávolság-értékhez egyet.



57. ábra. Kompakt digitális fényképezőgéppel készített légifotó (Hegyhátsál, Vas megye, Barcza Zoltán szívességéből).



58. ábra. Az előző fénykép rektifikált változata topográfiai térképre illesztve. Az optikai tengely nagyon eltér a nadírtól: ezért a furcsa alak – viszont az illeszkedés a legtávolabbi részen is elfogadható.



EXIF Tag	Value
Filename	IMG_2273.JPG
Make	Canon
Model	Canon DIGITAL IXUS 65
Orientation	Top left
XResolution	180
YResolution	180
ResolutionUnit	Inch
DateTime	2007:09:16 13:38:05
YCbCrPositioning	Centered
ExifOffset	196
ExposureTime	1/1250 seconds
FNumber	2.80
ExifVersion	0220
DateTimeOriginal	2007:09:16 13:38:05
DateTimeDigitized	2007:09:16 13:38:05
ComponentsConfiguration	YCbCr
CompressedBitsPerPixel	5 (bits/pixel)
ShutterSpeedValue	1/1244 seconds
ApertureValue	F 2.80
ExposureBiasValue	0.00
MaxApertureValue	F 2.80
MeteringMode	Center weighted average
Flash	Flash not fired, compulsory flash mode
FocalLength	5.80 mm
UserComment	
FlashPixVersion	0100
ColorSpace	sRGB
ExifImageWidth	2816
ExifImageHeight	2112
InteroperabilityOffset	2824
FocalPlaneXResolution	12515.56
FocalPlaneYResolution	12497.04

59. ábra. A fényképhez tartozó EXIF-információbázis. A gép típusa a CCD-lapka típusát (6. táblázat) teszi kikereshetővé, a fókusz távolság (Focal length) pedig szintén a kameraadatokhoz szükséges.

A köznapi életben szokásos fényképezőgépekben nincsenek keretjelek, ezért azokat más pozíciókkal kell helyettesítenünk. Praktikusan a felvétel sarokpontjait használhatjuk kerekjelnek. Ez a módszer nagyon pontos a hagyományos negatív- vagy diafilmre fényképezett légifotók esetén, viszont meglepően pontos a digitális kameráknál. A film esetén a gondot egyrészt az jelenti, hogy – bár az átlagos felvételek jó minőségéhez gondosan síkba feszíti a filmet a mechanika, maradhatnak kisebb egyenetlenségek, illetve a filmkockák nem teljesen pontosan ugyanabba a pozícióba kerülnek fényképezéskor a gép mechanikájához képest. További hibaforrás az előhívás: ha nem a teljes filmkockát hívjuk elő, akkor máris elvesztettük a belső tájékozást. Ezek a problémák nem fordulnak elő a digitális gépek esetében: a filmkockát kiváltó CCD-lapka mérete a gépre jellemző állandó, így sarkainak pozíciója a képközponthoz képest megadható, és minden egyes képen a négy sarokpixel külső sarkát megadva jutunk pontos belső tájékozáshoz (6. táblázat).

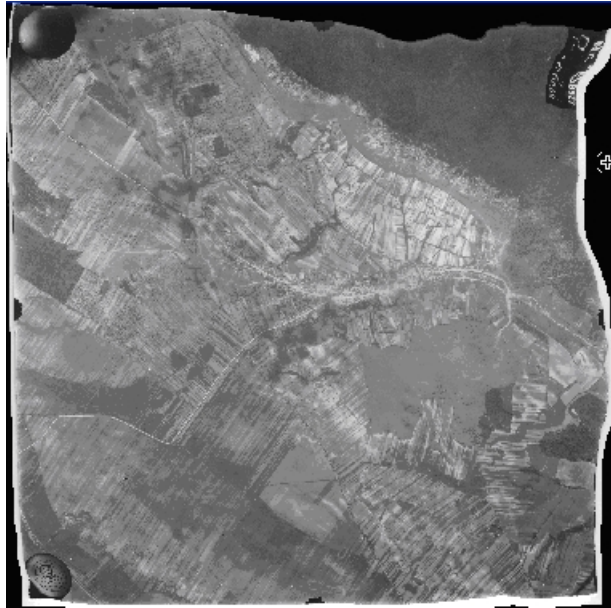
Érzékelő típusa	Szélesség (mm)	Magasság (mm)
1/10"	1,28	0,96
1/8"	1,6	1,2
1/6"	2,4	1,8
1/4"	3,2	2,4
1/3.6"	4	3
1/3.2"	4,54	3,42
1/3"	4,8	3,6
1/2.7"	5,37	4,04
1/2.5"	5,76	4,29
1/2.3"	6,17	4,55
1/2"	6,4	4,8
1/1.8"	7,18	5,32
1/1.7"	7,6	5,7
1/1.6"	8,08	6,01
2/3"	8,8	6,6
1"	12,8	9,6
1.5"	18,7	14

6. táblázat. A digitális fényképezőgépekben használt CCD-érzékelők valós fizikai mérete, kamera-adatok megadásához.

9.5 Az ortorektifikáció végrehajtása

Amennyiben a belső és a külső tájékozás összes paramétere a fentiek szerint rendelkezésre áll, már csak a művelet lényegi része van hátra. Ennek során az azt elvégző algoritmus a terepmagasság ismeretében minden egyes képi pixelre kiszámítja annak valós térbeli helyzetét, majd ennek alapján a kép adatait a felhasználó által megadott koordináta-rendszerbe újramintavételezi. E lépéshez tudnunk kell a tereppontok magasságát is: ezért kérnek az algoritmust futtató szoftverek domborzat- vagy felszínmodell is a végrehajtáshoz. Meg kell jegyezzük, hogy a magassági referencia pontossága e lépés esetén kicsit gyengébb is lehet, mint a külső tájékozás becsléséhez használt illesztőpontok esetében. Míg ott egy adat pontossága a teljes kép torzítását befolyásolja, itt csak az adott pixel közvetlen környezetét.

Eredményünket mindig ellenőrizzük, például valamilyen (az illesztőpontok meghatározására is használt) topográfiai térkép segítségével. Számítsunk rá, hogy a függőleges irányhoz közelebbi képsarok környékén lesz a legpontosabb az illeszkedés, míg az ettől a térképen akár nagyon távolra elcsúszó távoli saroknál esetleg elfogadhatatlanul gyenge fedést kapunk. Ez utóbbit a külső tájékozás elemeinek pontatlan becslése okozza. Megpróbálkozhatunk újabb becsléssel, más, vagy további illesztőpontokat definiálva, de dönthetünk úgy is, hogy az eredményképnek csak a számunkra elegendően pontos részét tartjuk meg (60. ábra).



60. ábra. Az illesztett légifotó széle a domborzat miatt szabálytalan vonalú (Keszölc).

9.6 Az alkalmazott felszínmodell hatása

A fényképezett területről a legtöbbször domborzatmodell áll rendelkezésre: ez több-kevesebb pontossággal a terep magasságát definiálja. A légifelvétel azonban sok esetben nem magát a talajt, hanem az azt fedő növényzet (erdők, érett szántóföldi kultúrák) vagy épületek tetőszintjét mutatják. Amennyiben ezt, például rendelkezésre nem álló épület-adatok miatt, figyelmen kívül hagyjuk, a felvétel illeszkedése a talajszinten fog megvalósulni, az épületek teteje ehhez képest több méterrel eltolódhat (61. ábra).



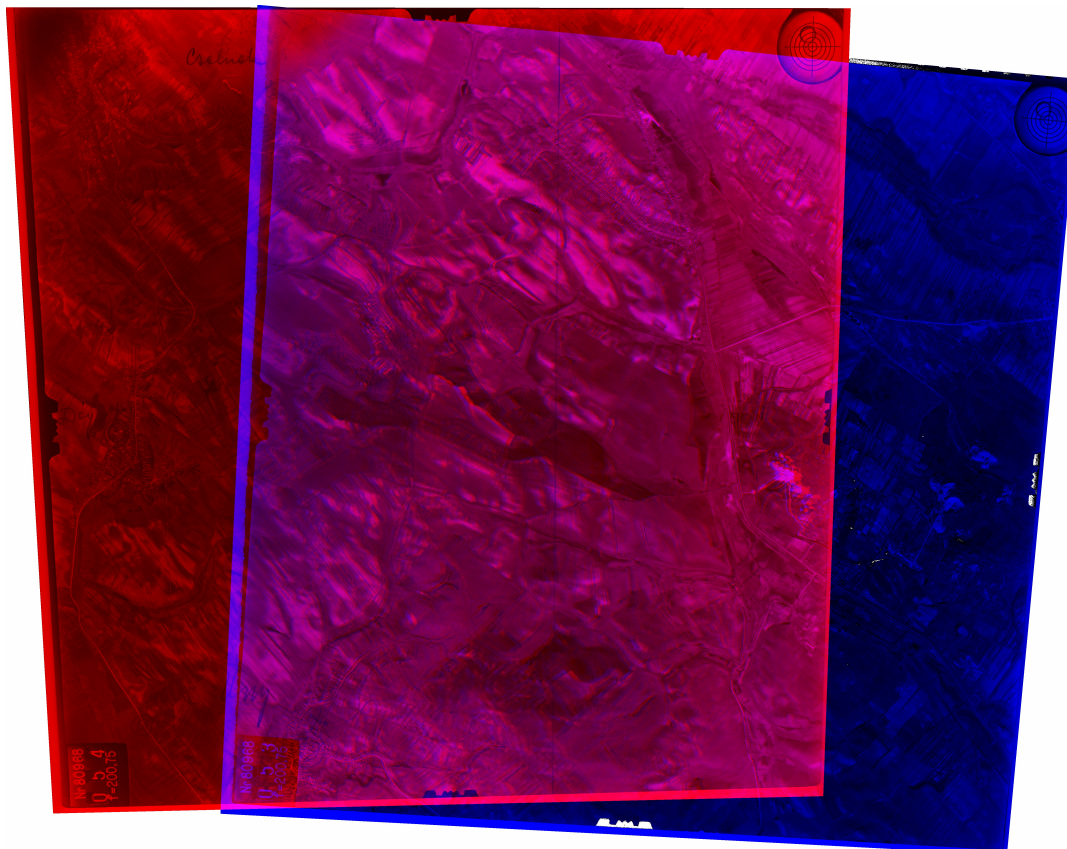
61. ábra. Ha a magassági modell nem tartalmazza az épületek magasságát, az illesztés csak a terepszinten lesz pontos (Róma).

Pontos, az épületek magasságviszonyait is tartalmazó modell esetén az eredménykép minden pontja vízszintes helyzetbe kerül, ún. valódi ortofotót (*true* ortofotót) kapunk. Ebben az esetben viszont az épületek (pl. magasabb

tornyok) által kitakart terep helyén adathiány jelenik meg. Ez nem hiba, hanem a felvételi geometria következménye: az épületek által kitakart tereprészekről valóban nincs információ a felvételen.

9.7 Digitális anaglif kép készítése

Van olyan alkalmazás, amelyben a domborzat torzító hatását nem távolítjuk el, hanem éppen annak megtartását használjuk ki. Az anaglif kép két, különböző pontból készített légifelvétel által fedett terület átfedő részére (metszetére) készíthető el. A két felvétel (fekete-fehér változatát) különböző színre (például: kék és vörös) színezzük és egy közös, színes képet készítünk azokból. Amennyiben ezeknek a színeknek megfelelően színezett (pl. kék és vörös fóliákkal ellátott) szemüvegben nézzük a képet, agyunkban a felvétel térhatásúként jelenik meg (62. ábra).



62. ábra. Anaglif kép: hasonló színű szemüvegben át a felvétel térhatásában látszik.

Ehhez nem kell mást tenni, mint a két felvételt fel kell dolgozzuk, azonban az ortorektifikációs lépés végrehajtásához a két képen azonos magasságú, domborzat nélküli vízszintes síkot kell domborzati modellként használni. Ismétlem: csak e lépés végrehajtásánál: a külső tájékozási elemek becsléséhez itt is szükséges az illesztőpontok magassági helyzetének ismerete. A megjelenítéskor lényeges, hogy az anaglif kép megjelenítés vagy nyomtatás szerinti bal és jobb oldalára eső felvételt a szemüveg eltérő bal és jobb fóliákkal azonos színnel készítsük el; ha ezt felcseréljük, a felvétel csak a 180 fokkal elforgatva mutat térhatást.

9.8 Fényképezett térképek és dokumentumok ortorektifikálása

A fenti módszerrel nemcsak a repülőgépek fedélzetéről készített képeket illeszthetjük be egy kívánt koordináta-rendszerbe. Amikor a fényképezőgépet kezünkben tartva készítünk felvételt egy dokumentumról vagy térképről, a céltárgy a fentiekkel azonos módon szenved perspektív torzulást. Amikor a síkbeli objektum eredeti geometriai viszonyait akarjuk helyreállítani, vagy georeferálni szeretnénk egy lefényképezett térképszelvényt a saját vetületében, akkor az e fejezetben megismert módszert alkalmazhatjuk.

Szöveges dokumentumok esetében – az illesztőpontok hiánya miatt – ez általában nem egyszerű. Szükség esetén ceruzával halvány, a dokumentumot nem rongáló apró jeleket helyezhetünk el előre kimért pontokon – illesztőpontoknak. A fénykép elkészítése után e jeleket eltávolíthatjuk. Az illesztőpontokat ugyanúgy választjuk ki, mint ahogy azt a 6. fejezetben tárgyaltuk. A különbség az, hogy a rektifikációt nem az ottani, hanem a mostani fejezetben leírt módon kell végrehajtanunk. Általában nem rendelkezünk információval a lefényképezett anyag magasságáról (gyűrődéséről), ezért az illesztőpontok magasságaként zérust adunk meg, ugyanúgy, ahogy a “domborzatmodell” pixelértékeiként is. Ezzel a módszerrel tudjuk pontosan beilleszteni a koordináta-rendszerünkbe a fényképezett térképszelvényeket.

10. fejezet - Felhasznált és ajánlott irodalom

Ádám, J. (1982): On the determination of similarity coordinate transformation parameters. *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini* 41: 283-290.

Ádám J. (2000): Magyarországon alkalmazott geodéziai vonatkoztatási rendszerek vizsgálata. *Geodézia és Kartográfia* 52/12:9-15.

Ádám J. (2009): Geodéziai alapponthálózataink és vonatkoztatási rendszereink. *Geodézia és Kartográfia jubileumi különszám*, 61: 6–20.

Ádám J., Bányai L., Borza T., Busics Gy., Kenyeres A., Krauter A., Takács B. (2004): Műholdas helymeghatározás. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 458 p.

Biró P., Ádám J., Völgyesi L., Tóth Gy.: A felsőgeodézia elmélete és gyakorlata. Egyetemi tankönyv és kézikönyv. HM Zrínyi Térképészeti és Kommunikációs Szolgáltató Nonprofit Kft., Budapest, 2013. 508 p.

Badekas, J. (1969): Investigations related to the establishment of a world geodetic system. *Report 124*, Department of Geodetic Science, Ohio State University, Columbus.

Biró P. (1985): Felsőgeodézia. Tankönyvkiadó, Budapest, 196 p.

Borkowski, K. M. (1989): Accurate algorithms to transform geocentric to geodetic coordinates. *Bulletin Géodésique* vol. 63: 50-56.

Bowring, B. (1976): Transformation from spatial to geographical coordinates. *Survey Review* XXIII:323-327.

Burša, M. (1962): The theory for the determination of the non-parallelism of the minor axis of the reference ellipsoid and the inertial polar axis of the Earth, and the planes of the initial astronomic and geodetic meridians from the observation of artificial Earth satellites. *Studia Geophysica et Geodetica* 6:209-214.

Busics Gy. (1996): Közelítő transzformációk a GPS és az EOVS koordináta-rendszerei között. *Geodézia és Kartográfia* 48(6): 20-26.

Defense Mapping Agency (1986): Department of Defense World Geodetic System 1984 – Its Definition and Relationships With Local Geodetic Systems. Technical Report 8350.2. St. Louis, Missouri, USA.

Defense Mapping Agency (1990): Datums, Ellipsoids, Grids and Grid Reference Systems. DMA Technical Manual 8358.1. Fairfax, Virginia, USA

Homoródi L. (1953): Régi háromszögelési hálózataink elhelyezése és tájékozása. *Földméréstani Közlemények* 5: 1-18.

Hotine, M. (1947): The orthometric projection of the spheroid. *Empire Survey Review* 9: 25-166.

Hönyi E. (1967): Két földi ellipszoid relatív helyzetének meghatározása a háromszögelési hálózat alapján. *Geodézia és Kartográfia* 19:263-268.

ICW (szerző nélkül, 1884): International Conference Held at Washington for the Purpose of Fixing a Prime Meridian and a Universal Day. October 1884, Protocols of the Proceedings, Gibson Bros., Printers and Bookbinders, 212 p. Elérhetőség: The Project Gutenberg EBook of ~, e-book #17759

Kis K. (2002): Általános geofizikai alapismeretek. ELTE Eötvös Kiadó, 384 p.

Mélykúti G., Alabér L. (2010): Magyarországi térképezések története. Nemzeti Digitális Tankönyvtár, Nyugat-Magyarországi Egyetem.

- Mihály Sz. (1995): A magyarországi geodéziai vonatkozási és vetületi rendszerek leíró katalógusa, 4. kiadás, FÖMI, Budapest.
- Mihály Sz. (1996): Description Directory of the Hungarian Geodetic References. *GIS4*:30-34.
- Molnár G., Timár G. (2002): (2002): Az EOV-koordináták nagy pontosságú közelítése Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetülettel. *Geodézia és Kartográfia* **54**(3): 18-22.
- Molnár G., Timár G. (2005): Determination of the parameters of the abridging Molodensky formulae providing the best horizontal fit. *Geophysical Research Abstracts* **7**: 01018.
- Molnár, G., Timár, G. (2009): Mosaicking of the 1:75,000 sheets of the Third Military Survey of the Habsburg Empire. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica* **44**(1): 115-120.
- Molodensky M.S., Eremeev, V.F., Yurkina, M.I. (1960): Metody izucheniya vnesnego gravitatsionnogo polya i figuri Zemli. Tr. *CNIIGAiK*, vyp. **131**., Moszkva.
- Papp, E., Szűcs, L., Varga, J. (1997): GPS network transformation into different datums and projection systems. *Reports on Geodesy*, Warsaw University of Technology, No. 4 (27).
- Papp E., Szűcs L., Varga J. (2002): Hungarian GPS network transformation into different datums and projection systems. *Periodica Polytechnica Ser. Civ. Eng.* **46**(2): 199-204.
- Snyder, John P. (1987): Map projections – a working manual. *USGS Prof. Paper* **1395**: 1-262.
- Takács B. (2001): EOV koordináták beállítása GARMIN vevőkön. Elektronikus jegyzet, http://www.agt.bme.hu/staff_h/bence/eov_gar.html - utolsó elérés: 2013. január 2.
- Timár, G. (2004): GIS integration of the second military survey sections – a solution valid on the territory of Slovakia and Hungary. *Kartografické listy* **12**: 119-126.
- Timár G. (2007): A ferrói kezdőmeridián. *Geodézia és Kartográfia* **59**(12): 3-7.
- Timár G., Molnár G. (2002): Az HD72→ETRS89 transzformáció szabványosítási problémái. *Geodézia és Kartográfia* **54**(12): 28-30.
- Timár, G., Danišik, M. (2003): Aproximácia Křovákovo zobrazenia Lambertovým konformným kuželovým zobrazením na území Slovenska pre potreby GIS a((nbrsp))GPS. *Kartografické listy* **11**: 100-102.
- Timár G., Molnár G., Pásztor Sz. (2002): A WGS84 és HD72 alapfelületek közötti transzformáció Molodensky-Badekas-féle (3 paraméteres) meghatározása a gyakorlat számára. *Geodézia és Kartográfia* **54**(1): 11-16.
- Timár G., Varga J., Székely B. (2003): Ismeretlen paraméterezésű valódi kúpvetületen készült térkép térinformatikai rendszerbe integrálása. *Geodézia és Kartográfia* **55**(2): 8-11.
- Varga J. (1982): Átszámítás az egységes országos vetületi rendszer (EOV) és a korábbi vetületi rendszereink között. *Geodézia és Kartográfia* **34**(2):
- Varga J. (2000): Vetülettan. Műegyetemi Kiadó, Bp., 296 p.
- Völgyesi, L., Tóth, Gy., Varga, J. (1996): Conversion between Hungarian Map Projection Systems. *Periodica Polytechnica Civ. Eng.* **40**(1): 73-83.
- Wolf, H. (1963): Geometric connection and re-orientation of three-dimensional triangulation nets. *Bulletin Géodésique* **68**:165-169.
- Zlinszky, A., Mücke, W., Lehner, H., Briese, Ch., Pfeifer, N. (2012): Categorizing Wetland Vegetation by Airborne Laser Scanning on Lake Balaton and Kis-Balaton, Hungary. *Remote Sensing* **4**(6): 1617-1650.

A. függelék - Függelék: a dátumparaméterek becslésének eljárásai

Az áthidaló Mologyenszkij-formulák az alapfelületi ellipszoidok egymáshoz képest értelmezett relatív helyzetét a középpontokat összekötő vektor 3 eltolási komponensével jellemzik, és nem veszik figyelembe az esetleges eltérő tájékozást ill. a méretarány kis eltérését, így *háromparaméteres dátumtranszformáció* néven is ismertek. Az itt elhanyagolt tényezőket is tekintetbe veszi a Burša-Wolf eljárás, amely a 3 eltolási tag mellett 3 elforgatási és egy méretarány-paramétert is tartalmazva kapja a *hétparaméteres dátumtranszformáció* elnevezést. Mindkét transzformáció paramétereit (és a hatványpolinom-sorokkal történő átváltásait is) a gyakorlatban azonos pontok, legtöbbször a kiinduló- és a célrendszerben is ismert koordinátájú geodéziai alappontok felhasználásával határozhatjuk meg.

A jelen munka célja: ismert alappontsokaság koordinátái alapján

- a vízszintes értelemben legjobb illeszkedést adó Mologyenszkij-paraméterek, ill.
- a legjobb térbeli illeszkedést biztosító Burša-Wolf-paraméterek

meghatározási módjának ismertetése.

A legjobb vízszintes illesztést biztosító áthidaló Mologyenszkij-paraméterek becslése

Az eljárás – nevéből is láthatóan – képes közvetlenül a kiinduló és a céldátumon értelmezett ellipszoidi koordináták, ill. ellipszoidi magasságok között kapcsolatot teremteni. A vizsgálatba vont két dátum közötti eltolási paraméterek meghatározásához tehát ez esetben azonos pontok ellipszoidi koordinátáit igényli, mind a kiinduló, mind a céldátumon. A gyakorlatban általában alacsonyabb rendű geodéziai alappontokat használunk az azonos pontokként, amelyek koordinátái legtöbbször valamely jól definiált vetületi rendszerben adottak. Ezért itt szükséges az inverz vetületi egyenletek alkalmazása, hogy a megfelelő kiinduló adatokhoz jussunk.

Az áthidaló Mologyenszkij-formulák:

$$\Delta\Phi'' = \frac{-dX \sin \Phi \cos \Lambda - dY \sin \Phi \sin \Lambda + dZ \cos \Phi + (a \cdot df + f \cdot da) \sin 2\Phi}{M \sin 1''} \quad (1)$$

$$\Delta\Lambda'' = \frac{-dX \sin \Lambda + dY \cos \Lambda}{N \cos \Phi \sin 1''} \quad (2)$$

$$\Delta h = dX \cos \Phi \cos \Lambda + dY \cos \Phi \sin \Lambda + (a \cdot df + f \cdot da) \sin^2 \Phi - da \quad (3)$$

ahol $M(\Phi) = a \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}}$ a meridiángörbületi sugár; $N(\Phi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi}}$ a harántgörbületi sugár, $\Delta\Phi''$ és $\Delta\Lambda''$ a kiinduló ill. a céldátumon értelmezett szélesség- ill. hosszúságkülönbség szögmásodpercben, Δh a kiinduló és a céldátumon értelmezett ellipszoidmagasságok különbsége, f a kiinduló ellipszoid lapultsága, da és df a kiinduló és céllipszoidok félnagy tengely- ill. lapultság-eltérése, e az ellipszoid excentricitása.

Az áthidaló Mologyenszkij transzformáció dX , dY és dZ paramétereinek meghatározásához azonos pontokra van szükségünk. Az azonos pontok kiinduló (1) és célrendszerbeli (2) ellipszoidi koordinátáinak különbségének az adott, illetve a transzformáció segítségével számított értékei eltérésének négyzetösszegét akarjuk minimalizálni. Ez megegyezik a mért és számított mennyiségek eltérésének a négyzetösszegének a minimalizálásával. Ennek matematikai megfogalmazása az alábbi képlet.

$$\sum_{i=1}^N \left(\Phi_2^{(i)} - \Phi_1^{(i)} + \Delta\Phi^{(i)}(\Phi_1, \Lambda_1) \right)^2 + \sum_{i=1}^N \left(\cos\Phi_1^{(i)} \cdot \left(\Lambda_2^{(i)} - \Lambda_1^{(i)} + \Delta\Lambda^{(i)}(\Phi_1, \Lambda_1) \right) \right)^2 = \min \quad (4)$$

A képletben szerepel, hogy a Λ – ellipszoidi hosszúság – értékek eltérését a $\cos(\Phi)$ skálázó taggal is megszoroztuk. A skálázó tagot azért kell alkalmazni, hogy ne egyszerűen az ellipszoidi koordináták eltérésének a minimumát, hanem az ellipszoidkoordinátákból a vetületi egyenletek segítségével számított síkkordináták eltérésének a minimumát kapjuk. A skálázó tag alkalmazásának a hatására lesz az azonos pontokban a síkkordináták számított és mért értékeinek szórása (közel) azonos az X és Y koordináták esetében. A síkbeli eltérésekre vonatkozó minimum feltétele az, hogy az (1) és (2) egyenletekben fellépő eltérések négyzetösszegeinek a paraméterek szerinti parciális deriváltjai nullák legyenek.

A négyzetösszegek:

$$\sum_{i=1}^N \left(\Delta\bar{\Phi}^{(i)} - \Delta\Phi^{(i)}(\Phi_1^{(i)}, \Lambda_1^{(i)}) \right)^2 + \sum_{i=1}^N \left(\cos\Phi_1^{(i)} \cdot \left(\Delta\bar{\Lambda}^{(i)} - \Delta\Lambda^{(i)}(\Phi_1^{(i)}, \Lambda_1^{(i)}) \right) \right)^2 = \min \quad (5)$$

A parciális deriváltak pedig:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{dX}} : & \sum_{i=1}^N -2 \Delta\bar{\Phi}^{(i)} \cdot \frac{-\sin\Phi \cdot \cos\Lambda}{M \sin 1''} + 2 \cdot \frac{-\mathbf{dX} \sin\Phi \cos\Lambda - \mathbf{dY} \sin\Phi \sin\Lambda + \mathbf{dZ} \cos\Phi + (a \cdot df + f \cdot da) \cdot \sin 2\Phi}{M \sin 1''} \cdot \frac{-\sin\Phi \cdot \cos\Lambda}{M \sin 1''} + \\ & \sum_{i=1}^N -2 \cdot \cos\Phi \cdot \Delta\bar{\Lambda}^{(i)} \cdot \frac{-\sin\Lambda}{N \cos\Phi \sin 1''} + 2 \cdot \cos\Phi \cdot \frac{-\mathbf{dX} \sin\Lambda + \mathbf{dY} \cos\Lambda}{N \cos\Phi \sin 1''} \cdot \frac{-\sin\Lambda}{N \cos\Phi \sin 1''} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{dY}} : & \sum_{i=1}^N -2 \Delta\bar{\Phi}^{(i)} \cdot \frac{-\sin\Phi \cdot \sin\Lambda}{M \sin 1''} + 2 \cdot \frac{-\mathbf{dX} \sin\Phi \cos\Lambda - \mathbf{dY} \sin\Phi \sin\Lambda + \mathbf{dZ} \cos\Phi + (a \cdot df + f \cdot da) \cdot \sin 2\Phi}{M \sin 1''} \cdot \frac{-\sin\Phi \cdot \sin\Lambda}{M \sin 1''} + \\ & \sum_{i=1}^N -2 \cdot \cos\Phi \cdot \Delta\bar{\Lambda}^{(i)} \cdot \frac{\cos\Lambda}{N \cos\Phi \sin 1''} + 2 \cdot \cos\Phi \cdot \frac{-\mathbf{dX} \sin\Lambda + \mathbf{dY} \cos\Lambda}{N \cos\Phi \sin 1''} \cdot \frac{\cos\Lambda}{N \cos\Phi \sin 1''} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{dX}} : & \sum_{i=1}^N 2 \Delta\bar{\Phi}^{(i)} \cdot \frac{\cos\Phi}{M \sin 1''} + 2 \cdot \frac{-\mathbf{dX} \sin\Phi \cos\Lambda - \mathbf{dY} \sin\Phi \sin\Lambda + \mathbf{dZ} \cos\Phi + (a \cdot df + f \cdot da) \cdot \sin 2\Phi}{M \sin 1''} \cdot \frac{\cos\Phi}{M \sin 1''} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

A parciális deriváltakra felírt egyenletekből a paraméterek, $\mathbf{dX}, \mathbf{dY}, \mathbf{dZ}$, a szummázások elé kiemelhetők, továbbá a $C = (a \cdot df + f \cdot da)$ helyettesítést alkalmazva az egyenletek a következő alakra hozhatók:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc} \left(\frac{\sin\Phi \cos\Lambda}{M \sin 1''} \right)^2 + \frac{\cos\Phi (\sin\Lambda)^2}{(N \cos\Phi \sin 1'')^2} & \frac{\sin^2\Phi \sin\Lambda \cos\Lambda}{(M \sin 1'')^2} + \frac{\cos\Phi \sin\Lambda \cos\Lambda}{(N \cos\Phi \sin 1'')^2} & \frac{-\sin\Phi \cos\Phi \cos\Lambda}{(M \sin 1'')^2} \\ \frac{\sin^2\Phi \sin\Lambda \cos\Lambda}{(M \sin 1'')^2} + \frac{\cos\Phi \sin\Lambda \cos\Lambda}{(N \cos\Phi \sin 1'')^2} & \left(\frac{\sin\Phi \sin\Lambda}{M \sin 1''} \right)^2 + \frac{\cos\Phi (\cos\Lambda)^2}{(N \cos\Phi \sin 1'')^2} & \frac{-\sin\Phi \cos\Phi \sin\Lambda}{(M \sin 1'')^2} \\ \frac{-\sin\Phi \cos\Phi \cos\Lambda}{(M \sin 1'')^2} & \frac{-\sin\Phi \cos\Phi \sin\Lambda}{(M \sin 1'')^2} & \left(\frac{\cos\Phi}{M \sin 1''} \right)^2 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{dX} \\ \mathbf{dY} \\ \mathbf{dZ} \end{bmatrix} = \\ & = \left[\begin{array}{c} \frac{-\Delta\Phi \sin\Phi \cos\Lambda}{M \sin 1''} + \frac{C \sin 2\Phi \sin\Phi \cos\Lambda}{(M \sin 1'')^2} - \frac{\Delta\Lambda \sin\Lambda}{N \sin 1''} \\ \frac{-\Delta\Phi \sin\Phi \sin\Lambda}{M \sin 1''} + \frac{C \sin 2\Phi \sin\Phi \sin\Lambda}{(M \sin 1'')^2} + \frac{\Delta\Lambda \cos\Lambda}{N \sin 1''} \\ \frac{-\Delta\Phi \cos\Phi}{M \sin 1''} - \frac{C \sin 2\Phi \cos\Phi}{(M \sin 1'')^2} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

A (7) egyenletben minden koordináta ill. származtatott mennyiség (görbületi sugarak, stb.) az első rendszerre vonatkozik. Minden vektor- és mátrixelem valójában a (7) egyenletbe beírt kifejezéseknek az ismert pontok értékeire vonatkozó összeget jelent, amelyet azért nem tüntettünk fel, mert úgy az egyenlet áttekinthetatlenné, és nyomdailag már kezelhetatlenné válna. $\Delta\Phi, \Delta\Lambda$ jelentése az (1) és (2) egyenleteknek megfelelő.

A (7) egyenlet

$$\overline{\overline{\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}}} \quad (8)$$

alakú inhomogén lineáris egyenletrendszer. Ennek megoldása

$$\overline{\overline{\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}}} \quad (9)$$

ahol \mathbf{A}^{-1} az \mathbf{A} matrix inverze.

A keresett dX , dY és dZ paramétereket az \mathbf{x} megoldásvektor tartalmazza.

A Burša-Wolf paraméterek becslése

Amint a bevezető részben említettük, a Burša-Wolf-módszer az azonos pontok eltérő rendszerben vett geocentrikus koordinátái között teremt kapcsolatot. A geocentrikus koordináták kiszámítása az ellipszoidi koordináták és ellipszoidi magasság ismeretében egyszerűen megtehető:

$$X = (N + h) \cos \Phi \cos \Lambda \quad (10)$$

$$Y = (N + h) \cos \Phi \sin \Lambda \quad (11)$$

$$Z = [N(1 - e^2) + h] \sin \Phi \quad (12)$$

ahol Φ , Λ ill. h a pont földrajzi koordinátái és ellipszoidi magassága, X , Y és Z pedig a geocentrikus koordináták, a többi paraméter értelmezését korábban megtettük. Az alább ismertetett számítások elvégzéséhez az azonos pontok X , Y , Z geocentrikus koordinátáit kell megadnunk.

A Burša-Wolf transzformáció egyenlete:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} + (1 + \kappa) \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_Z & -\varepsilon_Y \\ -\varepsilon_Z & 1 & \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y & -\varepsilon_X & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (13)$$

ahol X' , Y' és Z' a céldátumon értelmezett geocentrikus koordináták, dX , dY és dZ az eltolási, ε_X , ε_Y és ε_Z az elforgatási paraméterek, κ a méretaránytényező. Itt ismét megjegyezzük, hogy a (13) egyenletben szereplő mátrix elforgatási tagjainak előjelezése kétféleképpen is történhet. Ha az előjelezés az egyenletben leírt módon történik, akkor a koordináta-rendszer elforgatása a (*coordinate frame rotation*) konvenció szerinti, amennyiben azzal ellentétesen, akkor a helyvektor elforgatása a (*position vector rotation*) konvenció szerinti. Bár az ISO19111 szabványtervezet az utóbbit ajánlja, a térinformatikai szoftverek túlnyomó többsége az előbbi szerinti paraméterezést teszi csak lehetővé. A további levezetésekben mi is ez utóbbit (a 13 képlet szerinti) követjük.

A cél tehát olyan transzformációs együtthatók meghatározása amelyek segítségével az azonos pontok célrendszerbeli *adott koordinátái* és a kiinduló rendszerbeli *adott koordinátákból* a transzformációval *számított célrendszerbeli koordinátáinak eltérése minimális*. Ez matematikailag az alábbi formába önthető:

$$\sum_{j=1}^{M=2,3} \sum_{i=1}^N \left(\tilde{X}_{(2),j}^{(i)} - X_{(2),j}^{(i)} \left(\tilde{X}_{(1),1}^{(i)}, \tilde{X}_{(1),2}^{(i)}, \dots \right) \right)^2 = \min \quad (14)$$

A (14) egyenletben a \sim jel az ismert adatra (adott koordinátákra) utal, az alsó index a kiinduló (1) illetve a célrendszerre (2). A i index az azonos pontokra vonatkozik, számuk N , az j index pedig a dimenzióra, vagyis a koordináták számára utal – síkkordináták esetén ez 2, térbeli koordináták esetén pedig 3.

A Helmert transzformáció (13) egyenleteit a

$$\begin{aligned} A &= (1 + \kappa) \\ B &= -(1 + \kappa) \cdot \gamma \\ C &= (1 + \kappa) \cdot \beta \\ D &= -(1 + \kappa) \cdot \alpha \end{aligned} \tag{15}$$

behelyettesítésekkel módosítva

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{(2)} &= \mathbf{dX} + A \cdot \mathbf{X}_{(1)} + B \cdot \mathbf{Y}_{(1)} + C \cdot \mathbf{Z}_{(1)} \\ \mathbf{Y}_{(2)} &= \mathbf{dY} - B \cdot \mathbf{X}_{(1)} + A \cdot \mathbf{Y}_{(1)} + D \cdot \mathbf{Z}_{(1)} \\ \mathbf{Z}_{(2)} &= \mathbf{dZ} - C \cdot \mathbf{X}_{(1)} - D \cdot \mathbf{Y}_{(1)} + A \cdot \mathbf{Z}_{(1)} \end{aligned} \tag{16}$$

adódik. A (16) transzformációs egyenletben a meghatározandó paraméterek, (\mathbf{dX} , \mathbf{dY} , \mathbf{dZ} , A , B , C , D) első hatványai szerepelnek szorzótagokként, vagyis a fenti egyenletek a paraméterekre nézve lineárisak. Ebben az esetben a paraméterek meghatározására ismét alkalmazható a Gauss-féle legkisebb négyzetek módszere. A minimumfeltétel konkrét alakja:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N [\mathbf{X}_{(2)}^{(i)} - (\mathbf{dX} + A \cdot \mathbf{X}_{(1)}^{(i)} + B \cdot \mathbf{Y}_{(1)}^{(i)} + C \cdot \mathbf{Z}_{(1)}^{(i)})]^2 + \\ &\sum_{i=1}^N [\mathbf{Y}_{(2)}^{(i)} - (\mathbf{dY} - B \cdot \mathbf{X}_{(1)}^{(i)} + A \cdot \mathbf{Y}_{(1)}^{(i)} + D \cdot \mathbf{Z}_{(1)}^{(i)})]^2 + \\ &\sum_{i=1}^N [\mathbf{Z}_{(2)}^{(i)} - (\mathbf{dZ} - C \cdot \mathbf{X}_{(1)}^{(i)} - D \cdot \mathbf{Y}_{(1)}^{(i)} + A \cdot \mathbf{Z}_{(1)}^{(i)})]^2 = \min \end{aligned} \tag{17}$$

Természetesen a (17) egyenletrendszer az azonos pontok mért koordinátáit tartalmazza, \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{Z} az azonos pontok megfelelő koordinátái a kiinduló és a célrendszerben. A minimum a mért és számított koordináták különbségeinek négyzetösszegére, vagyis a térbeli lineáris eltérések négyzetére vonatkozik. A feltétel azonos a távolságkülönbség abszolút értékének minimalizálásával.

A minimum feltétele, hogy a paraméterek, vagyis a \mathbf{dX} , \mathbf{dY} , \mathbf{dZ} , A , B , C és D mennyiségek szerinti parciális deriváltak nullák legyenek. A (17) összefüggés paraméterek szerinti parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \mathbf{dX}} &:: \sum_{i=1}^N -2 \cdot [\mathbf{X}_{(2)}^{(i)} - (\mathbf{dX} + A \cdot \mathbf{X}_{(1)}^{(i)} + B \cdot \mathbf{Y}_{(1)}^{(i)} + C \cdot \mathbf{Z}_{(1)}^{(i)})] = 0 \\
 \frac{\partial}{\partial \mathbf{dY}} &:: \sum_{i=1}^N -2 \cdot [\mathbf{Y}_{(2)}^{(i)} - (\mathbf{dY} - B \cdot \mathbf{X}_{(1)}^{(i)} + A \cdot \mathbf{Y}_{(1)}^{(i)} + D \cdot \mathbf{Z}_{(1)}^{(i)})] = 0 \\
 \frac{\partial}{\partial \mathbf{dZ}} &:: \sum_{i=1}^N -2 \cdot [\mathbf{Z}_{(2)}^{(i)} - (\mathbf{dZ} - C \cdot \mathbf{X}_{(1)}^{(i)} - D \cdot \mathbf{Y}_{(1)}^{(i)} + A \cdot \mathbf{Z}_{(1)}^{(i)})] = 0 \\
 \frac{\partial}{\partial A} &:: \sum_{i=1}^N -2 \cdot [\mathbf{X}_{(2)}^{(i)} - (\mathbf{dX} + A \cdot \mathbf{X}_{(1)}^{(i)} + B \cdot \mathbf{Y}_{(1)}^{(i)} + C \cdot \mathbf{Z}_{(1)}^{(i)})] \cdot \mathbf{X}_{(1)}^{(i)} + \\
 &\quad \sum_{i=1}^N -2 \cdot [\mathbf{Y}_{(2)}^{(i)} - (\mathbf{dY} - B \cdot \mathbf{X}_{(1)}^{(i)} + A \cdot \mathbf{Y}_{(1)}^{(i)} + D \cdot \mathbf{Z}_{(1)}^{(i)})] \cdot \mathbf{Y}_{(1)}^{(i)} + \\
 &\quad \sum_{i=1}^N -2 \cdot [\mathbf{Z}_{(2)}^{(i)} - (\mathbf{dZ} - C \cdot \mathbf{X}_{(1)}^{(i)} - D \cdot \mathbf{Y}_{(1)}^{(i)} + A \cdot \mathbf{Z}_{(1)}^{(i)})] \cdot \mathbf{Z}_{(1)}^{(i)} = 0 \\
 \frac{\partial}{\partial B} &:: \sum_{i=1}^N -2 \cdot [\mathbf{X}_{(2)}^{(i)} - (\mathbf{dX} + A \cdot \mathbf{X}_{(1)}^{(i)} + B \cdot \mathbf{Y}_{(1)}^{(i)} + C \cdot \mathbf{Z}_{(1)}^{(i)})] \cdot \mathbf{Y}_{(1)}^{(i)} + \\
 &\quad \sum_{i=1}^N 2 \cdot [\mathbf{Y}_{(2)}^{(i)} - (\mathbf{dY} - B \cdot \mathbf{X}_{(1)}^{(i)} + A \cdot \mathbf{Y}_{(1)}^{(i)} + D \cdot \mathbf{Z}_{(1)}^{(i)})] \cdot \mathbf{X}_{(1)}^{(i)} = 0 \\
 \frac{\partial}{\partial C} &:: \sum_{i=1}^N -2 \cdot [\mathbf{X}_{(2)}^{(i)} - (\mathbf{dX} + A \cdot \mathbf{X}_{(1)}^{(i)} + B \cdot \mathbf{Y}_{(1)}^{(i)} + C \cdot \mathbf{Z}_{(1)}^{(i)})] \cdot \mathbf{Z}_{(1)}^{(i)} + \\
 &\quad \sum_{i=1}^N 2 \cdot [\mathbf{Z}_{(2)}^{(i)} - (\mathbf{dZ} - C \cdot \mathbf{X}_{(1)}^{(i)} - D \cdot \mathbf{Y}_{(1)}^{(i)} + A \cdot \mathbf{Z}_{(1)}^{(i)})] \cdot \mathbf{X}_{(1)}^{(i)} = 0 \\
 \frac{\partial}{\partial D} &:: \sum_{i=1}^N -2 \cdot [\mathbf{Y}_{(2)}^{(i)} - (\mathbf{dY} - B \cdot \mathbf{X}_{(1)}^{(i)} + A \cdot \mathbf{Y}_{(1)}^{(i)} + D \cdot \mathbf{Z}_{(1)}^{(i)})] \cdot \mathbf{Z}_{(1)}^{(i)} + \\
 &\quad \sum_{i=1}^N 2 \cdot [\mathbf{Z}_{(2)}^{(i)} - (\mathbf{dZ} - C \cdot \mathbf{X}_{(1)}^{(i)} - D \cdot \mathbf{Y}_{(1)}^{(i)} + A \cdot \mathbf{Z}_{(1)}^{(i)})] \cdot \mathbf{Y}_{(1)}^{(i)} = 0
 \end{aligned} \tag{18}$$

A (18) egyenletrendszerben soronként a 7 paraméter az összegések elé kivihető. Az egyenletrendszer átrendezés után felírható mint egy inhomogén lineáris egyenletrendszer, aminek általános alakja a (8) a egyenlettel megegyezik.

A deriválásokat elvégezve

$$\begin{bmatrix}
 -1 & 0 & 0 & \mathbf{X}_{(1)} & \mathbf{Y}_{(1)} & \mathbf{Z}_{(1)} & 0 \\
 0 & -1 & 0 & \mathbf{Y}_{(1)} & -\mathbf{X}_{(1)} & 0 & \mathbf{Z}_{(1)} \\
 0 & 0 & -1 & \mathbf{Z}_{(1)} & 0 & -\mathbf{Y}_{(1)} & -\mathbf{X}_{(1)} \\
 \mathbf{X}_{(1)} & \mathbf{Y}_{(1)} & \mathbf{Z}_{(1)} & \mathbf{X}_{(1)}^2 + \mathbf{Y}_{(1)}^2 + \mathbf{Z}_{(1)}^2 & 0 & 0 & 0 \\
 \mathbf{Y}_{(1)} & -\mathbf{X}_{(1)} & 0 & 0 & \mathbf{X}_{(1)}^2 + \mathbf{Y}_{(1)}^2 & \mathbf{Y}_{(1)} \mathbf{Z}_{(1)} & -\mathbf{X}_{(1)} \mathbf{Z}_{(1)} \\
 \mathbf{Z}_{(1)} & 0 & -\mathbf{Y}_{(1)} & 0 & \mathbf{Y}_{(1)} \mathbf{Z}_{(1)} & \mathbf{X}_{(1)}^2 + \mathbf{Z}_{(1)}^2 & \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{Y}_{(1)} \\
 0 & \mathbf{Z}_{(1)} & -\mathbf{X}_{(1)} & 0 & -\mathbf{X}_{(1)} \mathbf{Z}_{(1)} & \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{Y}_{(1)} & \mathbf{Y}_{(1)}^2 + \mathbf{Z}_{(1)}^2
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \mathbf{dX} \\
 \mathbf{dY} \\
 \mathbf{dZ}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \mathbf{X}_{(2)} \\
 \mathbf{Y}_{(2)} \\
 \mathbf{Z}_{(2)} \\
 A \\
 B \\
 C \\
 D
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \mathbf{X}_{(1)} \mathbf{X}_{(2)} + \mathbf{Y}_{(1)} \mathbf{Y}_{(2)} + \mathbf{Z}_{(1)} \mathbf{Z}_{(2)} \\
 \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{Y}_{(1)} - \mathbf{Y}_{(2)} \mathbf{X}_{(1)} \\
 \mathbf{X}_{(2)} \mathbf{Z}_{(1)} - \mathbf{Z}_{(2)} \mathbf{X}_{(1)} \\
 \mathbf{Y}_{(2)} \mathbf{Z}_{(1)} - \mathbf{Z}_{(2)} \mathbf{Y}_{(1)}
 \end{bmatrix} \tag{19}$$

adódik. Az A mátrix és a b vektor elemei – az áthidaló Mologyenszkij-féle megoldásnál feltüntetett módon – az azonos pontok szerinti összegeket tartalmazzák, azonban ennek kiírása a megadott mátrixművelet áttekinthetlenné tette volna. Ahol a koordináták négyzetei vagy vegyszorzatai szerepelnek a mátrixelemek vagy a vektorelemek között, ott természetesen ezekre a mennyiségekre kell elvégezni az összegzést. Az összegzés jelzésének elhagyásával együtt a (i) futóindex jelölését is elhagytuk.

A meghatározandó paraméterekből álló \mathbf{x} vektor az \mathbf{A} mátrix inverzének, \mathbf{A}^{-1} -nek a segítségével, a (9) egyenletben megadott módon állítható elő. Ezután az A , B , C és D mennyiségekből a (15) egyenletnek megfelelően elő kell állítani a κ méretaránytényezőt és α , β és γ szögértékeket. Meg kell említeni, hogy az együtthatók meghatározásához legalább 3 darab, mindkét rendszerben adott \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{Z} koordinátákkal rendelkező azonos pont szükséges.